

К.В. ГАСПАРЯН, Г.О. ИГИТЯН

**СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИБЕЛИ И РАЗМНОЖЕНИЯ
ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТОВ**

Получены несмещенные эффективные оценки неизвестного параметра в моделях автоматизации, описываемых процессами гибели и размножения, с помощью теории экспоненциальных классов распределений.

Ключевые слова: системы автоматизации, процесс гибели и размножения, эффективные оценки.

1. **Введение.** Сложные системы автоматизации со счетным множеством состояний характеризуются коэффициентами перехода из состояния $i-1$ в состояние i (размножение) и из состояния i в $i+1$ (гибель). Такие системы описываются процессами гибели и размножения. Их стационарные распределения зависят от отношений ε_i , $i \geq 1$ коэффициентов размножения и гибели. В экспериментах ε_i могут зависеть от неизвестного параметра θ , статистическая оценка которого представляет определенный научно-практический интерес. Стационарные распределения записываются в виде [1]

$$\begin{cases} p_\theta(x) = P(\xi = x) = (g(\theta))^{-1} \cdot \prod_{m=1}^x \varepsilon_m(\theta), x = 0, 1, 2, \dots, \\ g(\theta) = 1 + \sum_{x \geq 1} \prod_{m=1}^x \varepsilon_m(\theta) < +\infty, \theta \in (0, 1]. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь P - знак вероятности, случайная величина ξ имеет распределение $\{p_\theta(x)\}$ и $\prod_{m=1}^0 \equiv 1$.

В [1] с целью нахождения оптимальных оценок параметра θ рассмотрена модель (1) в линейном случае $\varepsilon_m(\theta) = \theta \cdot \varepsilon_m$, $\varepsilon_m > 0$, $m = 1, 2, \dots$, для которой $g(\theta) \leq g(1)$. Особенно интересен случай правильного изменения $\{p_\theta(x)\}_{\theta=1}$ с некоторым показателем $(-\rho)$, $1 < \rho < +\infty$, т.е. (см.[2]) для $s = 2, 3, \dots$ существует предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p_\theta(s \cdot x)}{p_\theta(x)} \Big|_{\theta=1} = s^{-\rho}. \quad (2)$$

В [3] показано, что условие (2) равносильно в представлении

$$\varepsilon_m = 1 - \frac{\rho_m}{m}, \quad m = 1, 2, \dots \text{ существованию предела}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_m = \rho. \quad (3)$$

Для оценивания параметра θ используется выборка $X^n = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ объема $n > 1$ из распределения (1) - (2).

Введем некоторые определения. Произвольную функцию $\tau^* = \tau^*(X^n)$ (статистику) называют оценкой параметрической функций $\tau = \tau(\theta)$, если она не зависит от θ .

Пусть E_θ и D_θ - знаки математического ожидания и дисперсии.

Оценка τ^* является несмещенной для $\tau(\theta)$, если $E_\theta \tau^* = \tau(\theta)$.

Обозначим через $K_0(\tau)$ класс несмещенных оценок для $\tau = \tau(\theta)$.

Несмещенную оценку $\tau_0^* \in K_0(\tau)$ называют эффективной для параметрической функции $\tau = \tau(\theta)$, если на ней достигается нижняя граница в

$$\text{неравенстве Рао-Крамера (см.[4]), т.е. } D_\theta \tau_0^* = \frac{1}{n \cdot I(\theta)} \left(\frac{d\tau(\theta)}{d\theta} \right)^2.$$

Здесь $I(\theta)$ представляет собой информационное количество Фишера:

$$I(\theta) = -E_\theta \frac{d^2}{d\theta^2} (\ln p_\theta(X_1)). \quad (4)$$

Наша цель заключается в нахождении параметрической функции $\tau = \tau(\theta)$, которая имеет несмещенную эффективную оценку. Результат формулируется следующим образом.

Теорема. В линейном случае модели (1) - (2) при $\rho \in (3, +\infty)$ оценка

$$\tau_0^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \text{ (выборочное среднее)} \quad (5)$$

является несмещенной эффективной оценкой параметрической функции

$$\tau(\theta) = E_\theta \xi. \quad (6)$$

2. Метод анализа. Введем два определения. Распределение $\{p_\theta(x)\}$ принадлежит однопараметрическому экспоненциальному классу, если оно допускает представление

$$p_\theta(x) = h(x) \exp \{A(\theta) \cdot T(x) + B(\theta)\}, \quad x = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где $h(x) > 0$, $A(\theta)$, $B(\theta)$ и $T(x)$ - конечные функции.

В [1] показано, что распределение (1) допускает представление (7) с

$$h(x) = \prod_{m=1}^x (1 - \frac{P_m}{m}), T(x) = x, A(\theta) = \ln \theta, B(\theta) = -\ln g(\theta), \theta \in (0, 1], \quad (8)$$

т.е. принадлежит однопараметрическому экспоненциальному классу.

Далее покажем, что параметрический класс распределений $P_\theta, \theta \in A \subset R^1 = (-\infty, +\infty)$ удовлетворяет условиям *регулярности* (R), если:

(R1) распределение $\{p_\theta\} \in P_\theta$ имеет *общий носитель* $N(\theta) \subset R^1$, т.е.

$p_\theta(N(\theta)) = 1$ (что равносильно независимости множества

$N(\theta) = \{x \in R^1 : p_\theta(x) > 0\}$ от параметра θ);

(R2) функция $p_\theta(x) \in P_\theta$ для всех x имеет *непрерывную* по $\theta \in A$ производную по θ ;

(R3) функция $I(\theta)$ (см. (4)) *непрерывна* по $\theta \in A$ и $0 < I(\theta) < +\infty$.

Метод доказательства *теоремы* заключается в применении к распределению $\{p_\theta(x)\}$ типа (1)-(2) следующего общего утверждения из [5].

Для того, чтобы при выполнении условия (R) $\{p_\theta\} \in P_\theta, \theta \in A$ имела единственную (с точностью до линейного преобразования) параметрическую функцию $\tau = \tau(\theta)$, для которой существует эффективная в классе несмещенных оценок оценка τ_0^* , необходима и достаточна принадлежность $\{p_\theta\}$ к однопараметрическому экспоненциальному классу. При этом

$$\tau(\theta) = - \left(\frac{\frac{dB(\theta)}{d\theta}}{\frac{dA(\theta)}{d\theta}} \right), \frac{dA(\theta)}{d\theta} \neq 0, \quad (9)$$

а ее эффективная оценка имеет вид $\tau_0^*(X^n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T(X_i)$.

В нашем случае, в силу (8), τ_0^* принимает форму (5), а

$$\tau(\theta) = \frac{\theta}{g(\theta)} \cdot \frac{dg(\theta)}{d\theta}, \theta \in (0, 1]. \quad (10)$$

Итак, для установления *теоремы* остается проверить справедливость условия (R) для распределения (1)-(2) и доказать, что (10) есть $E_\theta \xi$.

3. Вспомогательные вычисления. Покажем, что в условиях *теоремы* (6) и (10) совпадают и

$$E_\theta \xi^2 = \frac{\theta}{g(\theta)} \left\{ \theta \cdot \frac{d^2 g(\theta)}{d\theta^2} + \frac{dg(\theta)}{d\theta} \right\}, \theta \in (0, 1]. \quad (11)$$

Вначале, в связи с (1), покажем, что ряд

$$g(\theta) - 1 = \sum_{x \geq 1} \theta^x \prod_{m=1}^x \left(1 - \frac{\rho_m}{m}\right) \quad (12)$$

равномерно сходится при $\theta \in (0, 1]$, для чего, из-за возрастания $g(\theta)$ по θ ,

достаточно показать сходимость ряда $g(1) - 1 = \sum_{x \geq 1} \prod_{m=1}^x \left(1 - \frac{\rho_m}{m}\right)$. Используя

разложение $\ln(1 - x) = -\sum_{k \geq 1} (x^k / k)$, $x \in [-1, 1)$, получаем

$$g(1) - 1 = \sum_{x \geq 1} \exp \left\{ -\sum_{m=1}^x \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \left(\frac{\rho_m}{m}\right)^k \right\} < \sum_{x \geq 1} \exp \left\{ \sum_{m=1}^x \frac{\rho_m}{m} \right\}.$$

Так как последний ряд сходится одновременно с рядом (см. (3))

$$\sum_{x \geq 1} \exp \left\{ -\sum_{m=1}^x \frac{\rho}{m} \right\} = \sum_{x \geq 1} \frac{1}{x^\rho} < +\infty, \text{ то утверждение доказано.}$$

Дифференцируя теперь ряд (12) по θ , находим

$$\frac{dg(\theta)}{d\theta} = \sum_{x \geq 1} x \cdot \theta^{x-1} \prod_{m=1}^x \left(1 - \frac{\rho_m}{m}\right) = \frac{d(\theta)}{\theta} E_\theta \xi, \text{ откуда следует совпадение (6) и}$$

(10). При этом равномерная сходимость ряда, определяющего $E_\theta \xi$,

равносильна сходимости ряда $\sum_{x \geq 1} \frac{1}{x^{\rho-1}}$, что имеет место из-за $\rho \in (3, +\infty)$.

Дифференцируя ряд (12) по θ дважды, имеем

$$\frac{d^2 g(\theta)}{d\theta^2} = \sum_{x \geq 2} x \cdot (x-1) \theta^{x-2} \prod_{m=1}^x \left(1 - \frac{\rho_m}{m}\right) = \frac{g(\theta)}{\theta^2} E_\theta \xi (\xi - 1), \text{ откуда и из (6), (10)}$$

вытекает (11). При этом конечность $E_\theta \xi^2$ и дисперсии $D_\theta \xi$ равносильна

сходимости ряда $\sum_{x \geq 1} \frac{1}{x^{\rho-2}}$ при $\rho \in (3, +\infty)$.

Теперь покажем, что информационное количество Фишера (4) равно

$$I(\theta) = \theta^{-2} \cdot D_\theta \xi. \quad (13)$$

Из (1) $\ln p_\theta(x) = -\ln g(\theta) + x \ln \theta + \sum_{m=1}^x \ln \left(1 - \frac{\rho_m}{m}\right)$ при $x=1, 2, \dots$, откуда,

дифференцируя по θ , получаем

$$\frac{d \ln p_\theta(x)}{dx} = -\frac{1}{g(\theta)} \frac{dg(\theta)}{d\theta} + \frac{x}{\theta}, \quad x=1, 2, \dots \quad (14)$$

$$\text{Далее } \frac{d^2 \ln p_\theta(x)}{d\theta^2} = -\frac{1}{g(\theta)} \frac{d^2 g(\theta)}{d\theta^2} + \frac{1}{(g(\theta))^2} \left(\frac{dg(\theta)}{d\theta} \right)^2 - \frac{x}{\theta^2}, \quad x=1,2,\dots$$

$$\text{Отсюда и из (6), (11), (12) выводим } \frac{d^2 \ln p_\theta(x)}{d\theta^2} = \frac{1}{\theta^2} \{E_\theta \xi - D_\theta \xi - x\},$$

$x=1,2,\dots$

Из-за несмещенности оценки эти равенства означают, что верно (13).

4. Проверка условия (R). Так как в нашем случае $N(\theta) = \{0,1,2,\dots\}$, то (R1) выполнено.

$$\text{Далее из (15) имеем } \frac{d \ln p_\theta(x)}{dx} = -\frac{1}{\theta} \left(\frac{1}{g(\theta)} \sum_{x \geq 1} x \cdot \theta^{x-1} \prod_{m=1}^x \left(1 - \frac{\rho_m}{m}\right) - x \right).$$

Так как $\frac{dg(\theta)}{d\theta} < +\infty$ для всех $\theta \in (0,1]$ и $g(\theta) < +\infty$, то функции

$$\frac{d \ln p_\theta(x)}{dx}, \text{ а значит, и } \frac{dp_\theta(x)}{d\theta} \text{ непрерывны по } \theta \in (0,1], \text{ т.е. выполнено (R2).}$$

Наконец, $0 < I(\theta) = \theta^{-2} D\xi < +\infty$ и, согласно (6), (10) и (11), если

$$D_\theta \xi = E_\theta \xi^2 - (E_\theta \xi)^2 = \frac{\theta}{g(\theta)} \left\{ \theta \frac{d^2 g(\theta)}{d\theta^2} + \frac{dg(\theta)}{d\theta} - \frac{\theta}{g(\theta)} \left(\frac{dg(\theta)}{d\theta} \right)^2 \right\}, \quad \text{то}$$

$I(\theta)$ непрерывно, т.е. выполнено (R3). Таким образом, к (1) применимо утверждение (9). Теорема доказана.

5. Оценка максимального правдоподобия. Оценкой максимального правдоподобия для параметра θ в модели (1)-(2) называется такая статистика θ , которая максимизирует (по θ) при фиксированной выборке

$$X^n = (X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (x^n = (x_1, \dots, x_n)) \text{ функцию правдоподобия } (\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i):$$

$$P_\theta(X^n) = \prod_{i=1}^n P_\theta(X_i) = \frac{1}{(g(\theta))^n} \theta^{n\bar{X}} \prod_{i=1}^n \prod_{m=1}^{x_i} \left(1 - \frac{\rho_m}{m}\right), \text{ т.е. } P_\theta(X^n) = \max_{\theta \in (0,1]} \prod_{i=1}^n P_\theta(X_i).$$

Согласно [4], эффективная оценка $\tau^* = \bar{X}$ параметрической функции

$$\tau(\theta) = \frac{\theta}{g(\theta)} \frac{dg(\theta)}{d\theta} \text{ (которая, в силу (6), есть } E_\theta \xi) \text{ совпадает с ее оценкой}$$

максимального правдоподобия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Саати Т. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. – М.: Сов. Радио, 1965. – 510 с.
2. Сенета В. Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 100 с.
3. Даниелян Э.А., Авагян Г.П. Об одном представлении правильно меняющихся распределений // Математика в высшей школе. – Ереван, 2008. – Т.4, № 3.
4. Боровков А.А. Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез – М.: Наука, 1984. – 472 с.
5. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика – М.: Высшая школа, 1984. – 248 с.

ЕрФИ. Материал поступил в редакцию 11.10.2008.

Կ.Կ. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ, Ը.Ը. ԻԳԻՅԱՆ

ԱԿՏՈՄԱՏԱԳՄԱՆ ՓՈՐՁԱՐԿՈՒՄՆԵՐԻ ԸԱՄԱՐ ԱՆՇԱՅՑ ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐԻ ԳՆԱՀԱՏՈՒՄ ԾՆՄԱՆ ԵՎ ՎԱԽՃԱՆՄԱՆ ՎԻՃԱԿԱԳՐԱԿԱՆ ՄՈԴԵԼՆԵՐՈՒՄ

Ցուցչային դասերի օգնությամբ ստացված են ավտոմատացման մոդելները նկարագրող ծնման և վախճանման գործընթացների անհայտ պարամետրերի անշեղելի և արդյունավետ գնահատականները:

Առանցքային բառեր. ավտոմատացման համակարգեր, ծնման և վախճանման գործընթաց, արդյունավետ գնահատականներ:

K.V. GASPARYAN, H.H. IGITYAN

STATISTICAL MODEL OF THE BIRTH-DEATH PROCESS FOR AUTOMATIZATION OF EXPERIMENTS

The unbiased effective estimators for the unknown parameter in models of automatization which are described by the birth-death processes are obtained with the help of the exponential class of distributions.

Keywords: automatization systems, birth-death process, effective estimators.