

В.С. САФРЯН

## АНАЛИЗ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ АСИНХРОННОЙ МАШИНЫ В СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

Для асинхронной машины, работающей в стационарном режиме, рассматриваются зависимости активной и реактивной мощностей сети, а также мощности энергии магнитного поля машины от скольжения.

**Ключевые слова:** асинхронная машина, стационарный режим, скольжение, подробно-линейная функция, активная мощность, реактивная мощность.

Вопросам стационарного и переходного режимов работы асинхронной машины посвящена обширная литература, часть которых приведена в настоящей работе [1-5]. Однако в этих источниках недостаточно полно рассматриваются энергетические процессы асинхронной машины, особенно по обменной (реактивной) мощности.

В настоящей работе анализируются энергетические процессы стационарного режима асинхронной машины и рассматривается ряд смежных вопросов.

В стационарном режиме работы асинхронная машина имеет схемы замещения [1-6], представленные на рис. 1, где  $R$ ,  $r$  - активные сопротивления обмоток статора и ротора;  $L_s$ ,  $L_r$  - индуктивности обмоток статора и ротора;  $M$  - взаимная индуктивность;  $s$  - скольжение;  $U$  - напряжение статорной обмотки;  $i_s$ ,  $i_r$  - токи в обмотках статора и ротора;  $\omega$  - угловая скорость вращения поля статора;  $X_s$ ,  $X_r$ ,  $X$  - соответствующие индуктивные сопротивления ( $X_s = \omega L_s$ ,  $X_r = \omega L_r$ ,  $X = \omega M$ );  $Z_s = R + j(X_s - X)$ ,  $Z_r = r/s + j(X_r - X)$ ,  $Z_m = jX$ . Отметим также, что параметры роторной обмотки приведены к статорной обмотке.

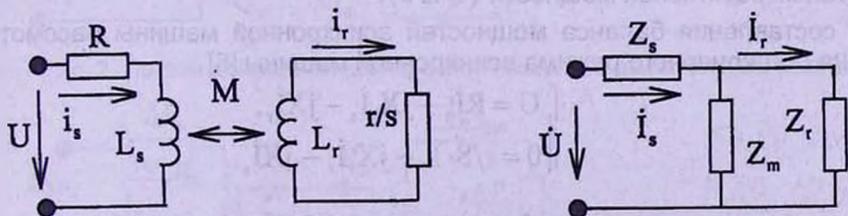


Рис. 1. Схемы замещения асинхронной машины в стационарном режиме

Составляющие мощности  $P + jQ = \dot{U} \dot{I}_s$ , потребляемой асинхронной машиной, считаются положительными, если они поступают от внешней сети, и отрицательными – в противном случае.

Покажем, что реактивная мощность асинхронной машины всегда положительна, независимо от значения скольжения, т.е. от режима работы (двигательный, генераторный, тормозной).

Комплексная мощность машины выражается в форме  $\tilde{S} = Z \dot{I}_s^2$ , где  $Z = R_s + jX_s$  - эквивалентное входное сопротивление машины [6]:

$$R_s = R + \frac{X_r^2 r/s}{(r/s)^2 + X_r^2}, \quad (1)$$

$$X_s = X_s - \frac{X_r X^2}{(r/s)^2 + X_r^2}. \quad (2)$$

Покажем, что  $X_s > 0$ , т.е.

$$\frac{X_r X^2}{(r/s)^2 + X_r^2} < X_s. \quad (3)$$

Поскольку  $\frac{X^2}{X_r X_s} \leq 1$  [6], то, подставляя в (3)  $X^2 = X_s X_r$  (поскольку

$X^2 \leq X_s X_r$ , то, если при замене  $X^2$  на  $X_s X_r$  (3) имеет место, то оно справедливо), получим

$$\frac{X_r X_r X_s}{(r/s)^2 + X_r^2} < X_s,$$

т.е. получим очевидное неравенство

$$\frac{X_r^2}{(r/s)^2 + X_r^2} \leq 1. \quad (4)$$

Таким образом, асинхронная машина в стационарном режиме является потребителем реактивной мощности ( $Q \geq 0$ ).

Для составления баланса мощностей асинхронной машины рассмотрим уравнения стационарного режима асинхронной машины [6]

$$\begin{cases} U = R \dot{I}_s + jX_s \dot{I}_s - jX \dot{I}_r, \\ 0 = r/S \cdot \dot{I}_r + jX_r \dot{I}_r - jX \dot{I}_s. \end{cases} \quad (5)$$

Умножая первое из уравнений на  $\dot{I}_s$ , а второе на  $\dot{I}_r$ , получим

$$\begin{cases} P + jQ = \Delta P_s + j\Delta Q_s - jX \dot{I}_s \dot{I}_r e^{j(\varphi_s - \varphi_r)}, \\ 0 = \Delta P_r + j\Delta Q_r - jX \dot{I}_s \dot{I}_r e^{j(\varphi_s - \varphi_r)}, \end{cases} \quad (6)$$

где  $\Delta P_s, \Delta P_r$  - потери активной мощности на активных сопротивлениях статора и ротора;  $\Delta Q_s, \Delta Q_r$  - амплитудные значения мощностей энергий магнитных полей обмоток статора и ротора;  $\varphi = \varphi_s - \varphi_r$  - угол между векторами токов  $I_r, I_s$ .

Представим (6) в виде

$$\begin{cases} P + jQ = \Delta P_s + j\Delta Q_s - jQ_m - P_m, \\ 0 = \Delta P_r + j\Delta Q_r - jQ_m + P_m, \end{cases} \quad (7)$$

где  $P_m = XI_s I_r \sin \varphi$ ;  $Q_m = XI_s I_r \cos \varphi$  - мощности магнитного поля в воздушном зазоре машины.

Из последнего уравнения системы (7) следует, что

$$\begin{cases} \Delta Q_r = Q_m, \\ \Delta P_r = -P_m, \end{cases} \quad (8)$$

т.е.  $Q_m \geq 0$ , а  $P_m > 0$  в генераторном режиме и  $P_m \leq 0$  - в двигательном режиме. Из первого уравнения системы (7) имеем

$$\begin{cases} P = \Delta P_s - P_m, \\ Q = \Delta Q_s - Q_m, \end{cases} \quad (9)$$

или же

$$\begin{cases} P = \Delta P_s + P_r, \\ \Delta Q_s = \Delta Q_r + Q. \end{cases} \quad (10)$$

Схематически балансы активной и реактивной мощностей представлены на рис. 2, 3.

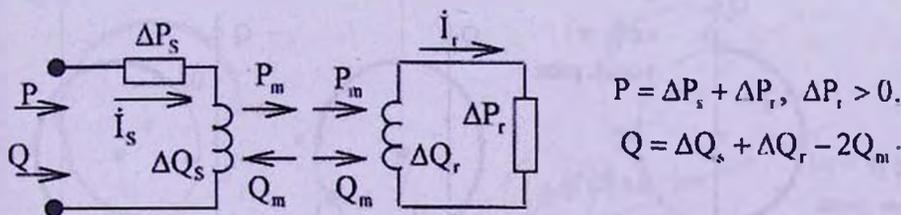


Рис. 2. Потоки мощностей асинхронной машины в двигательном режиме

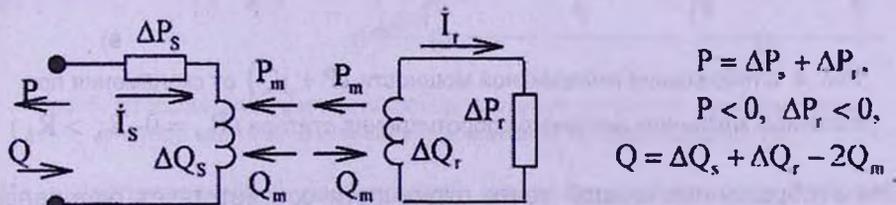


Рис. 3. Потоки мощностей асинхронной машины в генераторном режиме

По схеме рис. 1 для тока  $\dot{I}_s$  имеем

$$\dot{I}_s = \frac{\dot{U}}{Z_s + Z_m} \frac{Z_m + Z_r}{\frac{Z_s Z_m}{Z_s + Z_m} + Z_r} = \dot{U} A \frac{Bs + r}{Cs + r}, \quad (11)$$

где  $A = \frac{1}{Z_s + Z_m}$ ,  $B = Z_m + j(X_r - X) = jX_r$ ,  $C = \frac{Z_s Z_m}{Z_s + Z_m} + j(X_r - X)$

комплексные постоянные.

Исходя из (11), выразим комплексную мощность цепи в виде дробно-линейной функции от действительного аргумента  $s$ :

$$\tilde{S} = \dot{A} \dot{U}^2 \frac{\dot{B}s + r}{\dot{C}s + r} = \alpha \frac{s + \beta}{s + \gamma}, \quad (12)$$

где  $\dot{A}$ ,  $\dot{B}$ ,  $\dot{C}$  - соответствующие сопряженные величины, зависящие от конструктивных параметров машины.

Дробно-линейная функция (12) отображает действительную ось в окружность на комплексной плоскости  $P + jQ$  [8], поскольку функция (12) не имеет особой точки ( $\dot{C}s + r \neq 0$ , т.к.  $I_m(\dot{C}) \neq 0$ ).

На рис. 4 представлены отображения (12) при различных значениях активного сопротивления статора. Отображение на рис. 4а соответствует случаю при  $R = 0$ . При некотором значении  $R$  даже в генераторном режиме машина потребляет от сети активную мощность (рис. 4в).

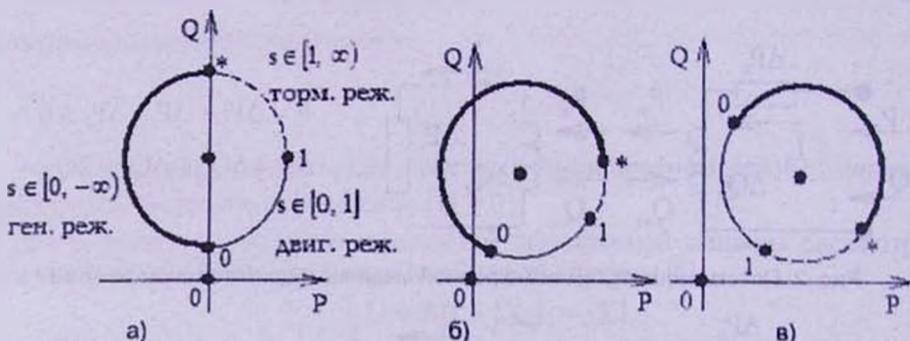


Рис. 4. Отображения комплексной мощности ( $P + jQ$ ) от скольжения при различных значениях активного сопротивления статора ( $R_a = 0$ ,  $R_b > R_a$ )

На отображениях каждой точке окружности соответствует определенное значение скольжения (на рис. 4 обозначены точки со значением скольжений 0

и 1). Точка "\*" соответствует скольжению  $s \rightarrow \pm\infty$ , так как из (12) следует  $\tilde{S}(s \rightarrow \infty) = \tilde{S}(s \rightarrow -\infty) = \alpha$ . Сплошной толстой линией обозначен генераторный режим ( $s \in [0, -\infty)$ ), сплошной тонкой линией – двигательный режим ( $s \in [0, 1]$ ), пунктирной линией – тормозной режим ( $s \in [1, \infty)$ ).

Асинхронная машина в тормозном и двигательном режимах потребляет от сети активную мощность, хотя в тормозном режиме она вырабатывает активную мощность, которая покрывает только часть потерь активной мощности обмотки ротора ( $I_r^2 \frac{1-s}{s} r < I_r^2 r$  при  $s > 1$ ).

Скольжения, при которых отображающая окружность пересекает ось реактивной мощности (рис. 4б), являются корнями уравнения  $R_s = 0$  (1):

$$R(r/s)^2 + X^2(r/s) + RX_r^2 = 0. \quad (13)$$

Решая квадратное уравнение (13) относительно  $s$ , получим

$$s = \frac{2Rr}{-X^2 \pm \sqrt{X^4 - 4R^2 X_r^2}}. \quad (14)$$

Искомые скольжения не зависят от индуктивности обмотки статора, и действительные корни отрицательны. Условие, при котором отображающая окружность касается с осью реактивной мощности (рис. 5а), имеет вид

$$X = \sqrt{2RX_r}, \quad (15)$$

которое происходит при скольжении  $s = -2Rr/X^2$ .

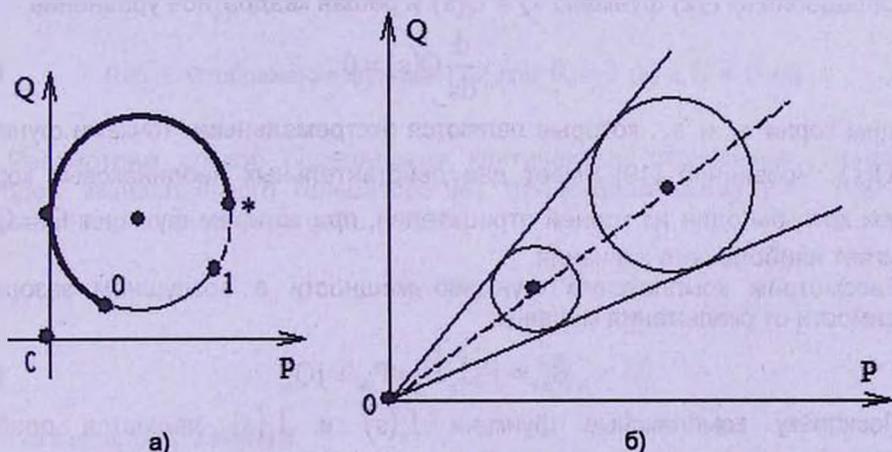


Рис. 5. Отображения при критическом значении активного сопротивления статора (а) и при изменении напряжения питания машины (б)

Из вышеприведенных рассуждений можно утверждать, что существует критическое значение ( $X_{кр} = \sqrt{2RX_r}$ ) индуктивного сопротивления  $X$ , и

лишь при  $X > X_{кр}$  ( $X \leq \sqrt{X_1 X_2}$ ) машина в генераторном режиме может отдать в сеть активную мощность, работая со скольжением  $s \in (s_1, s_2)$ , где  $s_1, s_2$  - действительные корни уравнения (13).

Отметим также, что при изменении напряжения статорной обмотки отображение окружности модифицируется только по масштабу (рис. 5б).

Определим координаты центра и радиус окружности отображения действительной оси по дробно-линейной функции (12). Преобразуя (12) и представив его в форме уравнения окружности, получим координаты центра и радиус окружности:

$$M_0 = \alpha \frac{-\bar{\gamma} + \beta}{-\bar{\gamma} + \gamma}, \quad (16)$$

$$R_0 = |\alpha| \frac{|\beta - \gamma|}{2|-\bar{\gamma} + \gamma|}, \quad (17)$$

где  $M_0$  - координаты центра окружности (комплексное число);  $R_0$  - радиус окружности;  $\bar{\gamma}$  - величина, сопряженная  $\gamma$ .

Значение  $R_{кр}$  можно определить также из соотношения

$$R_0 = Re(M_0). \quad (18)$$

Отметим, что величины  $M_0$  и  $R_0$  не зависят от сопротивления ротора. Изменение сопротивления ротора поворачивает лишь окружность, сохраняя координаты центра и радиус неизменными.

Определяя из (12) функцию  $Q = Q(s)$  и решая квадратное уравнение

$$\frac{d}{ds} Q(s) = 0, \quad (19)$$

находим корни  $s_1$  и  $s_2$ , которые являются экстремальными точками функции  $Q = Q(s)$ . Уравнение (19) имеет два действительных неодинаковых корня, причем хотя бы один из корней отрицателен, при котором функция  $Q = Q(s)$  достигает наибольшего значения.

Рассмотрим комплексную функцию мощности в воздушном зазоре в зависимости от скольжения машины:

$$\tilde{S}_m = jX I_s I_r = P_m + jQ_m. \quad (20)$$

Поскольку комплексные функции  $I_s(s)$  и  $I_r(s)$  являются дробно-линейными с одинаковыми знаменателями (с точностью до множителя константы) [7], то, полагая

$$I_s = \alpha_1 \frac{s + \beta_1}{s + \gamma}, \quad (21)$$

$$\dot{I}_r = \alpha_2 \frac{s + \beta_2}{s + \gamma}, \quad (22)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma$  - комплексные константы, для  $\tilde{S}_m$  получим

$$\tilde{S}_m = jX\alpha_1\alpha_2 \frac{(s + \beta_1)(s + \bar{\beta}_2)}{|s + \gamma|^2}. \quad (23)$$

Можно показать, что комплексная функция (23) отображает действительную ось ( $-\infty < s < \infty$ ) в эллипс (рис. 6), причем расположение и размеры эллипса от значения сопротивления ротора не зависят.

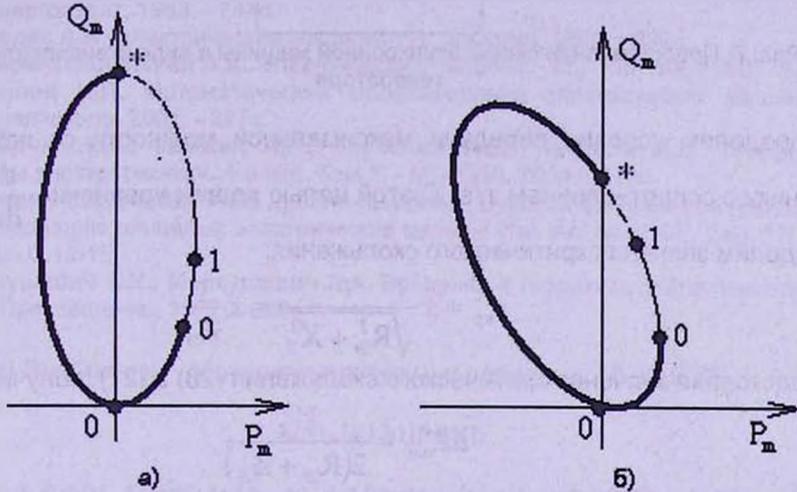


Рис. 6. Отображения функции (23) при  $R = 0$  (а) и  $R \neq 0$  (б)

Рассмотрим способ определения критического скольжения. Пользуясь методом эквивалентного генератора [6], представим схему рис. 1 в виде эквивалентного генератора (рис. 7), где

$$\dot{U}_x = \frac{\dot{U}}{Z_s + Z_m} Z_m, \quad (24)$$

$$Z_3 = \frac{Z_s Z_m}{Z_s + Z_m} + j(X_r - X). \quad (25)$$

По схеме рис. 7 имеем

$$\dot{I}_r = \frac{\dot{U}_x}{Z_3 + r/s} = \frac{\dot{U}_x}{(R_3 + r/s) + jX_3}, \quad (26)$$

$$\Delta P_r = i_r^2 \cdot \frac{r}{s} = \frac{U_x^2 \cdot r}{[(R_{\Sigma} + r/s)^2 + X_{\Sigma}^2] \cdot s}, \quad (27)$$

где  $R_{\Sigma} = R X^2 / (R^2 + X_s^2)$ ,  $X_{\Sigma} = X_r - X_s X^2 / (R^2 + X_s^2)$ .

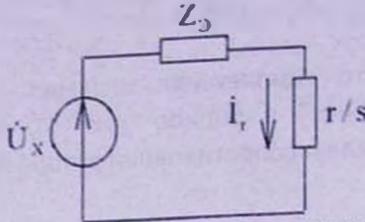


Рис. 7. Представление схемы асинхронной машины в виде эквивалентного генератора

Определим условие передачи максимальной мощности от источника к приемнику с сопротивлением  $r/s$ . С этой целью решим уравнение  $\frac{d}{ds}(\Delta P) = 0$  и определим значения критического скольжения:

$$s_{кр} = \pm \frac{r}{\sqrt{R_{\Sigma}^2 + X_{\Sigma}^2}} = \pm \frac{r}{Z_{\Sigma}}. \quad (28)$$

Подставляя значения критического скольжения (28) в (27), получим

$$\Delta P_{max}^+ = \frac{U_x^2}{2(R_{\Sigma} + Z_{\Sigma})}, \quad (29)$$

$$\Delta P_{max}^- = \frac{U_x^2}{2(R_{\Sigma} - Z_{\Sigma})}, \quad (30)$$

где  $\Delta P_{max}^+$ ,  $\Delta P_{max}^-$  - значения потерь при скольжениях  $s_{кр}$  и  $-s_{кр}$ , причем  $|\Delta P_{max}^-| > |\Delta P_{max}^+|$  ( $\Delta P_{max}^- < 0$ ).

Из соотношений (28) - (30) можно сделать общеизвестные выводы о свойствах механической характеристики асинхронной машины [1 - 4].

1. Асинхронная машина в любом режиме работы (генераторный, тормозной, двигательный) от питающей сети потребляет реактивную мощность, причем эта мощность достигает максимума в генераторном режиме.
2. Баланс реактивной мощности асинхронной машины имеет вид, представленный вторым уравнением (10), и, следовательно, поскольку  $Q > 0$ , то мощность энергии магнитного поля обмотки статора превосходит мощность энергии магнитного поля роторной обмотки.
3. Выработанная в тормозном режиме активная мощность асинхронной машины лишь частично покрывает потери активной мощности роторной обмотки.

4. Отображение комплексной входной мощности асинхронной машины от скольжения имеет дробно-линейную форму, а координаты центра и радиус изображающей окружности не зависят от активного сопротивления обмотки ротора.
5. Отображение комплексной мощности воздушного зазора асинхронной машины от скольжения имеет форму эллипса, расположение и размеры которого не зависят от активного сопротивления обмотки ротора.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Важнов А.И.** Электрические машины. - М.: Энергия, 1969. - 768с.
2. **Ковач К.П., Рац. И.** Переходные процессы в машинах переменного тока. - М. - Л.: Госэнергоиздат, 1963. - 744с.
3. **Вольдек А.И.** Электрические машины. - Л.: Энергия, 1978. - 832с.
4. **Иванов-Смоленский А.В.** Электрические машины. - М.: Энергия, 1980. - 927с.
5. **Копылов И.П.** Математическое моделирование электрических машин. - М.: Высшая школа, 2001. - 327с.
6. **Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л.** Теоретические основы электротехники. 4-е изд. Том 1. - М. - СПб, 2004. - 573с.
7. **Сафарян В.С.** Применение дробно-линейных функций комплексной переменной к исследованию линейных электрических цепей // Изв. АН АрмССР. Сер. ТН. - 1987. - №2. - С.11-15.
8. **Маркушевич А.И., Маркушевич Л.А.** Введение в теорию аналитических функций. - М.: Просвещение, 1977. - 320с.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԷԼԵԿՏՐՈՒԿԱԿԱՆ ԳՈՐԾԸՆԹԱՑՆԵՐԻ ԿԵՆՏՐՈՆԻ ԿԱՅՈՒՆԱՑՎԱԾ ՌԵԺԻՍՈՒՍ

Վ.Ս. ՍԱՖԱՐՅԱՆ

### ԱՍԻՆԿՐՈՆԱԿԱՆ ՄԵԾՆԱԿՅԻ ԷԼԵԿՏՐՈՒԿԱԿԱՆ ԳՈՐԾԸՆԹԱՑՆԵՐԻ ԿԵՆՏՐՈՆԻ ԿԱՅՈՒՆԱՑՎԱԾ ՌԵԺԻՍՈՒՍ

Դիտարկվում են կայունացված ռեժիմում աշխատող ասինքրոն մեքենայի ցանցի հետ փոխանակվող ակտիվ և ռեակտիվ հզորությունների, ինչպես նաև մեքենայի մագնիսական դաշտում կուտակված էներգիայի հզորության կախվածությունները սահիք:

*Առանցքային բառեր.* ասինքրոն մեքենա, կայունացված ռեժիմ, սահիք, կոտորակագծային ֆունկցիա, ակտիվ հզորություն, ռեակտիվ հզորություն:

V.S. SAFARYAN

### ANALYSIS OF POWER PROCESSES OF ASYNCHRONOUS MACHINE IN STABILIZED MODE

The dependence on active and reactive capacity slipping of the grid, as well as accumulated capacity of the magnetic field power of the machine, for asynchronous machine, operating in stabilized mode is considered.

**Keywords:** asynchronous machine, stabilized mode, slipping, fractionally linear function, active capacity, reactive capacity.