ISSN 0002-306X. Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2009. Т. LXII, № 3.

УДК 621.3.01.1 АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

А.А. ТЕРЗЯН, Г.С. СУКИАСЯН, В.А. ХАЧАТУРЯН

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Предложен метод численного расчета электромагнитных полей с использованием алгоритмов принятия решения. Рассматриваемый подход, в отличие от наиболее распространенного метода конечных элементов, обеспечивает сходимость решения краевых задач в случае неудачной дискретизации исследуемой среды, т.е. когда дискретизационная сетка содержит тупоугольные треугольные элементы с критическими значениями углов.

Ключевые слова: численное решение задач электромагнитного поля, алгоритмы принятия решения.

Введение. В настоящее время наиболее распространенным методом решения нелинейных краевых задач, в частности задач электромагнитного поля, является метод конечных элементов. Системы дифференциальных уравнений после их аппроксимации сеточными методами конечных элементов порождают алгебраические системы уравнений с разреженными матрицами высоких порядков. При этом сходимость процесса последовательных приближений в значительной степени зависит от конфигурации расчетной сетки, дискретизирующей исследуемую непрерывную область. В этой связи в последние годы появился ряд работ, посвященных методам построения расчетных сеток [1-4]. Вместе с тем накопленный опыт показывает, что при дискретизации исследуемой непрерывной области не всегда удается обеспечить необходимые условия [3,4] для достижения сходимости процесса решения методом конечных элементов.

В работе предложен метод анализа и численного расчета электромагнитных полей с использованием алгоритмов принятия решения. Сходимость решения при этом не зависит от конфигурации расчетной сетки, что придает рассматриваемому подходу определенную привлекательность.

1. Вариационный подход для решения двумерных полевых задач. Постоянное магнитное поле, созданное электрическим током, подчиняется уравнению Максвелла, которое в декартовой системе координат (x,y) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x}A\right)+\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial y}A\right)=-\delta, \qquad (1)$$

где A - векторный магнитный потенциал; δ - плотность тока; μ - величина магнитной проницаем ости.

Вариационный подход заменяет прямое решение уравнения (1) минимизацией энергетического функционала

$$I(A)=\frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left[\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^{2}+\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^{2}-2\delta A\right]dxdy. \qquad (2)$$

Дискретизируем задачу, разбив рассматриваемую область Ω на треугольники (элементы). Принимаем, что внутри элемента e магнитная проницаемость μ постоянна, а потенциал является линейной функцией вида

$$A(x,y)=A_i b_i^e(x,y)+A_j b_j^e(x,y)+A_m b_m^e(x,y), \qquad (3)$$

где e - треугольник с вершинами (i,j,m); A_i - значение потенциала A в узле i; $b_i^e(x,y)$ - базисная функция, т.е. линейная функция, равная единице в узле i и нулю - в остальных двух вершинах треугольника e.

Базисные функции удобно записать в виде детерминанта:

$$b_i^e(x,y)=\frac{1}{2S_e}\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_j & y_j & 1\\ x_m & y_m & 1\end{vmatrix}, \qquad (4)$$

где x_t, y_t - декартовы координаты вершин треугольника, $t=(i,j,m)$; S_e - площадь треугольника e:

$$2S_e=\begin{vmatrix} x_i & y_i & 1\\ x_j & y_j & 1\\ x_m & y_m & 1\end{vmatrix}.$$

Классический метод конечных элементов основан на нахождении минимума функционала (2) путем приравнивания нулю его производных. В результате получается система уравнений с неизвестными A_t, причем количество уравнений равно количеству неизвестных и количеству N некраевых узлов сетки.

2. Поисковый алгоритм решения полевых задач. Для применения алгоритмов поисковой оптимизации необходимо иметь целевую функцию, зависящую от варьируемых параметров. В качестве последних возьмем значения потенциала A в некраевых узлах сетки. Вектор варьируемых параметров обозначим через $\overline{A}=(A_1,A_2,\ldots,A_N)$. Целевую функцию получим, подставляя (3) в (2) и разлагая интеграл по всей рассматриваемой области на сумму интегралов по треугольникам сетки:

$$I(\overline{A})=\frac{1}{2}\sum_{e\in\Omega}\iint_{e}\left[\nu_e\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(A_i b_i^e(x,y)+A_j b_j^e(x,y)+A_m b_m^e(x,y)\right)\right)^{2}+\right.$$

$$\left.+\nu_e\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(A_i b_i^e(x,y)+A_j b_j^e(x,y)+A_m b_m^e(x,y)\right)\right)^{2}-2\delta_e A\right]dxdy, \qquad (5)$$

где ν_e - значение $\nu = 1/\mu$ внутри элемента e, а δ_e - значение плотности тока внутри e.

В (5) суммирование осуществляется по всем треугольникам сетки. Из линейности базисных функций (4) следует, что ее производные - постоянные величины и равны

$$\frac{\partial}{\partial x} b_i^e(x,y) = \frac{1}{2S_e}(y_j - y_m),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} b_i^e(x,y) = \frac{1}{2S_e}(x_m - x_j).$$

Таким образом, целевую функцию (5) можно представить в виде суммы полиномов второй степени:

$$I(\overline{A}) = \frac{1}{2}\sum_{e\in\Omega} F_e(A_i, A_j, A_m),$$

где

$$F_e = \frac{\nu_e}{4S_e}\left(A_i(y_j - y_m) + A_j(y_m - y_i) + A_m(y_i - y_j)\right)^2 +$$

$$+\frac{\nu_e}{4S_e}\left(A_i(x_j - x_m) + A_j(x_m - x_i) + A_m(x_i - x_j)\right)^2 - \frac{2}{3}\delta_e S_e(A_i + A_j + A_m).$$

Полученная целевая функция позволяет сформулировать задачу определения поля следующим образом: найти такие значения магнитных потенциалов $A_1^*, A_2^*, \ldots, A_N^*$ в узлах расчетной сетки, которые доставляют целевой функции минимальное значение:

$$I(\overline{A}) = I(A_1, A_2, \ldots, A_N) \to \min \Rightarrow \overline{A}^* = (A_1^*, A_2^*, \ldots, A_N^*). \qquad (6)$$

При такой постановке задачу численного расчета электромагнитных полей можно решить одним из известных алгоритмов принятия решения.

3. Численный эксперимент. Предложенный подход апробирован на тестовой задаче численного расчета магнитного поля в области, представленной на рис.1. На рисунке показано электромагнитное устройство с ферромагнитными участками B и D, разделенными воздушным зазором C. Устройство содержит обмотку E, обтекаемую током. Для решения задачи рассмотрена конечная область, на границе которой приняты нулевые значения потенциалов (A=0).

На рис.2 представлена расчетная сетка, при которой решение полевой задачи методом конечных элементов расходится (рис.3). "Виновником" расходимости процесса решения являются два тупоугольных треугольных элемента d с критическими значениями углов [3].

Задачу с той же "плохой" расчетной сеткой решим поисковым алгоритмом. В качестве последнего примем алгоритм случайного поиска с наилучшей пробой, при котором делается m независимых случайных проб и по наилучшей выборке осуществляется рабочий шаг.

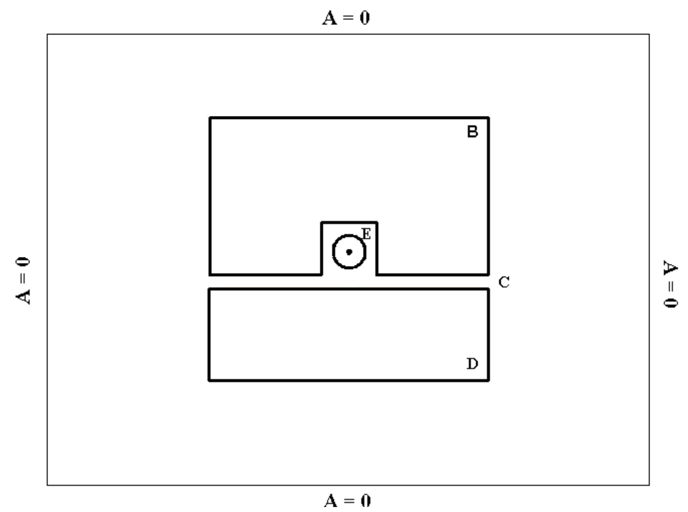

Рис. 1. Исследуемое электромагнитное устройство с заданными граничными условиями

Примем также, что случайные выборки осуществляются в пределах гиперсферы, где радиус гиперсферы определяет длину пробных шагов h_t, а плотность распределения случайных точек на гиперсфере равномерна.

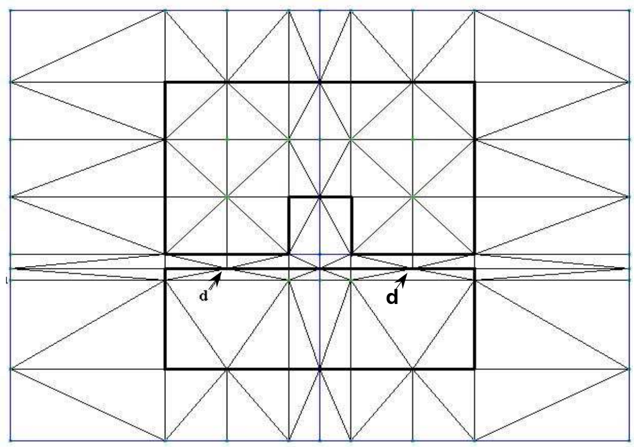

Рис.2. Расчетная сетка

Для управления длиной шага перемещения h_t рассмотрим значение отклонения ξ целевой функции $I(\overline{A})$ в $(t+1)$ и t-й итерациях. В случае успешного продвижения ($\xi \geq \Delta$, где Δ - заданное число) шаг увеличивается, а в случае $\xi < \Delta$ - уменьшается. Задачу будем считать решенной, если в процессе поиска экстремума шаг снизится до предельно заданного значения.

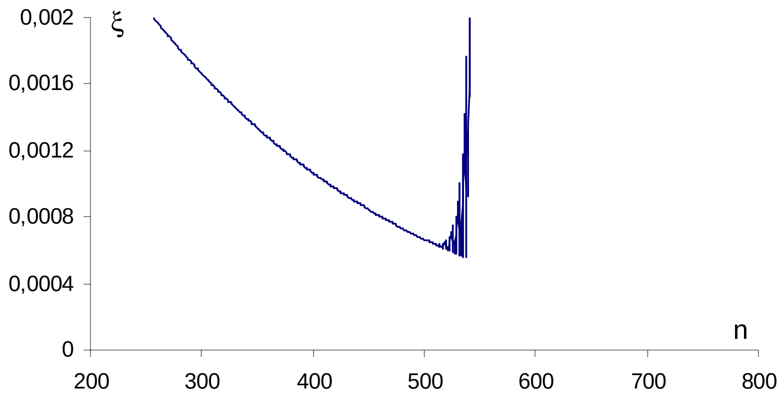

Рис.3. Процесс решения задачи (решение расходится) методом конечных элементов; ξ - невязка, n – число итераций

Итак, для решения экстремальной задачи (6) управление в рассмотренном алгоритме случайного поиска имеет следующий вид:

$$\frac{I_{t+1}(\bar{A}) - I_t(\bar{A})}{I_t(\bar{A})} \geq \Delta, \quad h_{t+1} = K_u h_t;$$

$$\frac{I_{t+1}(\bar{A}) - I_t(\bar{A})}{I_t(\bar{A})} < \Delta, \quad h_{t+1} = \frac{1}{K_u} h_t;$$

$$h_{min} \leq h_t \leq h_{max}.$$

Здесь h_t - текущее значение шага; K_u - коэффициент управления длиной шага; h_{min}, h_{max} - соответственно заданные минимальное и максимальное значения шага перемещения.

На рис.4 представлен процесс решения поставленной задачи описанным алгоритмом. Как видно из рисунка, в отличие от метода конечных элементов предложенный подход привел к успешному решению задачи за приемлемое время.

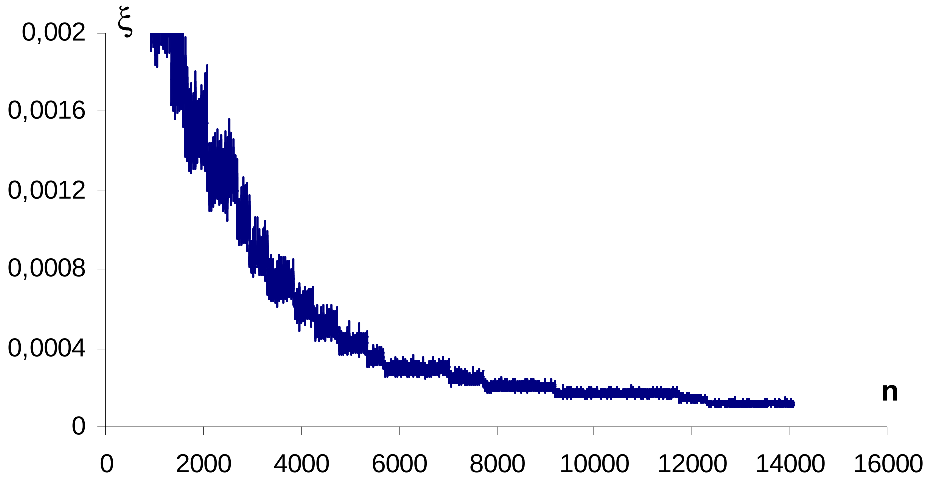

Рис. 4. Процесс решения задачи (решение сходится) с
расчетной сеткой рис. 2 предложенным алгоритмом;
ξ - невязка, n – число итераций

Выводы. Использование методов поисковой оптимизации для решения задач электромагнитного поля не требует выполнения специальных условий по качеству расчетной сетки и в ряде случаев может оказаться более предпочтительным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ruppert J. A** Delaunay Refinement Algorithm for Quality 2-Dimensional Mesh Generation / NASA Ames Research Center // Submission to Journal of Algorithms, 1994.
2. **Скворцов А. В.** Триангуляция Делоне и ее применение. – Томск: Изд-во ТУ, 2002. – 128 с.
3. **Терзян А.А, Сукиасян Г.С., Пароникян А.Е.** Об углах треугольной сетки для расчета магнитных полей методом конечных элементов //Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2007. - Т. 60, №3. – С. 523-532.
4. **Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Акопян А.Э.** Об оптимизации тетраэдральной сетки для расчета трехмерных магнитных полей методом конечных элементов //Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2008. - Т. 61, №2. – С. 305-317.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 07.02.2009.

Հ.Ա. ԹԵՐԶՅԱՆ, Հ.Ս.ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ, Վ.Ա. ԽԱՉԱՏՈՒՐՅԱՆ

ՈՐՈՇՈՒՄՆԵՐԻ ԸՆԴՈՒՆՄԱՆ ԱԼԳՈՐԻԹՄՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ

Առաջարկվում է էլեկտրամագնիսական դաշտերի թվային հաշվարկի մեթոդ՝ որոշումների ընդունման ալգորիթմների կիրառմամբ: Դիտարկվող մոտեցումը, ի տարբերություն մեծ տարածում գտած վերջավոր տարրերի մեթոդի, ապահովում է եզրային խնդիրների լուծման զուգամիտում հետազոտվող միջավայրի անհաջող ընդհատավորման դեպքում, այսինքն, երբ ընդհատավորման ցանցը պարունակում է անկյունների կրիտիկական արժեքներով բութանկյուն եռանկյուն տարրեր:

Առանցքային բառեր. էլեկտրամագնիսական դաշտի թվային լուծում, որոշումների ընդունման ալգորիթմներ:

H.A. TERZYAN, H.S. SUKIASYAN, V.A. KHACHATURYAN

APPLICATION OF DECISION-MAKING ALGORITHMS IN ELECTROMAGNETIC FIELD PROBLEMS

A numerical calculation method of electromagnetic field using decision-making algorithms is proposed. The method under consideration, unlike the most spread method of finite-elements, provides the convergence of boundary problem solution as well as in case of unsuccessful discretization of the examined medium, that is when the discretization net contains obtuse-angular triangle elements with critical values of angles.

Keywords: numerical calculation of electromagnetic field problems, problem-solving algorithm.