ISSN 0002-306X. Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2008. Т. LXI, № 3.

УДК 621.52+511.52

АВТОМАТИЗАЦИЯ И
СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

С.О. СИМОНЯН, А.Г. АВЕТИСЯН, А.С. СИМОНЯН

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОБОБЩЕННЫХ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ [I]

Предложен простой метод определения параметрических обобщенных обратных матриц на основе дифференциальных преобразований Г. Е. Пухова.

Ключевые слова: параметрические обобщ¸нные обратные матрицы, дифференциальные преобразования, численно-аналитические решения.

Введение. Обобщенные обратные матрицы широко используются в различных областях научных и практических исследований. Для определения обобщ¸нных обратных числовых матриц известно множество методов [1-3]. В то же время для определения обобщ¸нных обратных параметрических матриц основным подходом является метод замороженных коэффициентов (МЗК) [4], обладающий невысокой точнотью вычислений [5], и методы определения обобщенных обратных матриц только для частных случаев (в основном для полиномиальных матриц [6-8]). В последнее время для решения рассматриваемой задачи разработан ряд методов, основанных на дифференциальных преобразованиях [9], и для каждого из них получены соответствующие вычислительные характеристики, позволяющие осуществлять их обоснованный выбор при решении конкретных задач [10-15]. В настоящей работе предлагается новый численно-аналитический метод определения обобщ¸нных обратных параметрических матриц, отличающийся от вышеупомянутых методов сравнительной простотой при его машинной реализации и достаточно высокой точностью.

Математический аппарат. Пусть по аналогии свойств обобщ¸нных обратных числовых матриц $X_{n\,x\,m}$ при матрицах $A_{m\,x\,n}$ [1,2] имеют место следующие условия Мура-Пенроуза для параметрических матриц $X(t)_{n\,x\,m}$ (где параметр t, в частном случае, может быть временем) при матрицах $A(t)_{m\,xn}$:

$$A(t)\cdot X(t)\cdot A(t)=A(t), \tag{1}$$

$$X(t)\cdot A(t)\cdot X(t)=X(t), \tag{2}$$

$$(A(t)\cdot X(t))^{*}=A(t)\cdot X(t), \tag{3}$$

$$(X(t)\cdot A(t))^{*}=X(t)\cdot A(t), \tag{4}$$

где знак * означает комплексное сопряжение и транспонирование. Ясно, что при действительных параметрических, в частности неавтономных матрицах $A(t)$, знак * заменяется знаком транспонирования ^{T}.

По аналогии со свойствами обобщенных обратных числовых матриц [2], параметрическая обобщенная обратная матрица называется:

а) g-обратной для $A(t)$ (обозначается через $A^{-}(t)$), если выполняется условие (1);

б) рефлексивной g-обратной для $A(t)$ (обозначается через $A_R^{-}(t)$), если выполняются условия (1) и (2);

в) g-обратной со свойством наименьших квадратов (обозначается через $A_L^{-}(t)$), если выполняются условия (1) и (3);

г) g-обратной со свойством минимальной нормы (обозначается через $A_M^{-}(t)$), если выполняются условия (1) и (4);

д) g-обратной Мура-Пенроуза для $A(t)$ (обозначается через $A^{+}(t)$), если выполняются условия (1) - (4).

Тогда для матриц $A(t)$ и $X(t)$ может иметь место одно из следующих парных условий:

$$A(t)\cdot X(t)=E_{m\,x\,m},\, X(t)\cdot A(t)=E_{n\,x\,n} \tag{5}$$

(при этом, очевидно, $m=n$ и, следовательно, $X(t)\equiv A^{-1}(t)$),

$$A(t)\cdot X(t)=E_{m\,x\,m},\, X(t)\cdot A(t)\neq E_{n\,x\,n}; \tag{6}$$

$$A(t)\cdot X(t)\neq E_{m\,x\,m},\, X(t)\cdot A(t)=E_{n\,x\,n}; \tag{7}$$

$$A(t)\cdot X(t)\neq E_{m\,x\,m},\, X(t)\cdot A(t)\neq E_{n\,x\,n}. \tag{8}$$

Для построения искомой параметрической обобщ¸нной обратной матрицы $X(t)$ при центре аппроксимации t_v воспользуемся дифференциальными преобразованиями [9]

$$X(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{\partial^K x(t)}{\partial t^K}\bigg|_{t=t_\upsilon},\quad K=\overline{0,\infty} \quad \doteq \quad x^D(t)=\aleph\big(t,t_v,H,X(K)\big), \tag{9}$$

где $X(K)$– изображение (дискрета) оригинала $x(t)$– функция целочисленного аргумента $K=\overline{0,\infty}$; H - некоторая постоянная (масштабный коэффициент), которая вводится с целью выравнивания размерностей слагаемых оригинала и обеспечения возможности их суммирования; $\doteq$ – знак перехода из области оригиналов в область изображений и наоборот; $\aleph(\cdot)$ – некоторая функция, обусловливающая восстановление оригинала $x(t)$.

I. В основе предлагаемого метода сначала положим исходное соотношение (2), т.е.

$$X(t)\cdot A(t)\cdot X(t)=X(t). \tag{10}$$

С учетом условий (5)-(8) рассмотрим следующие четыре возможных случая, оперируя в каждом конкретном случае для определения матричных дискрет $X(K), K=\overline{0,\infty}$ обобщенных обратных матриц $X(t)$ (кроме первого случая) нормальными псевдорешениями [2] соответствующих матричных линейных алгебраических систем.

Случай 1. Пусть при $t = t_v$ имеют место условия, порождаемые (5), т.е.

$$A(t_v)\cdot A^{-1}(t_v) = A(0)\cdot X(0) = E_{m\,x\,m},\quad A^{-1}(t_v)\cdot A(t_v) = X(0)\cdot A(0) = E_{n\,x\,n}, \quad (11)$$

где $A(0)$ - нулевая матричная дискрета матрицы $A(t)$ при K=0, а $X(0) \equiv A^{-1}(0)$ - нулевая матричная дискрета обратной матрицы $A^{-1}(t)$. Тогда из (10) имеем:

при K=0:

$$X(0) = X(0)\cdot A(0)\cdot X(0) = X(0)\cdot F(0)_I\cdot X(0) \equiv X(A(0);X(0)) = X(0)_I; \quad (12)$$

при K=1:

$$\cancel{X(1)} = X(0)\cdot A(1)\cdot X(0) + \underbrace{X(0)\cdot A(0)}_{E_{n\times n}}\cdot \cancel{X(1)} + X(1)\cdot \underbrace{A(0)\cdot X(0)}_{E_{m\times m}},$$

откуда с учетом (11):

$$X(1) = -X(0)\cdot A(1)\cdot X(0) = X(0)\cdot F(1)_I\cdot X(0) \equiv X(A(1);X(0)) = X(1)_I; \quad (13)$$

при K=2:

$$\cancel{X(2)} = X(0)\cdot A(2)\cdot X(0) + X(0)\cdot A(1)\cdot X(1) + \underbrace{X(0)\cdot A(0)}_{E_{n\times n}}\cdot \cancel{X(2)} +$$
$$+ \cancel{X(1)\cdot A(0)\cdot X(1)} + \cancel{X(1)\cdot A(1)\cdot X(0)} + X(2)\cdot \underbrace{A(0)\cdot X(0)}_{E_{n\times n}},$$

откуда с учетом (11) и (13):

$$X(2) = X(0)\cdot[-A(2) + A(1)\cdot X(0)\cdot A(1)]\cdot X(0) =$$
$$= X(0)F(2)_I X(0) \equiv X(A(1), A(2); X(0)) = X(2)_I; \quad (14')$$

при K=3:

$$\cancel{X(3)} = X(0)\cdot A(3)\cdot X(0) + X(0)\cdot A(2)\cdot X(1) + \cancel{X(0)\cdot A(1)\cdot X(2)} +$$
$$+ X(1)\cdot A(2)\cdot X(0) + X(1)\cdot A(1)\cdot X(1) + \cancel{X(1)\cdot A(0)\cdot X(2)} +$$
$$+ \cancel{X(2)\cdot A(1)\cdot X(0)} + \cancel{X(2)\cdot A(0)\cdot X(1)} + X(3)\cdot \underbrace{A(0)\cdot X(0)}_{E_{m\times m}} +$$
$$+ \underbrace{X(0)\cdot A(0)}_{E_{n\times n}}\cdot \cancel{X(3)},$$

откуда с учетом (11), (13) и (14):

$$X(3) = X(0)\cdot[-A(3) + A(2)\cdot X(0)\cdot A(1) + A(1)\cdot X(0)\cdot A(2) -$$
$$- A(1)\cdot X(0)\cdot A(1)\cdot X(0)\cdot A(1)]\cdot X(0) = X(0)\cdot F(3)_I\cdot X(0) \equiv \quad (15)$$
$$\equiv X(A(1),\ldots,A(3);X(0)) = X(3)_I;$$

....

при K=K:

$$X(K)=\sum_{\substack{p=0,q=0,r=0\\p+q+r=K}}^{p=K,q=K,r=K} X(p)\cdot A(q)\cdot X(r)= -\sum_{\substack{p=0,q=0,r=0\\p+q+r=K}}^{p=K-1,q=K,r=K-1} X(p)\cdot A(q)\cdot X(r)= \tag{16}$$
$$= X(0)\cdot F(K)_I\cdot X(0)\equiv X(A(1),\ldots,A(K);X(0))=X(K)_I.$$

Пример 1. Пусть [16]

$$A(t)=\begin{bmatrix}(1-t) & (1+2t) & (2+3t) & 1\\ t & (1-t) & t^2 & t\\ t^3 & (t+6) & (2+t^2) & (2-t)\\ (1-t) & (1+2t^2) & (2+t) & (1-t)\end{bmatrix},$$

а $t_\nu=1$. Тогда имеем следующие матричные дискреты для матрицы $A(t)$:

$$A(0)=\begin{bmatrix}0&3&5&1\\1&0&1&1\\1&7&3&1\\0&3&3&0\end{bmatrix},\quad A(1)=\begin{bmatrix}-1&2&3&0\\1&-1&2&1\\3&1&2&-1\\-1&4&1&-1\end{bmatrix}\cdot H,\quad A(2)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\3&0&1&0\\0&2&0&0\end{bmatrix}\cdot H^2,$$

$$A(3)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\cdot H^3,\ A(K)=[0],\forall K\ge 4.$$

В соответствии с рекуррентными процедурами (11)-(16) получим следующие матричные дискреты для параметрической обобщенной обратной матрицы $X(t)$:

$$X(0)=\begin{bmatrix}-1&1.2&-0.2&1.466666\\0&-0.2&0.2&-0.133333\\0&0.2&-0.2&0.466666\\1&-0.4&0.4&-1.933333\end{bmatrix},$$

$$X(1)=\begin{bmatrix}0.2&0.213333&-0.346666&-0.213333\\0.8&-0.746666&0.213333&-1.253333\\-0.8&1.213333&-0.346666&1.120000\\0.6&-2.826666&1.093333&-1.506666\end{bmatrix}\cdot H,$$

$$X(2)=\begin{bmatrix} -2.186666 & 2.165333 & -0.752000 & 3.301333 \\ 0.653333 & -1.578666 & 0.632000 & -1.221333 \\ -1.186666 & 1.432000 & -0.685333 & 2.034666 \\ 4.973333 & -4.357333 & 1.797333 & -7.576000 \end{bmatrix}\cdot H^2,$$

$$X(3)=\begin{bmatrix} -2.061333 & 3.991470 & -1.546130 & 3.839640 \\ 2.714670 & -2.903470 & 1.178130 & -4.172090 \\ -2.794670 & 4.298130 & -1.586130 & 4.532980 \\ 5.896000 & -11.753600 & 4.436270 & -10.508600 \end{bmatrix}\cdot H^3$$

и т.д. Для восстановления матричного оригинала $X(t)\equiv A^{-1}(t)$ при использовании обратных дифференциально-падеевских (ДП) преобразований [9] и $K=\overline{0,50}$ результаты вычислений с точностью до 10^{-16} совпадают с результатами, полученными в [16] методом Фаддеева (из-за сложности аналитических выражений элементов матрицы $X(t)$ здесь они не приводятся; при необходимости читатель может обратиться к работе [16]).

Случай 2. Пусть при $t=t_\nu$ имеют место условия, порождаемые (6), т.е.

$$A(t_\nu)\cdot X(t_\nu)=A(0)\cdot X(0)=E_{m\,x\,m},\quad X(t_\nu)\cdot A(t_\nu)=X(0)\cdot A(0)\neq E_{n\,x\,n} \qquad (17)$$

(здесь и далее во всех соотношениях + – знак псевдообращения). Тогда:

при K=0: условие (12) остается в силе, ибо, исходя из условий (12) и (17) и из того факта, что для любой матрицы A имеет место условие $\left[A^+A\right]^+=A^+A$ (см. [3], стр. 50), получим

$$\begin{aligned} X(0)&=[X(0)\cdot A(0)]^+\cdot X(0)=[X(0)\cdot A(0)]^+\cdot X(0)_I=[X(0)\cdot A(0)]\cdot X(0)_I=\\ &=X(0)\cdot F(0)\quad\cdot X(0)\equiv X(A(0);X(0))=X(0)_{II}=A^+(0); \end{aligned} \qquad (18)$$

при K=1: из условия (13) с учетом (17), аналогично (18) :

$$\begin{aligned} X(1)&=-[X(0)\cdot A(0)]^+\cdot X(0)\cdot A(1)\cdot X(0)=[X(0)\cdot A(0)]^+\cdot X(1)_I=\\ &=[X(0)\cdot A(0)]\cdot X(1)_I=X(0)\cdot F(1)_{II}\cdot X(0)\equiv X(A(1);X(0))=\\ &=X(1)_{II}=X(1)_I; \end{aligned} \qquad (19)$$

при K=2: из условия (14) с учетом (17)- (19), аналогично (18):

$$\begin{aligned} X(2)&=-[X(0)\cdot A(0)]^+\cdot[X(0)\cdot A(2)\cdot X(0)+X(0)\cdot A(1)\cdot X(1)+\\ &+X(1)\cdot A(0)\cdot X(1)+X(1)\cdot A(1)\cdot X(0)]=\\ &=[X(0)\cdot A(0)]^+\cdot X(2)_I=[X(0)\cdot A(0)]\cdot X(2)_I=X(0)\cdot F(2)_{II}\cdot X(0)\equiv\\ &\equiv X(A(1),(2);X(0))=X(2)_{II}=X(2)_I; \end{aligned} \qquad (20)$$

при K=3: из условия (15) с учетом (17)- (20), аналогично (18):

$$
\begin{aligned}
X(3) = -[X(0)\cdot A(0)]^{+}\cdot [X(0)\cdot A(3)\cdot X(0) + X(0)\cdot A(2)\cdot X(1) + \\
+ X(0)\cdot A(1)\cdot X(2) + X(1)\cdot A(2)\cdot X(0) + X(1)\cdot A(1)\cdot X(1) + \\
+ X(1)\cdot A(0)\cdot X(2) + X(2)\cdot A(1)\cdot X(0) + X(2)\cdot A(0)\cdot X(1)] = \\
= [X(0)\cdot A(0)]^{+}\cdot X(3)_{I} = [X(0)\cdot A(0)]\cdot X(3)_{I} = X(0)\cdot F(3)_{II}\cdot X(0) \equiv \\
\equiv X(A(1),\ldots,A(3); X(0)) = X(3)_{II} = X(3)_{I};
\end{aligned}
\tag{21}
$$

....

при K=K: по аналогии с (19)-(21) нормальное псевдорешение :

$$
\begin{aligned}
X(K) = \sum_{\substack{p=0,q=0,r=0\\ p+q+r=K}}^{p=K,q=K,r=K} X(p)\cdot A(q)\cdot X(r) = [X(0)\cdot A(0)]^{+}\cdot \left[-\sum_{\substack{p=0,q=0,r=0\\ p+q+r=K}}^{p=K-1,q=K,r=K-1} X(p)\cdot A(q)\cdot X(r) \right] = \\
= [X(0)\cdot A(0)]^{+}\cdot X(K)_{I} = [X(0)\cdot A(0)]\cdot X(K)_{I} = \underbrace{X(0)\cdot A(0)\cdot X(0)}_{X(0)}\cdot F(K)_{I}\cdot X(0) = \\
= X(0)\cdot F(K)_{I}\cdot X(0) \equiv X(A(1),\ldots,A(K); X(0)) = X(K)_{II} = X(K)_{I}.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Пример 2. Пусть

$$
A(t) = \begin{bmatrix} (t-1) & t^{2} & 0 & t \\ 0 & t & 0 & 1 \\ 0 & (t-1) & 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

а $t_{\nu} = 0$. Тогда имеем следующие матричные дискреты для матрицы $A(t)$:

$$
A(0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\; A(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot H,\; A(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot H^{2},
$$

$$
A(K) = [0], \forall K \geq 3.
$$

В соответствии с рекуррентными процедурами (17)-(22) получим следующие матричные дискреты для параметрической обобщенной обратной матрицы $X(t)$:

$$
X(0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\; X(K) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot H^{K}, K \geq 1.
$$

Следовательно, обратные ДП-преобразования приводят к следующему матричному оригиналу:

$$X(t)=\begin{bmatrix} -\frac{1}{1-t} & \frac{t}{1-t} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{1-t} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{t}{1-t} \end{bmatrix} \equiv A^{+}(t).$$

<u>Случай 3.</u> Пусть при $t=t_v$ имеют место условия, порождаемые (7), т.е.

$$A(t_v)\cdot X(t_v)=A(0)\cdot X(0)\neq E_{m\,x\,m},\quad X(t_v)\cdot A(t_v)=X(0)\cdot A(0)=E_{n\,x\,n}. \quad (23)$$

Тогда:

при K=0: условие (12) остается в силе, ибо, исходя из условий (12) и (23) и из того факта, что для любой матрицы A, естественно, имеет место и условие $\left[AA^{+}\right]^{+}=AA^{+}$, получим

$$\begin{aligned} X(0)&=X(0)\cdot[A(0)\cdot X(0)]^{+}=X(0)_{I}\cdot[A(0)\cdot X(0)]^{+}=X(0)_{I}\cdot[A(0)\cdot X(0)]= \\ &=X(0)\cdot F(0)_{III}\cdot X(0)\equiv X(A(0);X(0))=X(0)_{III}=X(0)_{II}=A^{+}(0); \end{aligned} \quad (24)$$

при K=1: из условия (13) с учетом (23), аналогично (24):

$$\begin{aligned} X(1)&=-X(0)\cdot A(1)\cdot X(0)\cdot[A(0)\cdot X(0)]^{+}=X(1)_{I}\cdot[A(0)\cdot X(0)]^{+}= \\ &=X(1)_{I}\cdot[A(0)\cdot X(0)]=X(0)\cdot F(1)_{III}\cdot X(0)\equiv X(A(1);X(0))= \\ &=X(1)_{III}=X(1)_{II}=X(1)_{I}; \end{aligned} \quad (25)$$

при K=2: из условия (14) с учетом (24), (25), аналогично (24):

$$\begin{aligned} X(2)&=-[X(0)\cdot A(2)\cdot X(0)+X(0)\cdot A(1)\cdot X(1)+ \\ &+X(1)\cdot A(0)\cdot X(1)+X(1)\cdot A(1)\cdot X(0)]\cdot[A(0)\cdot X(0)]^{+}= \\ &=X(2)_{I}\cdot[A(0)\cdot X(0)]^{+}=X(2)_{I}\cdot[A(0)\cdot X(0)]= \\ &=X(0)\cdot F(2)_{III}\cdot X(0)\equiv X(A(1),A(2);X(0))=X(2)_{III}=X(2)_{II}=X(2)_{I}; \end{aligned} \quad (26)$$

при K=3: из условия (15) с учетом (24)-(26), аналогично (24):

$$\begin{aligned} X(3)&=-[X(0)\cdot A(3)\cdot X(0)+X(0)\cdot A(2)\cdot X(1)+X(0)\cdot A(1)\cdot X(2)+ \\ &+X(1)\cdot A(2)\cdot X(0)+X(1)\cdot A(1)\cdot X(1)+X(1)\cdot A(0)\cdot X(2)+ \\ &+X(2)\cdot A(1)\cdot X(0)+X(2)\cdot A(0)\cdot X(1)]\cdot[A(0)\cdot X(0)]^{+}= \\ &=X(3)_{I}\cdot[A(0)\cdot X(0)]^{+}=X(3)_{I}\cdot[A(0)\cdot X(0)]=X(0)\cdot F(3)_{III}\cdot X(0)\equiv \\ &\equiv X(A(1),\ldots,A(3);X(0))=X(3)_{III}=X(3)_{II}=X(3)_{I}; \end{aligned} \quad (27)$$

....

при K=K: по аналогии с (24)-(27) нормальное псевдорешение:

$$X(K)=\sum_{\substack{p=0,q=0,r=0\\p+q+r=K}}^{p=K,q=K,r=K} X(p)\cdot A(q)\cdot X(r)=\left[\;-\sum_{\substack{p=0,q=0,r=0\\p+q+r=K}}^{p=K-1,q=K,r=K-1} X(p)\cdot A(q)\cdot X(r)\right]\cdot[A(0)\cdot X(0)]^{+}=$$
$$=X(K)_{I}\cdot[A(0)\cdot X(0)]^{+}=X(K)_{I}\cdot[A(0)\cdot X(0)]=X(0)\cdot F(K)_{I}\cdot\underbrace{X(0)\cdot A(0)\cdot X(0)}_{X(0)}\equiv \quad (28)$$
$$=X(0)\cdot F(K)_{III}\cdot X(0)\equiv X(A(1),\ldots,A(K);X(0))=X(K)_{III}=X(K)_{II}=X(K)_{I}.$$

Пример 3. Пусть [14]

$$A(t)=\begin{bmatrix}\dfrac{(1+t^2)}{(1+t^2+t^4)} & -\dfrac{t}{(1+t^2+t^4)}\\ \dfrac{t^3}{(1+t^2+t^4)} & \dfrac{1}{(1+t^2+t^4)}\\ \dfrac{(-t^2)}{(1+t^2+t^4)} & \dfrac{(t+t^3)}{(1+t^2+t^4)}\end{bmatrix},$$

а $t_{\nu}=0$. Тогда имеем следующие матричные дискреты для матрицы $A(t)$:

$$A(0)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix},\ A(1)=\begin{bmatrix}0&-1\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\cdot H,\ A(2)=\begin{bmatrix}0&0\\0&-1\\-1&0\end{bmatrix}\cdot H^2,\ldots \text{ и т.д.}$$

В соответствии с рекуррентными процедурами (23)-(28) получим следующие матричные дискреты для параметрической обобщенной обратной матрицы $X(t)$:

$$X(0)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\ X(1)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ X(K)=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\cdot H^K, K\geq 2.$$

Следовательно, обратные дифференциально-маклореновские (ДМ) преобразования [9] приводят к следующему матричному оригиналу:

$$X(t)=\begin{bmatrix}1&t&0\\0&1&t\end{bmatrix}\equiv A^{+}(t).$$

<u>**Случай 4.**</u> Пусть при $t=t_{\nu}$ имеют место условия, порождаемые (8), т.е.

$$A(t_{\nu})\cdot X(t_{\nu})=A(0)\cdot X(0)\neq E_{m\,x\,m},\quad X(t_{\nu})\cdot A(t_{\nu})=X(0)\cdot A(0)\neq E_{n\,x\,n}. \quad (29)$$

Тогда:

при K=0: условие (12) остается в силе, т.е.

$$X(0)=[X(0)\cdot A(0)]^{+}\cdot X(0)=X(0)\cdot[A(0)\cdot X(0)]^{+}=X(0)\cdot A(0)\cdot X(0)=$$
$$=X(0)\cdot F(0)_{IV}\cdot X(0)\equiv X(A(0);X(0))=X(0)_{IV}=X(0)_{III}=X(0)_{II}=A^{+}(0); \quad (30)$$

при K=1:   в соответствии с (10) и (29)

$$X(1)=X(0)\cdot A(1)\cdot X(0)+X(0)\cdot A(0)\cdot X(1)+X(1)\cdot A(0)\cdot X(0),$$

откуда

$$X(1)\cdot\underbrace{A(0)\cdot X(0)}_{\neq E_{m\times m}}=X(1)-X(0)\cdot A(1)\cdot X(0)-\underbrace{X(0)\cdot A(0)}_{\neq E_{n\times n}}\cdot X(1)$$

или

$$\begin{aligned}X(1)&=[X(1)-X(0)\cdot A(1)\cdot X(0)-X(0)\cdot A(0)\cdot X(1)]\cdot[A(0)\cdot X(0)]^{+}=\\&=[X(1)-X(0)\cdot A(1)\cdot X(0)-X(0)\cdot A(0)\cdot X(1)]\cdot A(0)\cdot X(0)=\\&=X(1)\cdot A(0)\cdot X(0)-X(0)\cdot A(1)\cdot\underbrace{X(0)\cdot A(0)\cdot X(0)}_{X(0)}-X(0)\cdot A(0)\cdot X(1)\cdot A(0)\cdot X(0)=\\&=X(1)\cdot A(0)\cdot X(0)-X(0)\cdot A(1)\cdot X(0)-X(0)\cdot A(0)\cdot X(1)\cdot A(0)\cdot X(0),\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}&X(1)\cdot[A(0)\cdot X(0)]^{+}=X(\cancel{1)\cdot A(0)}\cdot X(0)=\\&=X(1)\cdot A(0)\cdot\underbrace{X(0)\cdot A(0)\cdot X(0)}_{X(0)}-X(0)\cdot A(1)\cdot\underbrace{X(0)\cdot A(0)\cdot X(0)}_{X(0)}-X(0)\cdot A(0)\cdot X(1)=\\&=X(\cancel{1)\cdot A(0)}\cdot X(0)-X(0)\cdot A(1)\cdot X(0)-X(0)\cdot A(0)\cdot X(1)\end{aligned}$$

или

$$X(0)\cdot A(0)\cdot X(1)=-X(0)\cdot A(1)\cdot X(0),$$

откуда

$$\begin{aligned}X(1)&=-[X(0)\cdot A(0)]^{+}\cdot X(0)\cdot A(1)\cdot X(0)=\\&=\underbrace{X(0)\cdot A(0)\cdot X(0)}_{X(0)}\cdot A(1)\cdot X(0)=-X(0)\cdot A(1)\cdot X(0)\equiv\\&\equiv X(A(1);X(0))=X(1)_{IV}=X(1)_{III}=X(1)_{II}=X(1)_{I};\end{aligned}\qquad(31)$$

при K=2:   в соответствии с (10), (29) и (31)

$$\begin{aligned}X(2)&=X(0)\cdot A(2)\cdot X(0)+X(0)\cdot A(1)\cdot X(1)+X(0)\cdot A(0)\cdot X(2)+\\&+X(1)\cdot A(0)\cdot X(1)+X(1)\cdot A(1)\cdot X(0)+X(2)\cdot A(0)\cdot X(0),\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}X(2)\cdot A(0)\cdot X(0)&=X(2)-X(0)\cdot A(2)\cdot X(0)-X(0)\cdot A(1)\cdot X(1)-\\&-X(0)\cdot A(0)\cdot X(2)-X\cancel{(1)\cdot A(0)\cdot X(}1)-X\cancel{(1)\cdot A(1)\cdot X(}0),\end{aligned}$$

или

$$
\begin{aligned}
X(2) = {} & [X(2) - X(0)\cdot A(2)\cdot X(0) + X(0)\cdot A(1)\cdot X(0)\cdot A(1)\cdot X(0) - \\
& - X(0)\cdot A(0)\cdot X(2)]\cdot[A(0)\cdot X(0)]^{+} = X(2)\cdot A(0)\cdot X(0) - \\
& - X(0)\cdot A(2)\cdot \underbrace{X(0)\cdot A(0)\cdot X(0)}_{X(0)} + \\
& + X(0)\cdot A(1)\cdot X(0)\cdot A(1)\cdot \underbrace{X(0)\cdot A(0)\cdot X(0)}_{X(0)} - X(0)\cdot A(0)\cdot X(2)\cdot A(0)\cdot X(0) = \\
& = X(2)\cdot A(0)\cdot X(0) - X(0)\cdot A(2)\cdot X(0) + X(0)\cdot A(1)\cdot X(0)\cdot A(1)\cdot X(0) - \\
& - X(0)\cdot A(0)\cdot X(2)\cdot A(0)\cdot X(0),
\end{aligned}
$$

откуда

$$
\begin{aligned}
& X(2)\cdot[A(0)\cdot X(0)]^{+} = X(2)\cdot \cancel{A(0)\cdot X(0)} = X(2)\cdot \cancel{A(0)\cdot \underbrace{X(0)\cdot A(0)\cdot X(0)}_{X(0)}} - \\
& - X(0)\cdot A(2)\cdot \underbrace{X(0)\cdot A(0)\cdot X(0)}_{X(0)} + X(0)\cdot A(1)\cdot X(0)\cdot A(1)\cdot \underbrace{X(0)\cdot A(0)\cdot X(0)}_{X(0)} - \\
& - X(0)\cdot A(0)\cdot X(2)\cdot A(0)\cdot \underbrace{X(0)\cdot A(0)\cdot X(0)}_{X(0)}
\end{aligned}
$$

или

$$
\begin{aligned}
X(0)\cdot A(0)\cdot X(2)\cdot A(0)\cdot X(0) = {} & -X(0)\cdot A(2)\cdot X(0) + \\
& + X(0)\cdot A(1)\cdot X(0)\cdot A(1)\cdot X(0),
\end{aligned}
$$

откуда

$$
\begin{aligned}
X(2) = {} & [X(0)\cdot A(0)]^{+}\cdot(-X(0)\cdot A(2)\cdot X(0) + X(0)\cdot A(1)\cdot X(0)\cdot A(1)\cdot X(0))[A(0)\cdot X(0)]^{+} = \\
& = -\underbrace{X(0)\cdot A(0)\cdot X(0)}_{X(0)}\cdot A(2)\cdot \underbrace{X(0)\cdot A(0)\cdot X(0)}_{X(0)} + \\
& + \underbrace{X(0)\cdot A(0)\cdot X(0)}_{X(0)}\cdot A(1)\cdot X(0)\cdot A(1)\cdot \underbrace{X(0)\cdot A(0)\cdot X(0)}_{X(0)} = \\
& = -X(0)\cdot A(2)\cdot X(0) + X(0)\cdot A(1)\cdot X(0)\cdot A(1)\cdot X(0) \equiv X(A(1), A(2); X(0)) = \\
& = X(2)_{IV} = X(2)_{III} = X(2)_{II} = X(2)_{I} \qquad (32)
\end{aligned}
$$

и т.д.

Пример 4 [8]. Для этой тестовой матрицы с размерами 11×11 имеют место условия (29). Как показали расчеты, полученное на основе соотношений (30)-(32) решение $A^{+}(t)$ точно совпадает с решением, полученным в [8] другим методом (из-за громоздкости матричных дискрет и решения $X(t)$ они здесь не приводятся). Очевидно, что во всех четырех случаях, вне зависимости от выполнения условий (5)-(8), для вычисления матричных дискрет $X(K), K = \overline{0,\infty}$ необходимо оперировать полностью совпадающимися друг с другом соотношениями (16), (22) или (28). Восстановление матричного оригинала - численно-аналитического решения $X(t)$ в соответствии с некоторым обратным дифференциальным преобразованием, естественнно, не представит трудности.

Примечание. Легко можно убедиться, что для рассмотренных примеров выполняются как парные условия (5),(11); (6),(17); (7),(23); (8), (29) соответственно, так и все условия (1)-(4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц.-М.: Наука, 1967.-575с.
2. **Грегори Р., Кришнамурти Е.** Безошибочные вычисления. Методы и приложения. – М.: Мир, 1988. – 208с.
3. **Ben-Israel A., Greville T.N.** E. Generalized Inverses Theory and Applications. –A Wiley-Interscience Publication, 2002. –371p.
4. **Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.** Математическая теория конструирования систем управления.-М.: Высшая школа, 1998.-571с.
5. **Батков А.М.** Современные методы проектирования систем автоматического управления. -М., 1967.-704с.
6. **Karampetakis N.P., Tzekis P.** On the Computation of the Generalized Inverse of a Polynomial Matrix //IMA J. Math. Control Inform. – 2001. –Vol. 18, No. 1. –P. 83-97.
7. **Karampetakis N.P., Vologiannidis S.** DFT Calculation of the Generalized and Drazin Inverse of a Polynomial Matrix //Applied Mathematics and Computation. –2003. –Vol. 143. –P. 501-521.
8. **Stanimirovic P.S., Tasic M. B., Krtolica P.V., Karampetakis N.P.** Generalized Inversion by Interpolation //Filomat. –2007. –Vol. 21, No. 1. –P. 67-86.
9. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные спектры и модели.-Киев: Наукова думка, 1990.- 230 с.
10. **Бадалян Л.А.** Матричный аппроксимационный синтез неавтономных псевдообратных матриц // Сб. мат. Межд. молодежной конф. “Информационные технологии”.-Ереван, 2005.- С. 127-132.
11. **Симонян С.О., Бадалян Л.А.** Аналоги для определения неавтономных псевдообратных матриц на основе метода ортогонализации Грамма-Шмидта и дифференциальных преобразований Пухова //Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2006. –Т LIX, N2. -С.406-417.
12. **Симонян С.О., Бадалян Л.А.** Дифференциально-тейлоровский аналог метода блочного разбиения для определения неавтономных псевдообратных матриц // Вестник Инженерной академии Армении.-2005.-Т.2, N1.-С.109-116.
13. **Симонян С.О., Бадалян Л.А.** Дифференциально-тейлоровский аналог метода Гревилля для неавтономных матриц //Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН.-2005.- Т. LVIII, N2. – С.340-353.
14. **Симонян С.О., Бадалян Л.А.** Метод сингулярного разложения неавтономных матриц на основе дифференциальных преобразований //Вестник ГИУА. Сер. Моделирование, оптимизация, управление. -2005.-Вып.8, том 2.- С.120-133.
15. **Симонян С.О., Бадалян Л.А.** Определение неавтономных псевдообратных матриц на основе метода исключения Жордана-Гаусса и дифференциальных преобразований Пухова // Вестник ГИУА. Сер. Моделирование, оптимизация, управление. -2005.-Вып.9, том 2.- С.128-137.
16. **Բադալյան Գ.Ա.** Ոչ ավտոնոմ համակարգերի մի քանի ինվարիանտների որոշման մեթոդների մշակումն ու հաշվողական գործընթացների ավտոմատացումը //Ե.13.02 - □Ավտոմատացման համակարգեր□ մասնագիտությամբ տեխնիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության սեղմագիր. - Երևան, 2006. -21 էջ:

ГИУА. Материал поступил в редакцию 11.012008.

Ս.Հ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ, Ա.Գ. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ, Ա.Ս. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՄԵԹՈԴ [I]

Առաջարկված է պարամետրական ընդհանրացված-հակադարձ մատրիցների որոշման հասարակ մեթոդ՝ հիմնված Գ.Ե. Պուխովի դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա:

Առանցքային բառեր. պարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրիցներ, դիֆերենցիալ ձևափոխություններ, թվա-անալիտիկ լուծումներ:

S.H. SIMONYAN, A.G. AVETISSYAN, A.S. SIMONYAN

METHOD OF DETERMINATION OF PARAMETRIC GENERALIZED INVERSE MATRICES [I]

A simple method of the parametric generalized inverse matrices determination based on G.E. Pukhov's differential transformations is proposed.

Keywords: parametric generalized inverse matrices, differential transformations, numerical-analytical solutions.