

АДЕЛ РИ АД ХАДЖНИДИ

**СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФИРМЫ И
ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЕЕ РЕСУРСАМИ**

Предлагается математическая модель фирмы, предоставляющей мультимедиа услуги и видео по требованию. Формулируется и решается задача оптимального планирования рекламы фирмы с применением принципа максимума Понтрягина. Найдено оптимальное управление в классе релейных функций и точка отключения рекламы.

Ключевые слова: система автоматизации фирмы, стохастическая модель, оптимальное управление ресурсами.

Введение. С развитием Интернет расширяется рынок таких сетевых услуг, как IP телефония, мультимедиа и видео по требованию, системы E- бизнеса, сетевые базы данных и базы знаний, в том числе корпоративные базы в области медицины, банковских и биржевых операций, электронные библиотеки и учебные базы для дистанционного обучения и т.д. Сетевые сервисы позволяют найти необходимую информацию в сетевых базах и осуществить покупку, биржевую или банковскую операцию, просмотр мультимедиа файла, видео или новостей, обучение и тестирование знаний и т.д.

Ввиду увеличения количества сетевых сервисов и роста конкуренции между ними для многих сервисов одним из эффективных средств достижения успеха в сетевом рынке и расширения бизнеса является оптимальное использование рекламы [1-3]. Для многих сервисов реклама - неотъемлемая часть собственного бизнеса. В таких системах применение эффективной рекламной кампании позволяет оптимально распределять ресурсы фирмы, прогнозировать расходы и планировать политику расширения. При планировании рекламы необходимо учесть особенности ее применения, в частности, инерционный характер воздействия, зависимость эффективности от выразительности используемых средств, планирования рекламных акций во времени и, в конечном итоге, от объема вложенных средств [4].

В настоящей работе рассмотрена задача оптимального управления рекламой фирмы, предоставляющей мультимедиа услуги и онлайн видео по требованию. Подобные сервисы в настоящее время находят применение на рынке продажи/аренды видеофильмов, новостных серверах, системах дистанционного интерактивного обучения и т.д. Для обеспечения высокого качества сервиса в мультимедиа, базах данных часто используют такой метод чтения материалов, при котором поступающие от пользователей запросы обслуживаются параллельно, независимо друг от друга в реальном масштабе времени. Особенность подобных сервисов в том, что поток запросов от пользователей часто имеет нестационарный, взрывной, фрактальный характер [5,6]. Более того, при запросе материалов с высоким пользовательским рейтингом они могут поступать группами. За просмотр каждого материала пользователи платят арендную плату a . Фирма за тиражирование каждой единицы видеоматериала и за аренду каналов и оборудования платит некоторую сумму b . Для поддержания и расширения бизнеса фирма часть своего капитала расходует на организации рекламы.

Модель. В качестве математической модели фирмы предлагается использовать бесконечно-линейную систему обслуживания. Для описания потока запросов пользователей предлагается модель нестационарного марковского процесса группового поступления (ВМАР) [5,6]. Запросы в модели обслуживаются независимо друг от друга, отдельными каналами передачи данных. Время обслуживания запроса, включающее время на чтение и передачу файла необходимого материала, - случайная величина γ с функцией распределения $G(t) = P(\gamma \leq t)$ и конечным средним $\bar{\gamma}$.

ВМАР поток задается [1] с помощью последовательности характеристических матриц $\{D_k(t), k \geq 0\}$ размерности $m \times m$, где $m < \infty$. Здесь $D_0(t)$ - несингулярная матрица с отрицательными диагональными и неотрицательными внедиагональными элементами, постолбцевая сумма которых меньше или равна нулю, а $D_k(t), k \geq 1$ - неотрицательные матрицы, соответствующие поступлению групп из $k \geq 1$ запросов. Пусть $D(t)$ - матрица интенсивностей размерности $m \times m$:

$$D(t) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k(t), \quad (D(t) \neq D_0(t)), \quad t \geq 0, \quad \text{а} \quad \pi(t) = \{\pi_i(t), i \in E\} \quad - \quad \text{ее правый собственный вектор } t \geq 0.$$

$$\pi(t)D(t) = 0, \quad D(t)e = 0, \quad \pi(t)e = 1.$$

Здесь e - вектор-столбец из единиц.

Тогда интенсивность поступления запросов пользователей $\lambda(t)$ в момент t можно определить из соотношения

$$\lambda(t) = \pi(t) \sum_{k=1}^{\infty} k D_k(t) e, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Рассмотрим следующий механизм влияния рекламы на интенсивность потока запросов пользователей. Пусть в отсутствие рекламы интенсивность потока запросов постоянна $\lambda(t) = \lambda_0$ и в промежутке времени $[t, t + \Delta t]$ на рекламу расходуется часть капитала $u(t)C(t)\Delta t$ фирмы, где $C(t)$ - величина среднего капитала фирмы в момент t , а $u(t)$ - некоторая функция управления, $0 \leq u(t) \leq 1$. Предположим, что за Δt интенсивность потока запросов увеличивается на величину, пропорциональную $u(t)C(t)\Delta t$. Для учета воздействия рекламы на интенсивность поступления запросов введем функцию $R(t)$. Использование рекламы приводит к увеличению интенсивности потока запросов от λ_0 до величины $\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 R(t)$. Как показано в [7], взаимосвязь функции $R(t)$ от величины израсходованного на нее капитала $C(t)$ можно задать соотношением

$$k \frac{dR}{dt} = -R(t) + u(t)C(t). \quad (2)$$

Очевидно, что $R(t) = u(t)C(t)$ при $k = 0$.

Запишем изменение капитала фирмы $C(t)$ во времени:

$$\frac{dC(t)}{dt} = -u(t)C(t) + \lambda(t)a - \int_0^t \lambda(t-x)G(x)dx. \quad (3)$$

При $u(t) = 0$ из (3) получим $C(t) = C(0) + \lambda_0 a t - \lambda_0 b \int_0^t G(x) dx$. Откуда $C(t) = C(0) + \lambda_0(a-b)t$ при $t > 1$ $C(t) \sim C(0) + \lambda_0(a-b) \cdot t \cdot C(0)$ - величина начального капитала фирмы.

Таким образом, при отсутствии рекламы ($u(t) = 0$) и выполнении условия $a - b > 0$ средний капитал фирмы с течением времени линейно нарастает. При $u(t) \neq 0$ возможно как увеличение, так и уменьшение среднего капитала с течением времени. Поэтому возникает задача выбора такой стратегии управления $u(t)$ рекламной кампанией, которая максимизирует средний капитал фирмы в заданный момент времени T .

Задача оптимального управления. Рассмотрим случай экспоненциального времени обслуживания запросов, $G(t) = 1 - e^{-t\mu}$, где μ - скорость обслуживания запросов.

Обозначим $\varphi(t) = \int_0^t R(t-\tau) dG(\tau)$.

Сформулируем задачу оптимального управления. Найти управление $u(t)$, удовлетворяющее требованию $0 \leq u(t) \leq u$, которое максимизирует средний капитал фирмы $C(t)$ при условии, что состояние фирмы описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dC(t)}{dt} &= -u(t)C(t) + \lambda_0[a - B(t)b] + \lambda_1 a R(t) - \lambda_1 b \varphi(t), \\ k \frac{dR(t)}{dt} &= u(t)C(t) - R(t), \\ \frac{d\varphi(t)}{dt} &= R(t) - \mu \varphi(t) \end{aligned} \quad (4)$$

с начальными условиями: $C(0) = C(0)$, $R(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$.

Для решения задачи используем принцип максимума Л.С. Понтрягина [8]. Составим $H(u)$ - функцию Гамильтона:

$$\begin{aligned} H(u) &= p_1[-u(t)C(t) + \lambda_0(a - G(t)b) + \lambda_1 a R(t) - \lambda_1 b \varphi(t)] + \\ &+ \frac{p_2}{k}[u(t)C(t) - R(t)] + p_3[R(t) - \mu \varphi(t)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Запишем систему сопряженных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dp_1(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial C} = \left[p_1(t) - \frac{1}{k} p_2(t) \right] u(t), \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial R} = -\lambda_1 a p_1(t) + \frac{1}{k} p_2(t) - p_3(t), \\ \frac{dp_3(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \lambda_1 b p_1(t) + \mu p_3(t) \end{cases} \quad (6)$$

с граничными условиями $p_1(T) = 1$, $p_2(T) = 0$, $p_3(T) = 0$.

Максимум функции $H(u)$ по $u(t)$ достигается при

$$u(t) = \begin{cases} u_0, & \text{если } p_1(t) - \frac{1}{k} p_2(t) < 0, \\ 0, & \text{если } p_1(t) - \frac{1}{k} p_2(t) \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

Таким образом, управление рекламой (7) носит релейный характер. Точки переключения управления определяются условием

$$p_1(t) - \frac{1}{k} p_2(t) = 0. \quad (8)$$

Задача сводится к нахождению решения системы (6) и связанного с ней управления $u(t)$.

Рассмотрим вначале поведение решения в окрестности точки T . Из граничных условий задачи следует, что при t , близких к T , $u(t) = 0$. Поэтому при t , близких к T , функции $p_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ определяются системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{dp_1(t)}{dt} = 0, \\ \frac{dp_3(t)}{dt} = \lambda_1 b p_1(t) + \mu p_3(t), \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = -\lambda_1 a p_1(t) + \frac{1}{k} p_2(t) - p_3(t), \end{cases} \quad (9)$$

решение которой, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$\begin{cases} p_1(t) = 1, \\ p_2(t) = \lambda_1 k(a-b) - \lambda_1 b \frac{k}{k\mu-1} \exp(-\mu(T-t)) + \lambda_1 k \frac{a-(a-b)k}{k\mu-1} \exp\left(-\frac{T-t}{k}\right), \\ p_3(t) = \lambda_1 \mu b [\exp(\mu(t-T)) - 1]. \end{cases} \quad (10)$$

Обозначим

$$f(t) = \lambda_1(a-b) \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{k}\right) \right] - \lambda_1 b \frac{k}{k\mu-1} \left[\exp(-\mu t) - \exp\left(-\frac{t}{k}\right) \right].$$

Точка переключения управления, определяемая условием (8), если она существует, $t^* = T - \chi^*$, где χ^* – корень уравнения $f(\chi) = 1$. Функция $f(\chi)$ обладает свойствами: $f(0) = 0$, $f(\infty) = \lambda_1(a-b)$. Отсюда получаем необходимое условие существования точки переключения (точки выключения рекламы):

$$\lambda_1(a-b) - 1 > 0. \quad (11)$$

Смысл соотношения (11) очевиден. Величина $\lambda_1(a-b) - 1$ равна приращению капитала фирмы в стационарном режиме за счет рекламы, приходящейся на единицу вложенного капитала. Если $\lambda_1(a-b) - 1 \leq 0$, то затраты на рекламу бессмысленны. При

выполнении условия (11) затраты на рекламу начинаются в некоторый момент времени t_0 и прекращаются в момент t^* ($0 \leq t_0 \leq t^*$). Покажем, что $t_0 = 0$. Для этого необходимо показать, что при $t < t^*$ переключения управления не существуют точки.

На отрезке $[t_0, t^*]$, где $u(t) = u_0$, функции $p_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{dp_1(t)}{dt} = u_0 \left(p_1(t) - \frac{1}{k} p_2(t) \right), \\ \frac{dp_3(t)}{dt} = \lambda_1 b p_1(t) + \mu p_3(t), \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = -\lambda_1 a p_1(t) + \frac{1}{k} p_2(t) - p_3(t) \end{cases} \quad (12)$$

с граничными условиями, определяемыми (10) при $t = t^*$.

Обозначим $x(t) = p_1(t) - \frac{1}{k} p_2(t)$. По условию, $x(t) \leq 0$ при $t \in [t_0, t^*]$. Покажем, что $x(t) < 0$ при $t < t^*$. Функции $p_1(t)$, $x(t)$, $p_3(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{dp_1(t)}{dt} = u_0 x(t), \\ k \frac{dx(t)}{dt} = (1 + k u_0) x(t) + (\lambda_1 a - 1) p_1(t) - p_3(t), \\ \frac{dp_3(t)}{dt} = \lambda_1 b p_1(t) + \mu p_3(t). \end{cases} \quad (13)$$

Из первого уравнения (13) следует, что $p_1(t)$ – монотонно убывающая функция. Так как $p_1(t^*) = 1$, то $p_1(t) \geq 1$. Решение третьего уравнения (13) есть

$$p_3(t) = -\frac{\lambda_1 b}{\mu} \left[\exp(\mu(t - t^*)) - \exp(\mu(t - T)) \right] + \lambda_1 b \int_t^{t^*} \exp(\mu(t - x)) p_1(x) dx,$$

откуда $k \frac{dx(t)}{dt} = (1 + k u_0) x(t) + \psi(t)$, где $\psi(t) > 0$. С учетом граничного условия $x(t^*) = 0$ получаем

$$x(t) = -\frac{1}{k} \int_t^{t^*} \exp\left((1+ku_0)\frac{t-x}{k}\right) \psi(x) dx.$$

Отсюда $x(t) < 0$ при каждом t , что и доказывает отсутствие второй точки переключения управления.

Вывод. При выполнении условия (11) затраты на рекламу должны начаться при $t = 0$ и закончиться при $t = t^*$, определяемом как решение уравнения $f(T - t^*) = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Rajeev B., Myers J.G., Aaker D.A.** Advertising Management. Upper Saddle River, NJ, Prentice Hall, 1996.
2. **Rossiter J.R., Percy L.** Advertising Communications and Promotion Management. NY, McGraw Hill, 1997.
3. **Liu Y., Guo Y., Liang Ch.** A survey on peer-to-peer video streaming systems // J. of Peer-to-Peer Networking and Applications, Springer. 2008. – N2.
4. **Bonhomme A., Prylli L.** Performance evaluation of a distributed video storage system / In IPDPS. - Workshop PDIVM, Fort Lauderdale, Florida, 4, 2002.
5. **Neuts M.F.** A versatile Markovian point process // J. Appl Probab. - 1979.- 16. - P. 764-779.
6. **Lucantoni D.M.** New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process // Commun. Statist. Stochastic Models 7(1). 1991. - P. 1-46.
7. **Ахмедова Д.Д., Терпугов А.Ф.** Математическая модель функционирования страховой компании с учетом расходов на рекламу // Изв. вузов. Физика. - 2001. - № 1. - С. 25-28.
8. **Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.** Принцип максимума Понтрягина. -М.: Факториал, 2006. - 143 с.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 03.03.2009.

ԱՂԵԼ ՌԻԱԴ ՀԱՋԽԻՆԴԻ

ՖԻՐՄԱՅԻ ՍՏՈԽԱՍՏԻԿ ՄՈԴԵԼ ԵՎ ՌԵՍՈՒՐՍՆԵՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ԿԱՌԱՎԱՐՈՒՄ

Առաջարկվում է ֆիրմայի մաթեմատիկական մոդել, որը տրամադրում է ըստ պահանջարկի բազմամեդիա և տեսաձայնայություններ: Պոնտրյագինի մաքսիմումի սկզբունքի կիրառմամբ ձևակերպվում և լուծվում է ֆիրմայի օպտիմալ պլանավորման խնդիրը: Ռելեատիվ ֆունկցիաների դասում գտնված են օպտիմալ կառավարումը և գովազդի անջատման կետը:

Առանցքային բառեր. ֆիրմայի ավտոմատացման համակարգ, ստոխաստիկ մոդել, ռեսուրսների օպտիմալ կառավարում:

ADEL RIAD HADGHINDI

THE STOCHASTIC MODEL OF COMPANY AND ITS OPTIMAL CONTROL RESOURCES

A mathematical model of the company which gives multimedia and video services is suggested. The problem of advertising optimal planning of the company with the help of Pontriagin maximum principle is formulated and solved. The optimal solution and the switching point of advertisement are found in the class of relay-type functions.

Keywords: automatization system of the company, stochastic model, optimal control of resources.