

**Ж.М. МИРЗАБЕКЯН**

### РАСЧЕТ ПОТЕРЬ ЭНЕРГИИ В КАБЕЛЕ С ПЛОСКИМИ ТОКОПРОВОДЯЩИМИ ЖИЛАМИ

Рассматриваются методы расчета магнитного поля и индуктивности кабеля с плоскими токопроводящими жилами. Дается анализ расчетов с применением  $\theta$ -функции. Для плоских жил сечением  $1,13 \text{ мм}^2$  рассчитываются активное сопротивление и емкость при частоте  $20 \text{ кГц}$ .

**Ключевые слова:** плоский кабель, тета-функция, индуктивность, симметричное поле относительно экрана.

В [1] приведено интегральное уравнение для расчета токов в длинных цилиндрических немагнитных проводниках, которые создают в окружающем пространстве плоское электромагнитное поле. Поперечное сечение этих проводников обозначено через  $S_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ):

$$\delta_j(Q) + \frac{ik^2}{2\pi} \sum_{k=1}^n \int_{S_k} \delta_k(M) \ell n \frac{1}{r_{QM}} dS_M = \gamma E_{Qj}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где  $\delta_j(Q)$  – плотность тока в точке  $Q$  проводника  $S_j$  ( $j = 1, \dots, n$ );  $E_{Qj}$  – некоторая константа на проводнике  $S_j$  (падение напряжения на единицы длины  $j$ -го проводника).

При рассмотрении ленточных экранированных проводов можно без существенной ошибки считать, что магнитное поле  $H$  на экране параллельно экрану (рис. 1). Поэтому это поле может быть продолжено симметрично относительно экрана во всех направлениях, и после многократного повторения этой операции, как и при расчете электрического поля, приходим к периодической картине с тем же полем, но без экрана. Для учета влияния экрана исходная система была заменена на эквивалентную из бесконечного числа проводов (рис. 2) с горизонтальным  $4B$  и вертикальным  $2A$  периодами. В уравнение (1) для такой системы входила бесконечная сумма ( $n = \infty$ ). Однако, проследив за выводом уравнения (1) [1], нетрудно заключить, что если заменить  $\ell n \frac{1}{r}$  двояко-периодической функцией  $k(x, y)$  с

периодами  $4B$  и  $2A$ , гармонической всюду, и такой, что  $k(x, y) - \ell n \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  ограничена

в нуле, то будет справедливым уравнение, аналогичное (1), с  $n = 4$  (число проводов в периоде). То есть, будем иметь

$$\delta_j(Q) + \frac{ik^2}{2\pi} \sum_{j=1}^4 \iint_{S_j} \delta_k(M) k(x_Q - x_M, y_Q - y_M) dx_M dy_M = \gamma E_{Dj} \quad (2)$$

где  $S_1, S_2, S_3, S_4$  – провода I, II, III, IV;  $\delta_j(Q)$  – плотности токов на этих проводах ( $j = 1, 2, 3, 4$ ).  
Используя свойства функции  $\theta_1(V)$  [4], нетрудно показать, что описанным выше условиям удовлетворяет функция

$$k(x, y) = \ell n \left| \theta_1 \left( \frac{x + iy}{4B} \right) \right|, \quad (3)$$

где  $\theta_1(V) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(n-1)} e^{i\pi(2n-1)V}$ ;  $V = (x + iy)/2B$ ;  $q = e^{-\pi A/2B}$ .

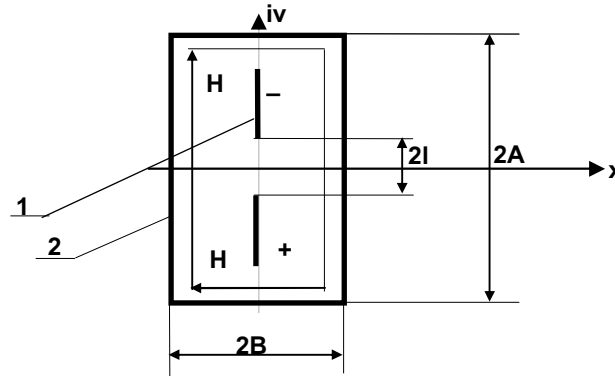


Рис. 1. К расчету активного сопротивления экранированного кабеля с плоскими токопроводящими жилами: 1- токопроводящая жила, 2- экран;  
знак "–" – ток течет от нас; знак "+" – ток течет к нам

Построенная нами функция  $k(x, y)$  является периодической по  $X$  с периодом  $4B$ , однако она непериодична по  $y$ . Согласно таблице в [4], можно записать  $k(x, y + 2A) = k(x, y) + \pi A/2B$ .

Так как сумма токов в периодах I и II равна нулю, то сумма интегралов в (2) периодична по  $y$ , и уравнение (2) можно переписать в виде

$$\delta_1(Q) + \frac{i k^2}{2\pi} \iint_{S_1} \delta_1(M) \left[ k(x_Q - x_M, y_Q - y_M) - k(x_Q - x_M + 2B, y_Q - y_M) - \right. \quad (4) \\ \left. - k(x_Q - x_M, y_Q + y_M) + k(x_Q - x_M + 2B, y_Q + y_M) \right] dx_M dy_M = \gamma E_{01}.$$

С учетом (3) это выражение эквивалентно:

$$\delta_1(Q) + \frac{i k^2}{2\pi} \iint_{S_1} \delta_1(M) \left[ \ell n \left| \frac{\theta_2 \left( \frac{(x_Q - x_M) + i(y_Q - y_M)}{4B} \right)}{\theta_2 \left( \frac{(x_Q - x_M) + i(y_Q - y_M)}{4B} \right)} \right| + \ell n \left| \frac{\theta_1 \left( \frac{(x_Q - x_M) + i(y_Q + y_M)}{4B} \right)}{\theta_2 \left( \frac{(x_Q - x_M) + i(y_Q + y_M)}{4B} \right)} \right| \right] dx_M dy_M = C, \quad (5)$$

где  $C = \text{const.}$

Уравнение (5) можно переписать в виде

$$\delta_1(Q) + \frac{ik^2}{2\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{\ell}^{\alpha+\ell} k_0(x_M, x_Q; y_M, y_Q) \delta(M) dx_M dy_M = C. \quad (6)$$

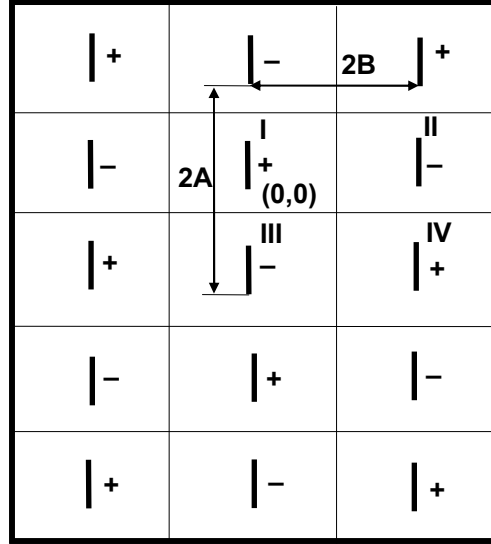


Рис. 2. К рассмотрению магнитного поля кабеля методом зеркального отображения

Подберем такое число  $\lambda$  чтобы выражение (6) оказалось минимальным. Очевидно,

$$\lambda = \frac{1}{\alpha^2 b^2} \iint_{S_1} \iint_{S_1} k_0 dx_M dy_M dx_Q dy_Q. \quad (7)$$

Тогда выражение (7) примет вид

$$\|A\|^2 = \frac{k^4}{4\pi^2} \left( \iint_{S_1} \iint_{S_1} k_0^2 dx_M dy_M dx_Q dy_Q - \frac{\lambda^2}{\alpha^2 b^2} \right). \quad (8)$$

Уравнение (6) можно переписать в виде

$$\delta_1(Q) + \frac{ik^2}{2\pi} \iint_{S_1} (k_0 - \lambda) \delta_1(M) dx_M dy_M = C_1, \quad (9)$$

где  $C_1 = \text{const}$ ;  $k_0$  – сумма логарифмов в выражении (5).

Так как нас интересует лишь распределение тока  $\delta_1(Q)$ , то можно принять  $C_1=1$ .

Уравнение (9) решаем по схеме, указанной в [5]. Это возможно, так как ядро уравнения (9) симметрично.

Схема решения следующая:

$$\begin{aligned} \delta_0(Q) &= \alpha, \\ \delta_1(Q) &= (1 - \alpha) \delta_0 - \frac{ik^2 \alpha}{2\pi} \iint_{S_1} k_0 \delta_0(M) dx_M dy_M + \alpha, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\delta_2(Q) = (1 - \alpha)\delta_1 - \frac{ik^2\alpha}{2\pi} \int_{S_1} \int_{S_1} k_0 \delta_1(M) dX_M dY_M + \alpha,$$

$$\text{где } \alpha = \frac{1}{1 + \frac{k^4}{4\pi^2} \|A\|^2}.$$

Расчеты проводятся двумя этапами.

**Первый этап.** Примем толщину проводов равной нулю (т.е. интегрируем по оси провода в ширину). Тогда уравнение (9) можно заменить следующим выражением:

$$\sigma(y) + \frac{ik^2b}{2\pi} \int_{\ell}^{\ell+\alpha} \sigma(y_m) [k_0(0, y, 0, y_m) - \lambda_1] dy_m = 1, \quad (11)$$

где  $\sigma$  - поверхностная плотность тока.

Если  $b \ll \alpha$ , то уравнение (11) является достаточным. В этом случае

$$\lambda_1 = \frac{1}{\alpha} \int_{\ell}^{\ell+\alpha} \int_{\ell}^{\ell+\alpha} k_0(0, y_m, 0, y_q) dy_m dy_q, \quad (12)$$

тогда будем иметь

$$\|A\|^2 = \int_{\ell}^{\ell+\alpha} \int_{\ell}^{\ell+\alpha} k_0^2(0, y_m, 0, y_q) dy_m dy_q - \frac{\lambda^2}{\alpha}. \quad (13)$$

Полагая  $\alpha_1 = \frac{1}{1 + \frac{k^4 b^2}{4\pi^2} \|A\|^2}$ , применяем итерационную схему:

$$\sigma_0(Q) = \alpha,$$

$$\sigma_1(Q) = (1 - \alpha)\sigma_0 - \frac{ik^2b\alpha}{2\pi} \int_{\ell}^{\ell+\alpha} [k_0(0, y_q, 0, y_m) - \lambda_1] \sigma_0(y_m) dy_m + \alpha,$$

$$\sigma_{j+1}(Q) = (1 - \alpha)\sigma_j - \frac{ik^2b\alpha}{2\pi} \int_{\ell}^{\ell+\alpha} [k_0(0, y_q, 0, y_m) - \lambda_1] \sigma_j(y_m) dy_m + \alpha.$$

Определив отсюда  $\sigma$ , находим предварительное распределение тока. При этом считаем, что в силу поверхностного эффекта этот ток намного быстрее меняется вдоль  $X$ , чем вдоль  $Y$ , т.е.

$$\frac{d^2 \delta(x, y)}{dx^2} - k^2 \delta(x, y) = 0, \quad (14)$$

$$\int_{-b/2}^{b/2} \delta(x, y) dy = \sigma(y), \quad (15)$$

Кроме того, этот ток симметричен по  $X$ , т.е.

$$\delta(x, y) = \mu(y) \operatorname{ch} \sqrt{k} x, \quad (16)$$

тогда согласно (15) имеем

$$\mu(y) = \frac{\sigma(y)}{\int_{-b/2}^{b/2} \operatorname{ch} \sqrt{i} k x \, dx} = \frac{\sigma(y) \sqrt{i} k}{2 \operatorname{sh} \sqrt{i} k \frac{b}{2}}. \quad (17)$$

**Второй этап.** Для толстых проводов, взяв за начальное приближение функцию (15)  $\delta_0(x, y)$ , можно использовать итерационную схему (10), которая сходится быстро, так как  $\delta$  мало отличается от решения уравнения (9).

Алгоритм решения задачи по определению активного сопротивления кабеля с плоскими токопроводящими жилами имеет следующий вид:

**1. Для тонких проводов:**

1. Вводим две функции

$$k(x, y) = \ln \left| \frac{\theta_2 \left( \frac{x + iy}{4B} \right)}{\theta_1 \left( \frac{x + iy}{4B} \right)} \right|.$$

2. Развиваем интервал  $(\ell, \ell + \alpha)$  на  $n$  частей точками,

$$y_r = \ell + r \alpha / n, \quad r = 0, 1, \dots, n.$$

3. Составляем функции  $k_r^-, k_r^+$ :

$$k_r^- = k \left( 0, \frac{(r-1)\alpha}{n} \right), \quad r = 2, \dots, n+1$$

при  $r = 1, \quad k_r^- = 2k_2^- - k_3^-$ ,

$$k_r^- = k \left( 0, 2\ell + \frac{(r-1)\alpha}{n} \right), \quad r = 1, 2, \dots, 2n+1.$$

4. Рассчитываем число  $\lambda_1$ , заменяя уравнение (12) выражением

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{\alpha^2} \sum_{r=0}^n \sum_{r_1=0}^n X_{r, r_1} \left( k_{|r-r_1|+1}^- + k_{r+r_1+1}^+ \right) = \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \frac{h^2}{9} \sum_{r=0}^n X_r \left[ \sum_{r_1=0}^n X_{r_1} \left( k_{|r-r_1|+1}^- - k_{r+r_1+1}^+ \right) \right], \end{aligned}$$

где  $X_{r-r_1} = X_r X_{r_1}$  - коэффициент двумерной формулы Симпсона;  $X_r$  - коэффициент одномерной формулы Симпсона.

5. Рассчитываем число  $A$ , заменяя уравнение (13) выражением

$$A_1 = \frac{h^2}{9} \sum_{r=0}^n \sum_{r_1=0}^n X_{r, r_1} \left( k_{|r-r_1|+1}^- - k_{r+r_1+1}^+ \right)^2 - \alpha^2 \lambda_1^2.$$

$$6. \text{ Полагаем } \alpha_1 = \frac{1}{1 + \frac{k^4 b^2}{4\pi} A_1}.$$

7. Начало итерации  $\sigma_{0,r} = \alpha_1, \quad r = 0, 1, \dots, n.$

8. Проводим итерацию:

$$\sigma_{j+1,r} = (1 - \alpha_1) \sigma_{j,r} - \frac{ik^2 b \alpha_1 h}{2\pi} \frac{1}{3} \sum_{r_1=0}^n X_r \left( k |r - r_1| + 1 - k_{r+r_1+1}^+ - \lambda_1 \right) \sigma_{j,r_1} + \alpha_1.$$

9. Критерий остановки:

$$\sum_{r=0}^n X_r \left| \sigma_{j+1,r} - \sigma_{j,r} \right|^2 (\varepsilon^2 \sum X_r |\sigma_{j,r}|^2).$$

10. Находим предварительный ток по последней итерации:

$$I = \frac{bh}{3} \sum_{r=0}^n X_r \sigma_r,$$

где  $h$  - длина отрезка разбиения,  $h = \alpha/n$ .

11. Определяем предварительные потери  $P_{np}$ :

$$P_{np} = \frac{h}{3} \frac{\sqrt{2}}{4\gamma} \frac{k b^2}{\text{ch} \frac{\sqrt{2}}{2} k b} \frac{\text{sh} \frac{\sqrt{2}}{2} k b + \sin \frac{\sqrt{2}}{2} k b}{\text{ch} \frac{\sqrt{2}}{2} k b - \cos \frac{\sqrt{2}}{2} k b} \sum_{r=0}^n X_r \sigma_r^2.$$

12. Определяем предварительное активное сопротивление:

$$R_{np} = P_{np} / (I_{np})^2.$$

## 2. Для тонких проводов

1. Выбираем разбиение:

$$\gamma_r = \ell + \frac{\alpha}{n} r, \quad X_s = -\frac{b}{2} + \frac{b}{m} s, \quad r = 0, 1, \dots, n, \quad s = 0, 1, \dots, m.$$

2. Составляем матрицы  $L_{r,s}^-, L_{r,s}^+$ :

$$L_{r,s}^- = k \left[ \frac{(s-1)b}{m}, \frac{(r-1)\alpha}{n} \right], \quad s = 1, \dots, m+1, \quad r = 1, \dots, n+1,$$

кроме  $s = r = 1 \quad L_{1,1}^- = 2L_{1,2}^- - L_{1,3}^-$ :

$$L_{r,s}^+ = k \left[ \frac{(s-1)b}{m}, 2\ell + \frac{(r-1)\alpha}{n} \right], \quad s = 1, \dots, m+1, \quad r = 1, \dots, 2n+1.$$

3. Рассчитываем число  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{1}{\alpha^2 b^2} \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^m X_{r,s} \left[ \sum_{r_1=0}^n \sum_{s_1=0}^m X_{r_1,s_1} \left( L_{|r-r_1|+1,|s-s_1|+1}^- - L_{r+r_1+1,|s-s_1|+1}^+ \right) \right].$$

4. Рассчитываем поле  $A$ :

$$A = \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^m X_{r,s} \left[ \sum_{r_1=0}^n \sum_{s_1=0}^m X_{r_1,s_1} \left( L_{|r-r_1|+1,|s-s_1|+1}^- - L_{r+r_1+1,|s-s_1|+1}^+ \right)^2 \right] - \alpha^2 b^2 \lambda^2,$$

$$X_{r,s} = X_r X_s.$$

5. Полагаем  $\alpha = \frac{1}{1 + \frac{k^4}{4\pi} A}$ .

6. Начало итерации:  $\delta_{0,r,s} = \frac{\sigma_r b \sqrt{i} k \operatorname{ch} \sqrt{i} k X_s}{2 \operatorname{sh} \sqrt{i} k \frac{b}{2}}$ .

7. Проводим итерацию:

$$\delta_{j+1,r,s} = (1-\alpha)\delta_{j,r,s} - \frac{ik^2\alpha}{2\pi} \sum_{r_1=0}^n \sum_{s_1=0}^m X_{r_1,s_1} \left( L_{|r-r_1|+1,|s-s_1|+1}^- - L_{|r+r_1|+1,|s-s_1|+1}^+ - \lambda \right) \cdot \delta_{j,r,s} + \alpha \cdot$$

8. Критерий остановки:

$$\sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^m X_{r,s} |\delta_{j+1,r,s} - \delta_{j,r,s}|^2 \leq \varepsilon^2 \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^m X_{r,s} |\delta_{j,r,s}|^2.$$

9. Определяем активное сопротивление:

$$R = \frac{\frac{1}{\gamma} \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^m X_{r,s} |\delta_{r,s}|^2}{\frac{h}{9} \frac{h_1}{\left| \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^m X_{r,s} \delta_{r,s} \right|^2}}, \quad h_1 = \frac{b}{m}.$$

**Заключение.** Анализ результатов расчета электромагнитных параметров кабелей с плоскими токопроводящими жилами показывает возможность получения активного сопротивления кабельной цепи с плоскими жилами при сечении, эквивалентном диаметру цилиндрических жил сечения круглого провода с диаметром 1,2 мм ( $S=1,13 \text{ мм}^2$ ), и частоте проводимого тока  $f=120 \text{ кГц}$ .

В случае плоских жил сечением  $1,13 \text{ мм}^2$  активное сопротивление при частоте 120 кГц равно 48 Ом/км, тогда как при эквивалентном сечении круглых жил оно доходит до 95 Ом/км.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тозони О.В. Метод вторичных источников в электротехнике. – М.: Энергия, 1975. – 295 с.
2. Берс Л., Джон М., Шахтер М. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
4. Тимм И.Е. Основы теории электричества. – 3-е изд. – М.: ОГИЗ, 1946.
5. Бейтман Г. Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1966. – 295 с.
6. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1978. – 331 с.
7. Иоссель Ю.Я. Расчет электрической емкости. – М.: Энергоиздат, 1997. – 240с.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 12.07.2007.

**Ժ.Մ. ՄԻՐԶԱԲԵԿՅԱՆ**

**ՀԱՐԹ ՀՈՍԱՆՔԱՀԱՂՈՐԴԻՉ ՋՂԵՐՈՎ ՄԱԼՈՒԽՈՒՄ ԷՆԵՐԳԻԱՅԻ  
ԿՈՐՈՒՍՏՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿԸ**

Դիտարկվում են հարթ հոսանքահաղորդիչ լարերով մալուխի մագնիսական դաշտի և ինդուկտիվության հաշվարկի մեթոդները: Տրվում է հաշվարկների վերլուծությունը՝  $\theta$  ֆունկցիայի կիրառմամբ:  $1,13 \text{ մմ}^2$  կտրվածքով հարթ ջղերի դեպքում հաշվարկվում է ակտիվ դիմադրություն և ունակություն՝  $20 \text{ կՀց}$  - ի դեպքում:

**Առանցքային բառեր.** հարթ մալուխ, թետա-ֆունկցիա, ինդուկտիվություն, էկրանի նկատմամբ սիմետրիկ դաշտ:

**Zh.M. MIRZABEKYAN**

**ELECTROMAGNETIC FIELD CALCULATION OF HIGH-FREQUENCY CABLES  
WITH FLAT CURRENT-CARRYING CORES**

Calculation methods of magnetic field and inductance of the cable with flat current-carrying cores are considered. The analysis of these calculation with  $\theta$  - function application is given. For flat cores with section of  $1,13 \text{ mm}^2$  the active resistance and capacities with  $20 \text{ kHz}$  frequency are calculated.

**Keywords:** flat cable, theta-function, inductance, symmetric field relative to the screen.