

А.М. АРЗУМАНЯН

## К МЕТОДУ РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В РЕЖУЩЕЙ ПЛАСТИНЕ И ОБРАБАТЫВАЕМОЙ ДЕТАЛИ

Рассмотрены дифференциальные уравнения теплопередачи при исследовании процесса температурных полей режущего инструмента и обрабатываемого материала в случае тонкой прерывистой обработки цветных металлов и сплавов. Дифференциальные уравнения теплопроводности совместно с начальными и граничными условиями решаются численным методом. Заменяя дифференциальные операторы уравнений теплопроводности разностными операторами и решая разностные уравнения теплопроводности, можно определить температуры в любых точках режущей пластины и обработанной детали в любой момент времени.

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение, температурное поле, режущая пластина, цветные металлы, математическая модель.

Обеспечение высокого качества деталей из цветных металлов и сплавов, точность размеров и высокая производительность являются актуальной задачей обработки материалов резанием, для которых требуется изучение температурных полей как в режущей пластине, так и в обрабатываемой детали.

Поверхностный слой обрабатываемого материала при тонкой прерывистой обработке цветных металлов и сплавов находится под воздействием внешних сил и температур, изменяющихся достаточно быстро во времени. Влияние того или иного фактора зависит от режимов и условий обработки.

Математическая модель процесса теплопередачи для каждого элемента пары инструмент–деталь основана на обобщенном законе сохранения энергии [1].

В качестве режущего инструмента применяется однозубая фреза, оснащенная пластинкой из синтетического корунда, а в качестве обрабатываемой детали - заготовка из цветных металлов. Однозубая фреза совершает вращательное движение с угловой скоростью  $\omega$ , а также движение подачи, а обрабатываемая деталь неподвижна. На рисунке показана схема обработки и расположения осей для расчета локальных температур в режущей пластине и обрабатываемой детали.

В основу расчета температурных полей в режущей пластине и обрабатываемой детали положено дифференциальное уравнение теплопроводности [2]:

- для режущей пластины:

$$\frac{\partial T_p}{\partial \tau} = \frac{\lambda_p}{c_p \rho_p} \left( \frac{\partial^2 T_p}{\partial x_p^2} + \frac{\partial^2 T_p}{\partial y_p^2} + \frac{\partial^2 T_p}{\partial z_p^2} \right) + \omega_p \cdot R \left( \frac{\partial T_p}{\partial x_p} + \frac{\partial T_p}{\partial y_p} + \frac{\partial T_p}{\partial z_p} \right) + \frac{1}{c_p \rho_p} Q_p; \quad (1)$$

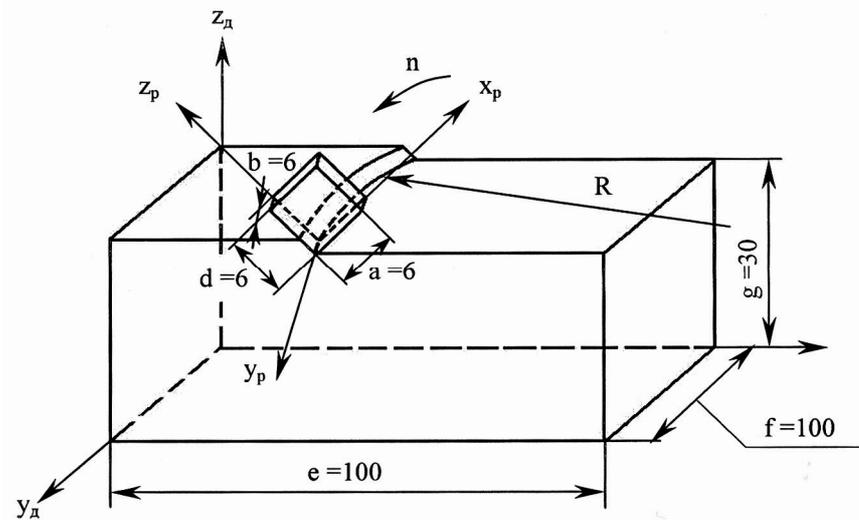


Рис. Схема обработки заготовки из цветного металла режущей пластиной из синтетического корунда и расположения осей для расчета температурных полей

- для обрабатываемой детали:

$$\frac{\partial T_d}{\partial \tau} = \frac{\lambda_d}{c_d \rho_d} \left( \frac{\partial^2 T_d}{\partial x_d^2} + \frac{\partial^2 T_d}{\partial y_d^2} + \frac{\partial^2 T_d}{\partial z_d^2} \right) + \frac{1}{c_d \rho_d} Q_d. \quad (2)$$

В уравнениях (1) и (2) приняты следующие индексы и обозначения: р – режущая пластина; д- обрабатываемая деталь;  $\lambda$  - коэффициент теплопроводности, Дж/кгК;  $\rho$  - плотность, кг/м<sup>3</sup>;  $\omega_p$  - угловая скорость вращения режущей пластины (угловая скорость перемещения источника теплоты), рад/с;  $\tau$  - время, с;  $x, y, z$  - декартовы координаты, м;  $R$  - радиус фрезерования, м;  $Q$  - мощность источника теплоты, Вт.м<sup>3</sup>;  $T$  - температура, К.

Дифференциальные уравнения теплопроводности решаются при следующих начальных и граничных условиях.

Начальное условие:

при  $\tau = 0$ ,  $T_p = T_d = T_o$ , где  $T_o$  - температура окружающей среды, К ( $T_o = 293$  К).

Граничные условия:

для режущей пластины:  $0 \leq x_p \leq a$ ,  $0 \leq y_p \leq b$ ,  $0 \leq z_p \leq d$ ,

$$\frac{\partial T_p(a, y_p, z_p, \tau)}{\partial x_p} = -\alpha_1 [T_p(a, y_p, z_p, \tau) - T_o], \quad (3)$$

$$\frac{\partial T_p(b, x_p, z_p, \tau)}{\partial y_p} = -\alpha_1 [T_p(b, x_p, z_p, \tau) - T_o], \quad (4)$$

$$\frac{\partial T_p(d, x_p, y_p, \tau)}{\partial z_p} = -\alpha_1 [T_p(d, x_p, y_p, \tau) - T_o], \quad (5)$$

где  $\alpha_1$  - коэффициент теплоотдачи от поверхностей режущей пластины к окружающей среде,  $Вт/м^2К$  (вынужденная конвекция);  $a, b, d$  - линейные размеры режущей пластины,  $м$ ;

- для обрабатываемой детали:

$$\frac{\partial T_d(e, y_d, z_d, \tau)}{\partial x_d} = -\alpha_2 [T_d(e, y_d, z_d, \tau) - T_o], \quad (6)$$

$$\frac{\partial T_d(f, x_d, z_d, \tau)}{\partial y_d} = -\alpha_2 [T_d(f, x_d, z_d, \tau) - T_o], \quad (7)$$

$$\frac{\partial T_d(g, x_d, y_d, \tau)}{\partial z_d} = -\alpha_2 [T_d(g, x_d, y_d, \tau) - T_o], \quad (8)$$

где  $\alpha_2$  - коэффициент теплоотдачи от поверхностей обрабатываемой детали в окружающую среду,  $Вт/м^2К$  (свободная конвекция);  $e, f, g$  - линейные размеры обрабатываемой детали,  $м$ .

Условие контакта на первом снимаемом с детали слое:

$$T_d(x_d, y_d)_{z=(g-n\Delta t)} = T_p(y_p)_{x_p=z_p=0},$$

где  $\Delta t$  - толщина снимаемого с детали слоя,  $мм$ .

Для первого слоя  $n=0$ , для второго  $n=1$  и т. д.

Условия теплообмена на бесконечности:

$$T_p(x_p, y_p, z_p)_{\rightarrow \infty} = T_o, \quad T_d(x_d, y_d, z_d)_{\rightarrow \infty} = T_d.$$

Коэффициент теплоотдачи  $\alpha_1$  определяется по следующей формуле [3]:

$$\alpha_1 = \frac{0,66 \cdot Re^{0,5} \cdot Pr^{0,43} \cdot \lambda}{a} \quad Вт/м^2К,$$

где  $Re = \frac{\omega \cdot R \cdot a}{\nu}$  - критерий Рейнольдса;  $\nu = 25 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/с$  - коэффициент

кинематической вязкости для воздуха;  $Pr = 0,69$  - критерий Прандтля;  $\lambda = 3,34 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/м}^2К$  - коэффициент теплопроводности воздуха.

Коэффициент теплоотдачи  $\alpha_2$  определяется по следующей формуле [3]

$$\alpha_2 = \frac{0,5(Gr \cdot Pr)^{0,25} \cdot \lambda}{e} \quad Вт/м^2К,$$

где  $Gr = \beta_t \frac{g \cdot e^3 \cdot \Delta T}{\nu^2}$ ,  $\beta_t = 1/293 [1/K]$  - коэффициент объемного расширения воздуха,  $\Delta T = (100...150) K$  - температурный перепад между поверхностью обрабатываемой детали и окружающей средой (воздухом);  $g = 9,81 м/с^2$  - ускорение свободного падения.

Мощности источников теплоты можно рассчитать по следующим формулам:

$$Q_p = \frac{Pz\omega R}{abd} \text{ Вт/м}^3, Q_{\dot{a}} = \frac{Pz\omega R}{efg} \text{ Вт/м}^3,$$

где  $Pz$  - сила резания, рассчитываемая по режимам резания,  $H$ .

Дифференциальные уравнения теплопроводности совместно с начальными и граничными условиями решаются численным методом.

Заменим дифференциальные операторы уравнений теплопроводности (1) и (2) разностными операторами [4]:

- для режущей пластины:

$$\begin{aligned} \frac{T_{m+1,i,j,k}^p - T_{m,i,j,k}^p}{\Delta\tau} = \frac{\lambda_p}{c_p \rho_p} & \left( \frac{T_{m,i+1,j,k}^p - 2T_{m,i,j,k}^p + T_{m,i-1,j,k}^p}{\Delta x_p^2} + \right. \\ & \left. + \frac{T_{m,i,j+1,k}^p - 2T_{m,i,j,k}^p + T_{m,i,j-1,k}^p}{\Delta y_p^2} + \frac{T_{m,i,j,k+1}^p - 2T_{m,i,j,k}^p + T_{m,i,j,k-1}^p}{\Delta z_p^2} \right) + \\ & + \omega_p R \left( \frac{T_{m,i+1,j,k}^p - T_{m,i,j,k}^p}{\Delta x_p} + \frac{T_{m,i,j+1,k}^p - T_{m,i,j,k}^p}{\Delta y_p} + \frac{T_{m,i,j,k+1}^p - T_{m,i,j,k}^p}{\Delta z_p} \right) + \frac{1}{c_p \rho_p} Q_p; \end{aligned} \quad (9)$$

- для обрабатываемой детали:

$$\begin{aligned} \frac{T_{m+1,i,j,k}^d - T_{m,i,j,k}^d}{\Delta\tau} = \frac{\lambda_d}{c_d \rho_d} & \left( \frac{T_{m,i+1,j,k}^d - 2T_{m,i,j,k}^d + T_{m,i-1,j,k}^d}{\Delta x_d^2} + \right. \\ & \left. + \frac{T_{m,i,j+1,k}^d - 2T_{m,i,j,k}^d + T_{m,i,j-1,k}^d}{\Delta y_d^2} + \frac{T_{m,i,j,k+1}^d - 2T_{m,i,j,k}^d + T_{m,i,j,k-1}^d}{\Delta z_d^2} \right) + \frac{1}{c_d \rho_d} Q_d. \end{aligned} \quad (10)$$

В разностных уравнениях (9) и (10) приняты следующие индексы моменты времени  $m$  и  $m+1$ ;  $i, i+1, i-1$  - точки на разностной сетке по оси  $x$ ;  $j, j+1, j-1$  - точки на разностной сетке по оси  $y$ ;  $k, k+1, k-1$  - точки на разностной сетке по оси  $z$ ;  $\Delta\tau$  - шаг по времени на разностной сетке;  $\Delta x, \Delta y$  и  $\Delta z$  - шаги соответственно по осям  $x, y$  и  $z$  на разностной сетке.

К разностному виду необходимо привести также и граничные условия (3) - (8):  
 - для режущей пластины:

$$\left( \frac{T_{m,i+1,j,k}^p - T_{m,i,j,k}^p}{\Delta x_p} \right) = -\alpha_1 (T_{m,i+1,j,k}^p - T_0), \quad (11)$$

$$\left( \frac{T_{m,i,j+1,k}^p - T_{m,i,j,k}^p}{\Delta y_p} \right) = -\alpha_1 (T_{m,i,j+1,k}^p - T_0), \quad (12)$$

$$\left( \frac{T_{m,i,j,k+1}^p - T_{m,i,j,k}^p}{\Delta z_p} \right) = -\alpha_1 (T_{m,i,j,k+1}^p - T_0); \quad (13)$$

- для обрабатываемой детали:

$$\left( \frac{T_{m,i+1,j,k}^d - T_{m,i,j,k}^d}{\Delta x_d} \right) = -\alpha_2 (T_{m,i+1,j,k}^d - T_0), \quad (14)$$

$$\left( \frac{T_{m,i,j+1,k}^d - T_{m,i,j,k}^d}{\Delta y_d} \right) = -\alpha_2 (T_{m,i,j+1,k}^d - T_0), \quad (15)$$

$$\left( \frac{T_{m,i,j,k+1}^d - T_{m,i,j,k}^d}{\Delta z_d} \right) = -\alpha_2 (T_{m,i,j,k+1}^d - T_0). \quad (16)$$

Решая разностные уравнения теплопроводности (9) и (10) совместно с разностными уравнениями граничных условий (10)-(16), при известных температурах  $T_{m,i,j,k}^p$  и  $T_{m,i,j,k}^d$  в начальный момент времени  $m$  в точках  $i, j, k$  относительно температур  $T_{m+1,i,j,k}^p$  и  $T_{m+1,i,j,k}^d$ , можно определить температуры в тех же точках в момент времени  $m + 1$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Спиридонов Ф.Ф., Фирсов А.М., Смирнов В.В.** Виртуальный лабораторный комплекс исследования тепловых процессов в технологических системах // Горизонты образования. – 1999. -№ 1. –<http://edu.secna.ru>.
2. **Каргашов Э.М.** Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 1985. – 480 с.
3. **Нащокин В.В.** Техническая термодинамика и теплопередача. –М.: Высшая школа,1969. –560 с.
4. **Тихонов А.Н.,Самарский А.А.** Уравнения математической физики.- М.:Наука, 1977.-736 с.

Гюмрийский филиал ГИУА. Материал поступил в редакцию 11.09.2007.

## Ա.Մ. ԱՐԶՈՒՄԱՆՅԱՆ

### ԿՏՏՈՂ ԹԻԹԵՂԻԿԻ ԵՎ ՄՇԱԿՎՈՂ ԴԵՏԱԼԻ ՋԵՐՄԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ԴԱՇՏԻ ՀԱՇՎԱՐԿԻ ՄՈՏԵՑՈՒՄ

Դիտարկվել են գունավոր մետաղների և համաձուլվածքների նուրբ ընդհատուն մշակման դեպքում կտրող գործիքի և մշակվող նյութի ջերմաստիճանային դաշտերի հետազոտման գործընթացում ջերմափոխանցման դիֆերենցիալ հավասարումները: Սկզբնական և եզրային պայմաններով ջերմափոխանցման դիֆերենցիալ հավասարումները որոշվում են թվային եղանակներով: Ջերմահաղորդականության հավասարումների դիֆերենցիալ օպերատորները փոխարինելով տարբերակող օպերատորներով և լուծելով ջերմահաղորդականության հավասարումները, կարելի է ժամանակի ցանկացած պահի կտրող գործիքի և մշակվող դետալի ցանկացած կետում որոշել ջերմաստիճանը:

**Առանցքային բառեր.** դիֆերենցիալ հավասարումներ, ջերմային դաշտ, կտրող թիթեղիկ, գունավոր մետաղներ, մաթեմատիկական մոդել:

## A.M. ARZUMANYAN

### THE METHOD OF APPROACH OF TEMPERATURE FIELD CALCULATION IN CUTTING PLATE AND DETAIL TO BE ELABORATED

Differential equations of heat transfer during the investigation process of temperature fields of cutting instrument and elaborating material at thin intermittent elaboration of non-ferrous metals and alloys are discussed. Differential equations of heat conduction with initial and boundary conditions are solved with the numeric method. Replaying the differential operations of heat conduction equations by solving difference operators and by solving difference heat conduction equations, we can define the cutting plate temperatures in different points and elaborated detail at any period of time.

**Keywords:** differential equations, heat field, cutting plate, mathematical model, non-ferrous metals.