

Ս.Ա. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, Մ.Կ. ԴԱՐԱԽՉՅԱՆ, Ա.Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

**ՕՊՏԻՄԱԼ ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ ՎԱՐԻԱՑԻՈՆ ՀԱՇՎԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ
ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ՓՈՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ԳՆԱՀԱՏՈՒՄԸ ԱՐԳՈՒՄԵՆՏԻ ԵԶՐԱՅԻՆ
ԱՐԺԵՔԻ ՇԵՂՈՒՄՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ**

Մշակված է օպտիմալ կառավարման համակարգերում արգումենտի եզրային արժեքի շեղումների դեպքում ֆունկցիոնալի արժեքի փոփոխությունների աստիճանային շարքով գնահատման մեթոդ:

Առանցքային բառեր. օպտիմալ կառավարում, դինամիկա, եզրային պայմաններ, դիֆերենցիալ հավասարում, արդյունավետության ցուցանիշ, գնահատում, արգումենտ, ֆունկցիոնալ:

Ներածություն: Կառավարման նպատակի պարամետրերի շեղումներից կախված՝ կառավարման դինամիկ համակարգերում (ԿԴՀ) արդյունավետության ցուցանիշի (ՄՅ) փոփոխության գնահատման մաթեմատիկական ապարատն ունի գործնական նշանակություն համակարգերի հետազոտման, նախագծման և այլ աշխատանքներում: Գիտական աշխատանքում [1] մշակվել է ՄՅ-երի փոփոխության առաջին մոտավորությամբ գնահատման մեթոդ: Ուսումնասիրվում է ավտոնոմ համակարգերում մեկ անհայտ ֆունկցիայով ոչ պայմանական դինամիկ օպտիմալացման խնդիրների ՄՅ-ի փոփոխության գնահատումը՝ կախված արգումենտի աջակողմյան եզրի փոփոխությունից, աստիճանային շարքով՝ երկրորդ անդամի ճշտությամբ:

Մաթեմատիկական ապարատը: Ունենք ոչ պայմանական դինամիկ օպտիմալացման հետևյալ խնդիրը.

$$I = \int_{t_0}^t F(y(\tau), \dot{y}(\tau)) d\tau \rightarrow \min_y (\max), \quad (1)$$

$$\begin{cases} \tau = t_0, & y = y^0, \\ \tau = t, & y = y^t: \end{cases} \quad (2)$$

Օպտիմալ y ֆունկցիան կախված կլինի ինչպես ընթացիկ τ արգումենտից, այնպես էլ եզրային (2) պարամետրերից: Ենթադրվում է, որ t_0, y^0 և y^t եզրային պարամետրերը անփոփոխ են: Այդ դեպքում y ֆունկցիան կարելի է դիտարկել որպես երկու արգումենտի ֆունկցիա՝ $y = y(\tau, t)$:

Ֆունկցիոնալի օպտիմալ արժեքը կախված կլինի t արգումենտից և կարելի է ներկայացնել որպես $I(t)$ ֆունկցիա՝

$$I(t) = \int_{t_0}^t F(y(\tau, t), \dot{y}(\tau, t)) d\tau : \quad (3)$$

Ենթադրենք, ինչպես $y(\tau, t)$ -ն, այնպես էլ $F(y, \dot{y})$ ֆունկցիաները ունեն երկրորդ կարգի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ: Ֆունկցիոնալի $I(t)$ արժեքի ΔI փոփոխությունը, կախված t պարամետրի Δt փոփոխությունից, կարելի է ներկայացնել հետևյալ աստիճանային շարքի տեսքով՝ երկրորդ անդամի ճշտությամբ.

$$\Delta I = I(t + \Delta t) - I(t) = I_t(t) \cdot \Delta t + I_{tt}(t) \cdot \Delta t^2 / 2 + \alpha(\Delta t^2), \quad (4)$$

որտեղ $I_t(t) = \frac{\partial I(t)}{\partial t}$, $I_{tt}(t) = \frac{\partial^2 I(t)}{\partial t^2}$:

Ինչպես բխում է (4)-ից, ΔI փոփոխության գնահատման համար անհրաժեշտ է ունենալ $I_t(t)$ և $I_{tt}(t)$ գործակիցների արժեքները: Եզրային t պարամետրի Δt շեղման դեպքում $I(t + \Delta t)$ -ն (3)-ից կորոշվի հետևյալ արտահայտությամբ.

$$I(t + \Delta t) = \int_{t_0}^{t+\Delta t} F(y(\tau, t + \Delta t), \dot{y}(\tau, t + \Delta t)) d\tau : \quad (5)$$

Հետագա ձևափոխությունների ընթացքում նպատակահարմար է օգտվել հետևյալ նշանակումներից.

$$\begin{aligned} y(\tau, t) &= y; & \frac{dy}{d\tau} &= \dot{y}(\tau, t) = \frac{\partial y}{\partial \tau} = \dot{y}; & y(\tau, t)_{\tau=t} &= y(t); \\ \dot{y}(\tau, t)_{\tau=t} &= \dot{y}(t); & \frac{\partial F(y, \dot{y})}{\partial y} &= F_y; & \frac{\partial F(y, \dot{y})}{\partial \dot{y}} &= F_{\dot{y}} : \end{aligned} \quad (6)$$

(5)-ում բերված ենթաինտեգրալային արտահայտությունը երկրորդ անդամի մոտավորությամբ t արժեքի շրջակայքում վերածելով շարքի՝ կունենանք.

$$\begin{aligned} I(t + \Delta t) &= \int_{t_0}^{t+\Delta t} (F(y(\tau, t); \dot{y}(\tau, t)) + (F_y \frac{\partial y}{\partial t} + F_{\dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial t})_{\Delta t=0} \cdot \Delta t + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^t F_{yy} (\frac{\partial y}{\partial t})^2 + 2F_{y\dot{y}} \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial \dot{y}}{\partial t} + F_{\dot{y}\dot{y}} (\frac{\partial \dot{y}}{\partial t})^2 + F_y \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + F_{\dot{y}} \frac{\partial^2 \dot{y}}{\partial t^2})_{\Delta t=0} \cdot \Delta t^2 d\tau = (7) \\ &= \int_{t_0}^{t+\Delta t} M(\tau, t) d\tau + \alpha_1(\Delta t^2), \end{aligned}$$

որտեղ $\alpha_1(\Delta t^2)$ -ն աստիճանային շարքում Δt -ի երրորդ և ավելի բարձր կարգի անդամներն են: Օգտվելով ինտեգրալի սահմանների հատկությունից՝ ստացված արտահայտությունը կարելի է ներկայացնել ինտեգրալների գումարով՝

$$I(t + \Delta t) = \int_{t_0}^{t+\Delta t} M(\tau, t) d\tau + \int_{t_0}^t M(\tau, t) d\tau + \alpha_1(\Delta t^2) : \quad (8)$$

Օգտվելով Ադամսի ձևափոխված մեթոդից (սեղանների բանաձև) [2,3]՝ (8) –ում գումարի առաջին անդամն արտահայտենք Δt –ով՝ երկրորդ անդամի ճշտությամբ՝

$$\int_t^{t+\Delta t} M(\tau, t) d\tau = M(\tau, t)_{\tau=t} + \frac{1}{2} \frac{\partial M(\tau, t)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} \cdot \Delta t^2 + \alpha_2 (\Delta t^2): \quad (9)$$

Կիրառելով $y(\tau, t)$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալների միջև $\tau = t_0$ և $\tau = t$ եզրային կետերում [1] առնչությունները՝

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{\tau=t_0} &= 0; & \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_{\tau=t_0} &= 0; \\ \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{\tau=t} &= -\dot{y}(t); & (\ddot{y} + 2 \frac{\partial \dot{y}}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2})_{\tau=t} &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

հաշվի առնելով նաև (7)–ը և (8)–ը՝ (9) արտահայտությունը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\int_t^{t+\Delta t} M(\tau, t) d\tau = F_{\tau=t} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} (F_{\dot{y}} (2 \frac{\partial \dot{y}}{\partial t} + \ddot{y}) - \dot{y} F_{\dot{y}})_{\tau=t} \cdot \Delta t^2 + \alpha_2 (\Delta t^2): \quad (11)$$

Ձևափոխելով (8) արտահայտության երկրորդ գումարելին, կատարելով մասերով ինտեգրում, հաշվի առնելով (7)–ը, (10)–ը, (11) –ը և այն, որ $y(\tau, t)$ ֆունկցիան բավարարում է Էյլերի հավասարմանը՝ կունենանք ԱՅ –ի ΔI փոփոխության գնահատման հետևյալ արտահայտությունը.

$$\begin{aligned} \Delta I &= (F - \dot{y} F_{\dot{y}})_{\tau=t} \cdot \Delta t + (\dot{y}^2 F_{\dot{y}\dot{y}} - \dot{y} F_{\dot{y}})_{\tau=t} \cdot \Delta t^2 / 2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\int_{t_0}^t ((F_{\dot{y}\dot{y}} - \frac{d}{d\tau} F_{\dot{y}\ddot{y}}) (\frac{\partial y}{\partial t})^2 + F_{\dot{y}\ddot{y}} (\frac{\partial \dot{y}}{\partial t})^2) d\tau \right) \cdot \Delta t^2 + \alpha (\Delta t^2), \end{aligned} \quad (12)$$

որտեղ $\alpha(\Delta t^2)$ –ն աստիճանային շարքում բարձր կարգի անդամներն են:

Ստացված (12) օրինաչափության մեջ, նկատի ունենալով (4) –ը, $I_t(t)$ և $I_{tt}(t)$ գործակիցները կորոշվեն հետևյալ արտահայտություններով.

$$\begin{aligned} I_t &= (F - \dot{y} F_{\dot{y}})_{\tau=t}, \\ I_{tt} &= (\dot{y}^2 F_{\dot{y}\dot{y}} - \dot{y} F_{\dot{y}})_{\tau=t} + \int_{t_0}^t ((F_{\dot{y}\dot{y}} - \frac{d}{d\tau} F_{\dot{y}\ddot{y}}) (\frac{\partial y}{\partial t})^2 + F_{\dot{y}\ddot{y}} (\frac{\partial \dot{y}}{\partial t})^2) d\tau: \end{aligned} \quad (13)$$

Քանի որ $y(\tau, t)$ ֆունկցիան (1,2) խնդրի լուծումն է, ապա (13)–ում այդ ֆունկցիայի ածանցյալների $\dot{y}(t)$ և $\ddot{y}(t)$ արժեքները հայտնի են, սակայն $\frac{\partial y(\tau, t)}{\partial t}$ և

$\frac{\partial \dot{y}(\tau, t)}{\partial t}$ ֆունկցիաները, որոնք անհրաժեշտ են (13) գործակիցների որոշման համար, խնդրի՝ թվային մեթոդներով լուծման դեպքում հայտնի չեն: Այդ ֆունկցիաները կարելի է որոշել այն դատողությունից, որ, բացի $y(\tau, t)$ ֆունկցիայից, Էյլերի հավասարումը տեղի ունի նաև $y(\tau, t + \Delta t)$ ֆունկցիայի համար՝ կամայական Δt աճի դեպքում: Էյլերի հավասարումը վերածելով աստիճանային շարքի ըստ $t + \Delta t$ արգումենտի t

արժեքի շրջակայքում և հաշվի առնելով այդ հավասարման տեղի ունենալու հանգամանքը անկախ Δt -ից՝ կունենանք առաջին աստիճանի վարիացիայի հետևյալ երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումը՝ $\frac{\partial y}{\partial t}$ -ի նկատմամբ.

$$(F_{yy} - \frac{d}{d\tau} F_{y\dot{y}}) \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{d}{d\tau} F_{\dot{y}\dot{y}} \cdot \frac{\partial \dot{y}}{\partial t} - F_{\dot{y}\dot{y}} \cdot \frac{\partial \ddot{y}}{\partial t} = 0 :$$

Ստացված հավասարումը կարևոր է նաև այլ խնդիրների լուծման դեպքում, ուստի ընդհանրությունն ապահովելու համար այն նպատակահարմար է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$(F_{yy} - \frac{d}{d\tau} F_{y\dot{y}}) y_{1t} - \frac{d}{d\tau} F_{\dot{y}\dot{y}} \cdot \dot{y}_{1t} - F_{\dot{y}\dot{y}} \cdot \ddot{y}_{1t} = 0, \quad (14)$$

որտեղ

$$y_{1t} = y_{1t}(\tau, t) = \frac{\partial y(\tau, t)}{\partial t}, \quad \dot{y}_{1t} = \dot{y}_{1t}(\tau, t) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right), \quad \ddot{y}_{1t} = \ddot{y}_{1t}(\tau, t) = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right):$$

Երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ (14) հավասարումից կարելի է գտնել $y_{1t}(\tau, t)$ ֆունկցիան՝ (10)-ից բխող հետևյալ նախնական պայմանների դեպքում.

$$\begin{aligned} \tau = t_0, \quad y_{1t} &= 0; \\ \tau = t, \quad y_{1t} &= -\dot{y}(t): \end{aligned} \quad (15)$$

Այսպիսով, արդյունավետության ցուցանիշի արժեքի փոփոխությունը (4) արտահայտությամբ գնահատելու համար անհրաժեշտ է.

- Տրված t -ի դեպքում հայտնի y ֆունկցիայի միջոցով լուծել վարիացիայի (14) հավասարումը՝ (15) նախնական պայմանների դեպքում:
- Ունենալով $y_t(\tau, t)$, $\dot{y}_t(\tau, t)$ և $y(\tau, t)$ ֆունկցիաները՝ (13) -ից որոշել (4) արտահայտության $I_t(t)$ և $I_{tt}(t)$ գործակիցների թվային արժեքները:
- Տրված Δt շեղման դեպքում (4) կամ (12) արտահայտություններով որոշել ΔI փոփոխությունը կամ հակառակը. տրված ΔI -ի դեպքում որոշել Δt հնարավոր շեղումը արգումենտի եզրային t արժեքից:

Ներկայացված մեթոդը նախատեսված չէ այն խնդիրների համար, որոնցում էյլերի հավասարումը լուծվում է անալիտիկորեն, որովհետև այդ դեպքերում գնահատումը կարելի է կատարել ուղղակիորեն: Այն դեպքերում, երբ էյլերի հավասարումը հնարավոր է լուծել միայն թվային մեթոդներով, նախընտրելի է հոդվածում մշակված մեթոդը, որովհետև ցանկացած այլ մեթոդ, որը հնարավորություն կտա ստանալ (4)-ին համարժեք արտահայտություն, մի քանի անգամ աշխատատար է առաջարկված մեթոդից:

Մշակված (12) և (13) արտահայտությունների հավաստիությունը կարելի է հիմնավորել օրինակով:

Օրինակ Արդյունավետության ցուցանիշի արժեքի փոփոխությունը, կախված արգումենտի t եզրային արժեքի Δt փոփոխությունից, գնահատենք ինչպես ուղղակի մեթոդով՝ հաշվելով (3) ինտեգրալը և այն վերածելով աստիճանային շարքի ըստ t պարամետրի Δt շեղման, այնպես էլ հոդվածում մշակված մեթոդով, և արդյունքները համեմատենք հետևյալ խնդրի դեպքում.

$$I = \int_0^t (4y + \dot{y}^2) d\tau \rightarrow \min_y, \quad (16)$$

$$\begin{cases} \tau = 0, & y = 0, \\ \tau = t, & y = y^t: \end{cases} \quad (17)$$

$y(\tau, t)$ օպտիմալ ֆունկցիան կորոշենք էյլերի հավասարումից [4],

$$F_y - \frac{d}{d\tau} F_{\dot{y}} = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{y}(\tau, t) = 2:$$

Հաշվի առնելով (17) եզրային պայմանները՝ արդյունքում կունենանք՝

$$y(\tau, t) = \tau^2 + (y^t - t^2) \cdot \tau / t, \quad (18)$$

$$\dot{y}(\tau, t) = 2 \cdot \tau + (y^t - t^2) / t:$$

Այդ դեպքում ֆունկցիոնալի $I(t)$ արտահայտությունը (16)-ից կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$I(t) = -t^3/3 + 2 \cdot y^t \cdot t + (y^t)^2/t: \quad (19)$$

Ստացված (19) հավասարումից, արգումենտի եզրային t արժեքի Δt շեղման դեպքում, $I(t + \Delta t)$ -ն վերածելով շարքի t կետի շրջակայքում՝ կունենանք՝

$$\Delta I(t) = (2 \cdot y^t - t^2 - (y^t)^2/t^2) \cdot \Delta t + ((y^t)^2/t^3 - t) \cdot \Delta t^2 + \alpha(\Delta t^2):$$

Արդյունքում, հաշվի առնելով (4) -ը, $I_t(t)$ և $I_{tt}(t)$ գործակիցները, կորոշվեն հետևյալ արտահայտություններով.

$$\begin{cases} I_t(t) = 2y^t - t^2 - (y^t)^2/t^2, \\ I_{tt}(t) = 2 \cdot (y^t)^2/t^3 - 2t: \end{cases} \quad (20)$$

Այժմ $I_t(t)$ և $I_{tt}(t)$ գործակիցները որոշենք հոդվածում մշակված մեթոդով, ըստ (13)-ի՝ օգտվելով $y(\tau, t)$ ֆունկցիայի (18) արտահայտությունից: Առաջին աստիճանի վարիացիայի (14) հավասարումը (16,17) խնդրի դեպքում կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\ddot{y}_{1t} = 0: \quad (21)$$

Ուսումնասիրվող խնդրի դեպքում (21) դիֆերենցիալ հավասարման նախնական պայմանները համաձայն (18) -ի, կլինեն՝

$$\tau = 0, \quad y_{1t} = 0;$$

$$\tau = t, \quad y_{1t} = -\dot{y}(t) = -(t + y^t/t):$$

Դիֆերենցիալ (21) հավասարման լուծումից կունենանք՝

$$y_{1t}(\tau, t) = -(1 + y^t/t^2) \cdot \tau: \quad (22)$$

Ստացված (22) ֆունկցիայի հիման վրա (13) արտահայտության $I_{tt}(t)$ գործակցի ինտեգրալային բաղադրիչը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\int_0^t 2 \cdot (1 + \frac{y^t}{t^2})^2 d\tau = 2 \cdot (1 + \frac{y^t}{t^2})^2 \cdot t, \quad (23)$$

քանի որ (16) ֆունկցիոնալի դեպքում տեղի ունի $F_{yy} = 0, F_{y\dot{y}} = 0, F_{\dot{y}\dot{y}} = 2:$

Այսպիսով, հաշվի առնելով (16), (18) և (23) արտահայտությունները, $I_t(t)$ և $I_{tt}(t)$ գործակցիցների արժեքների համար, ըստ (13) -ի, կունենանք հետևյալ արդյունքը.

$$\begin{cases} I_t(t) = (F - \dot{y}F_{\dot{y}})_{\tau=t} = (4y + \dot{y}^2 - \dot{y} \cdot 2\dot{y})_{\tau=t} = (4y - \dot{y}^2)_{\tau=t} = \\ = 2y^t - t^2 - (y^t)^2/t^2, \\ I_{tt}(t) = (-4\dot{y})_{\tau=t} + 2 \cdot (1 + y^t/t^2)^2 \cdot t = 2 \cdot (y^t)^2/t^3 - 2t, \end{cases} \quad (24)$$

որը համընկնում է ուղղակի մեթոդով հաշվարկների (20) արդյունքների հետ:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. **Саакян С.А.** Оценка изменения показателей эффективности в динамических системах управления // Вестник Инженерной академии Армении. - 2005.-Т.2, N1. - С. 131-134.
2. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
3. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. Т1.– М.: Наука, 1974.– 480 с.
4. **Петров Ю.П.** Вариационные методы теории оптимального управления. – Л.: Энергия, 1977. – 220 с.

ՀՊՃՀ. Նյութը ներկայացվել է խմբագրություն 18.04.2008.

С.А. СААКЯН, М.К. ДАРАХЧЯН, А.С. СААКЯН

**ОЦЕНКА ИЗМЕНЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛА В ЗАДАЧАХ ВАРИАЦИОННОГО
ИСЧИСЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ОТКЛОНЕНИЯХ
ГРАНИЧНОГО ЗНАЧЕНИЯ АРГУМЕНТА**

Разработан метод оценки изменения функционала степенным рядом в системах оптимального управления при изменениях граничного значения аргумента.

Ключевые слова: оптимальное управление, динамика, граничные условия, дифференциальное уравнение, показатель эффективности, оценка, аргумент, функционал.

S.A. SAHAKYAN, M.K. DARAKHCHYAN, A.S. SAHAKYAN

**FUNCTIONAL DEVIATION ESTIMATION IN OPTIMAL CONTROL VARIATION
CALCULUS TASKS UNDER DEVIATION OF BOUNDARY VALUE ARGUMENT**

A method of evaluating the functional value change with power series in optimal control systems under the change of boundary value argument is developed.

Keywords: optimal control, dynamics, boundary conditions, differential equation, efficiency index, evaluation, argument, functional.