

В.С. САФАРЯН

РАСЧЕТ РЕЖИМОВ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

Исследуются вопросы существования, единственности и сходимости итерационного процесса решения уравнений состояния нелинейных резистивных цепей. Выявлены свойства положительной определенности матриц обобщенных параметров резистивных цепей.

Ключевые слова: резистивная цепь, вольт-амперная характеристика, единственность, сходимость, положительно определенная матрица.

Целью настоящей работы является исследование существования, единственности и сходимости итерационного процесса решения уравнений состояния нелинейных резистивных цепей (НРЦ) с определенным классом нелинейности вольт-амперных характеристик (ВАХ). Рассматриваются также некоторые свойства обобщенных параметров резистивных цепей.

Исследованию цепей с нелинейными резистивными элементами посвящено значительное число работ [1 - 5]. В частности, в [1] приведено доказательство (на основании теоремы Телледжена) однозначности решения для цепей с нелинейными резисторами, ВАХ которых являются возрастающие монотонные функции. В [2] установлены критерии диссипативности (ограниченность токов $i(t)$, начиная с некоторого момента $t_0 > 0$, при ограниченных ЭДС и токах источников и любых начальных условиях), найдены необходимые условия их конвергентности (независимости стационарного режима от начальных условий). В [3] рассматриваются линейные свойства нелинейных резистивных электрических цепей, имеющих степенную ВАХ резисторов. Получены точные для последовательно-параллельных цепей и приближенные для цепей произвольной топологии аналитические решения, обеспечивающие расчет токов и напряжений элементов схем. В [4] рассматриваются электрические цепи, включающие линейные индуктивности, резисторы и нелинейные резисторы с положительными статическими сопротивлениями. Для однофазной и симметричной трехфазной цепей с гармоническим возбуждением исследуется устойчивость стационарных точек.

Рассмотрим резистивную электрическую цепь, ВАХ которой имеет вид

$$\varphi_i^\beta - \varphi_j^\beta = K_{ij} I_{ij}^\gamma, \quad (1)$$

где φ_i, φ_j - потенциалы соответственно i -го и j -го узлов; I_{ij} - ток в ветви (i, j) ; K_{ij} - параметр (i, j) ветви; β, γ - положительные реальные числа.

ВАХ в виде (1) задана в неявной форме, поскольку для $\beta \neq 1$ ее невозможно представить в виде $\varphi_i - \varphi_j = f(I_{ij})$. Отметим, что газотранспортную сеть можно

смоделировать эквивалентной НРЦ с параметрами $\beta = 2$ и $\gamma = 2$ ($\gamma = 1,75$). Предполагается, что в узлах цепи заданы либо узловые токи (J), и искомыми являются потенциалы, либо узловые потенциалы (базисные узлы), и искомыми являются узловые токи.

Исходя из (1), можно утверждать, что в контурах резистивной цепи выполняются соотношения

$$\sum_{i,j \in L} K_{ij} I_{ij}^\gamma = 0, \quad (2)$$

где L - множество ветвей контура (берется алгебраическая сумма).

Следовательно, существует НРЦ (назовем ее явной цепью), топология, параметры ветвей K_{ij} и токи в ветвях I_{ij} которой одинаковы с исходной НРЦ, а ВАХ выражается в явной форме:

$$\phi'_i - \phi'_j = K_{ij} I_{ij}^\gamma, \quad (3)$$

$$\phi'_i = \phi_i^\beta, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4)$$

где ϕ'_i - потенциал i -го узла явной цепи; m - число узлов цепи.

Таким образом, режимы НРЦ вида (1) сводятся к расчету режимов НРЦ вида (3) с явной ВАХ.

Согласно [1], для НРЦ с ВАХ вида (3) всегда существует однозначное решение режима. Исходя из соотношения (4), можно утверждать, что режим НРЦ вида (1) существует тогда и только тогда, когда в режиме явной НРЦ выполнено условие

$$\phi'_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (5)$$

Поскольку для НРЦ с явной ВАХ (3) всегда существует единственное решение режима, то с использованием метода по параметру (метод продолжения) [6] можно достичь абсолютной сходимости решения уравнений режима. Перепишем (3) в следующем виде:

$$\phi'_i - \phi'_j = K_{ij} I^{1+\lambda(\gamma-1)}, \quad (6)$$

где при $\lambda = 0$ имеем линейную ВАХ, а при $\lambda = 1$ получаем (3).

Разобьем интервал $[0, 1]$ точками $0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n = 1$ и рассмотрим решение режима НРЦ при $\lambda = \lambda_i$, применив итерационный метод Ньютона, используемый в качестве начального приближения на i -ом этапе значения искомого, полученных на предыдущем этапе.

Если разность $\lambda_i - \lambda_{i-1}$ достаточно мала, то решение $(i-1)$ -го этапа окажется достаточно хорошим начальным приближением, обеспечивающим сходимость.

Отметим об одном свойстве резистивных цепей. Рассмотрим уравнение состояния резистивных цепей в форме узловых потенциалов, предполагая, что сначала пронумерованы небазисные узлы:

$$G_\Sigma \Phi_\Sigma = J_\Sigma, \quad (7)$$

где G_{Σ} - квадратная матрица порядка $(n + m)$ узловых проводимостей; Φ_{Σ} , J_{Σ} - векторы-столбцы порядка $(n + m)$ соответственно узловых потенциалов и токов; n - число небазисных узлов; m - число базисных узлов сети.

Представим (7) в следующем виде:

$$G\Phi + G_A\Phi_A = J, \quad (8)$$

где G - квадратная матрица порядка n узловых потенциалов для небазисных узлов; Φ - искомый вектор порядка n небазисных узловых потенциалов; J - заданный вектор порядка n узловых токов небазисных узлов; G_A - матрица размерности $n \times m$ (собственные и взаимные проводимости между базисными и небазисными узлами); Φ_A - заданный вектор порядка m потенциалов базисных узлов. Последние m уравнений системы (7) используются для определения неизвестных узловых токов базисных узлов.

Решая систему (8) относительно Φ , получим

$$\Phi = \Phi_0 + RJ, \quad (9)$$

где R - квадратная матрица узловых сопротивлений ($R = G^{-1}$); Φ_0 - вектор - столбец потенциалов узлов в холостом режиме ($\Phi_0 = -RG_B\Phi_B$).

Отметим, что если $m \neq 0$ и граф сети является связанным, то $|G| \neq 0$.

Уравнение режима (9) можно представить также в форме

$$\Phi = RJ_{\ominus}, \quad (10)$$

где $J_{\ominus} = J - G_B\Phi_B$.

Уравнение состояния (10) соответствует сети с объединением всех базисных узлов в единый (обобщенный) узел с нулевым потенциалом, к узлам которого приложены дополнительные токи величиной $G_B\Phi_B$. Для сети, состояние которой выражено в форме (10), потери активной мощности примут вид

$$\Delta P = J_{\ominus}^t \Phi = J_{\ominus}^t R J_{\ominus} \geq 0, \quad (11)$$

где J_{\ominus}^t - вектор - строка.

Из соотношения (11) следует, что матрица R - положительно определенная [6], поскольку $\Delta P = 0$ лишь при $J_{\ominus} = 0$. Из положительной определенности матрицы R следует, что матрица G положительно определенная, если $|G| \neq 0$, и положительно полуопределенная, если $|G| = 0$ (для полной матрицы или для сетей, граф которой является несвязанным). Покажем, что при добавлении ветви между существующими узлами в сети приращение потерь мощности (11) неположительно. Допустим, в исходном состоянии сети имеем матрицы G и R ($G^{-1} = R$), а при добавлении новой ветви между узлами $i - j$ получаются G' и R' ($(G')^{-1} = R'$), причем

$$G' = G + \Delta G. \quad (12)$$

Приращение матрицы узловых проводимостей определяется по формуле

$$\Delta G = VV^t, \quad (13)$$

где V - вектор-столбец, элементы которого равны нулю, кроме V_i и V_j : $V_i = \sqrt{g_b}$, $V_j = -\sqrt{g_b}$, g_b - проводимость добавленной ветви между узлами i, j .

Покажем, что симметричная матрица структуры (13) положительно полуопределенная. Согласно определению положительной определенности матрицы [6]:

$$X^t VV^t X = (X^t V)(V^t X) = a^2, \quad (14)$$

где X - n -мерный вектор-столбец; a - скалярное произведение векторов X, V .

Пользуясь формулой Шермана-Моррисона [6], получим

$$R' = R - \frac{RVV^t R}{1 + V^t R V}, \quad (15)$$

где через

$$\Delta R = -\frac{RVV^t R}{1 + V^t R V} \quad (16)$$

представляем приращение матрицы узловых сопротивлений. Покажем, что матрица ΔR отрицательно полуопределенная. Знаменатель (16) положительный, поскольку матрица R положительно определенная. Числитель (16) приводится к структуре (13), следовательно, матрица ΔR отрицательно полуопределенная.

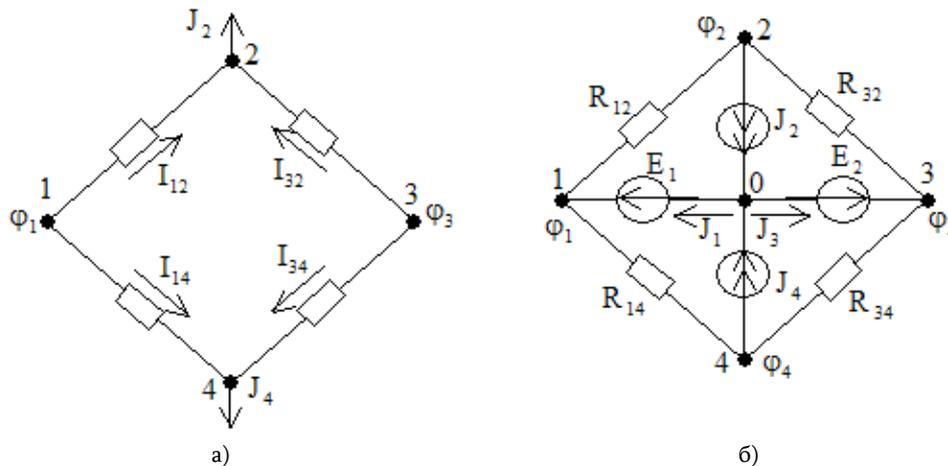


Рис. Схема НРЦ с четырьмя узлами

Приращение потерь активной мощности в сети определяется выражением

$$\Delta(\Delta P) = -J_3^t \Delta R J_3 \leq 0, \quad (17)$$

причем приращение потерь мощности равно нулю лишь при $\Phi_i = \Phi_j$.

Рассмотрим пример НРЦ, имеющей ВАХ вида (1) с четырьмя узлами, $\beta = \gamma = 2$ (рис. а), где узлы 1 и 3 являются базисными с заданными потенциалами: $\Phi_1 = E_1 = 10 \text{ В}$ и $\Phi_3 = 12 \text{ В}$, $J_2 = 40 \text{ А}$, $J_4 = 30 \text{ А}$. Параметры ветвей: $K_{12} = 0,1$; $K_{23} = 0,2$; $K_{34} = 0,4$; $K_{14} = 0,3$.

На рис. б представлена та же цепь с выделением узла нулевого потенциала ($\Phi_0 = 0$).

Результаты расчетов режимов цепей приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1
Результаты расчета цепи с неявной ВАХ

Узел	$\Phi \text{ (В)}$	$J \text{ (А)}$	$P \text{ (Вт)}$
1	10	33,65	336
2	7,83	40	313,2
3	12	36,35	436,2
4	6,43	30	192,9

Ветвь	$I \text{ (А)}$	$U \text{ (В)}$	$\Delta P \text{ (Вт)}$	$R \text{ (Ом)}$	$K \text{ (В}^\beta \text{/А}^\gamma \text{)}$
1-2	19,67	2,17	42,68	0,11	0,1
1-4	13,98	3,57	49,91	0,255	0,3
3-2	20,33	4,17	84,78	0,205	0,2
3-4	16,02	5,57	89,23	0,35	0,4

Таблица 2
Результаты расчета цепи с явной ВАХ

Узел	$\Phi \text{ (В)}$	$J \text{ (А)}$	$P \text{ (Вт)}$
1	100	33,65	3365
2	61,31	40	2452,4
3	144	36,35	5234,4
4	41,345	30	1240,35

Ветвь	$I \text{ (А)}$	$U \text{ (В)}$	$\Delta P \text{ (Вт)}$	$R \text{ (Ом)}$	$K \text{ (В}^\beta \text{/А}^\gamma \text{)}$
1-2	19,67	38,69	761,03	1,966	0,1
1-4	13,98	58,655	819,93	4,195	0,3
3-2	20,33	82,69	1681,08	4,067	0,2
3-4	16,02	102,65	1644,45	6,407	0,4

Выводы

1. Расчет режима НРЦ с ВАХ (1) сводится к расчету режима НРЦ с явной ВАХ (3).
2. Решение НРЦ с ВАХ (3) всегда существует, и оно единственное.
3. Решение НРЦ с ВАХ (1) существует тогда и только тогда, когда искомые потенциалы режима НРЦ с ВАХ (3) неотрицательны.
4. Применение метода по параметру при решении уравнений режима НРЦ с ВАХ (3) обеспечивает абсолютную сходимость.
5. В среде Delphi-7 разработана программа расчета режимов НРЦ с ВАХ (3). Программа снабжена богатым графическим сервисом, позволяющим отображать топологию схемы на мониторе с возможностью просмотра и коррекции топологии и параметров сети.

По разработанной программе выполнены многократные расчеты режимов газотранспортной сети среднего давления г. Еревана, насчитывающей 2820 узлов, 2850 ветвей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Пенфилд П., Спенс Р., Дюинкер С.** Энергетическая теория электрических цепей.-М.: Энергия, 1974. - 151 с.
2. **Данилов Л.В.** Электрические цепи с нелинейными R -элементами.-М.: Связь, 1974. - 134 с.
3. **Казаков О.И.** Линейные соотношения в нелинейных резистивных цепях// Электричество. - 1991. - № 7. - С. 68-69.
4. **Скубов Д.Ю., Ходжаев К.Ш.** Некоторые свойства электрических цепей с нелинейными резистивными элементами// Электричество. - 1996. - № 10. - С. 50-56.
5. **Беркович Е.И.** Об аналогиях в решении потоковых задач и задач расчета резистивных цепей// Электричество. - 1994. - № 1. - С. 49-56.
6. **Отрега Д., Рейнболдт В.** Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.-М.: Мир, 1975.-558 с.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 19.09.2008.

Վ.Ս. ՍԱՖԱՐՅԱՆ

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՌԵԶԻՍՏԻՎԱՅԻՆ ՇՂԹԱՆԵՐԻ ՌԵԺԻՄՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿԸ

Հետազոտվում են ոչ գծային ռեզիստիվային շղթաների վիճակի հավասարումների լուծման գոյության, միակության և զուգամիտության պայմանները: Բացահայտվել են նաև ռեզիստիվային շղթաների ընդհանրացված պարամետրերի մատրիցների դրական որոշյալ հատկությունները:

Ստանգրային բառեր. ռեզիստիվային շղթա, վոլտ-ամպերային բնութագիծ, միակություն, զուգամիտություն, դրական որոշյալ մատրից:

V.S. SAFARYAN

CALCULATION OF NONLINEAR RESISTIVE CIRCUIT MODES

The existence, uniqueness and convergence of iterative process of nonlinear resistive circuit state equation solutions are investigated. The attributes of positive definiteness of generalized resistive circuit parameter matrixes are revealed as well.

Keywords: resistive circuit, volt-ampere characteristic, uniqueness, convergence, positively defined matrix.