ISSN 0002-306X. Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2008. Т. LXI, № 2.

УДК 681.326

АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

А.А. ТЕРЗЯН, Г.С. СУКИАСЯН, А.Э. АКОПЯН

К РАСЧЕТУ ТРЕХМЕРНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Получены и исследованы геометрические характеристики системы уравнений, возникающей при численном решении трехмерных нелинейных полевых задач методом конечных элементов. Доказано отрицательное влияние наличия в тетраэдрической сетке тупых углов на сходимость итерационного процесса. Дана оценка критического угла, при превышении которого задача расходится.

***Ключевые слова*:** электромагнитное поле, метод конечных элементов, трехмерные тетраэдрические сетки.

Введение. Сходимость процесса последовательных приближений при решении нелинейных полевых задач методом конечных элементов сильно зависит от конфигурации дискретизационной сетки. Задача построения оптимальной сетки становится особенно актуальной в последние годы, когда автоматическому построению сетки с динамической декомпозицией элементов дискретизации (см. [1]) отдается предпочтение перед ручным. Однако при построении сетки "вручную" опытный специалист интуитивно строит "красивую" сетку, тогда как недостаточно продуманный алгоритм автоматического построения сетки может привести к нежелательным элементам, которые могут стать причиной расходимости процесса.

Поэтому остро необходимо иметь математически обоснованные ограничения на геометрию сеток. Так, например, из практического опыта численного решения двумерных краевых задач замечено, что наличие в сетке тупоугольных треугольников отрицательно сказывается на сходимости процесса решения. В [2] дано строгое математическое обоснование этого явления и оценено критическое значение угла, при превышении которого задача расходится. В настоящей работе результаты, полученные в [2] для двумерных полевых задач, обобщены на трехмерный случай. Доказано отрицательное влияние на сходимость итерационного процесса наличия в тетраэдрической сетке тупых углов (как плоских, так и линейных). Здесь и далее под тетраэдром будем понимать произвольный четырехгранник (необязательно правильный).

Вывод уравнений для численного расчета трехмерных стационарных нелинейных магнитных полей методом конечных элементов с использованием вариационного исчисления был дан в [3]. В [4, 5] расчетные уравнения для двумерных магнитных полей методом конечных элементов получены и реализованы на основе вариационного подхода с использованием базисных функций. Этот подход имеет преимущество в том, что базисные функции легко обобщаются на многомерный случай.

В настоящей работе для выделения и исследования геометрических характеристик расчетные уравнения трехмерного поля получены и преобразованы с использованием понятия базисных функций.

Отметим важную особенность трехмерных полевых задач: в отличие от двумерных составляющие векторного магнитного потенциала зависят от выбора направления координатных осей. Следовательно, и расчетные уравнения для нахождения этих составляющих неявно зависят от направления координатных осей. В настоящей работе коэффициенты расчетной системы линейных уравнений разложены на сомножители, явно зависящие от направления координатных осей, и на сомножители, инвариантные относительно вращений. Показано, что сходимость итерационного процесса решения полевых задач зависит только от сомножителей второго типа, следовательно, не зависит от выбора направления координатных осей (хотя само решение зависит).

1. Численный расчет трехмерного поля методом конечных элементов. Постоянное магнитное поле, созданное электрическим током, подчиняется классическому уравнению Максвелла:

$$\mathrm{rot}\frac{1}{\mu}(\mathrm{rot}\vec{A}) = \delta.$$

В декартовой системе координат (x,y, z) уравнение Максвелла приобретает вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{1}{\mu}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}A^y - \dfrac{\partial}{\partial y}A^x\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{1}{\mu}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}A^z - \dfrac{\partial}{\partial z}A^x\right) = \delta^x, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{\mu}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}A^x - \dfrac{\partial}{\partial x}A^y\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{1}{\mu}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}A^z - \dfrac{\partial}{\partial z}A^y\right) = \delta^y, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{\mu}\left(\dfrac{\partial}{\partial z}A^x - \dfrac{\partial}{\partial x}A^z\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{1}{\mu}\left(\dfrac{\partial}{\partial z}A^y - \dfrac{\partial}{\partial y}A^z\right) = \delta^z, \end{cases} \quad (1)$$

где $A = (A^x, A^y, A^z)$ - векторный магнитный потенциал; $\delta = (\delta^x, \delta^y, \delta^z)$ - вектор плотности тока; μ - величина магнитной проницаемости.

Прямое решение системы (1) затруднительно из-за нелинейности задачи: величина магнитной проницаемости зависит от потенциала и тоже является неизвестной. В методе конечных элементов задача решения системы (1) заменяется вариационной, т.е. рассматривается некий функционал, минимум которого достигается точным решением уравнений (1). Затем с помощью метода базисных функций можно получить расчетные уравнения для минимизации функционала.

Докажем, что минимум следующего функционала достигается решением уравнения Максвелла (1):

$$F = \iiint_{\Omega}\left(f_x + f_y + f_z\right)dxdydz,$$

где Ω - рассматриваемая область и

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{1}{2\mu}\left[\left(\dfrac{\partial A^x}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial A^x}{\partial z}\right)^2 - \dfrac{\partial A^y}{\partial x}\dfrac{\partial A^x}{\partial y} - \dfrac{\partial A^z}{\partial x}\dfrac{\partial A^x}{\partial z}\right] - \delta^x A^x, \\ f_y = \dfrac{1}{2\mu}\left[\left(\dfrac{\partial A^y}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial A^y}{\partial z}\right)^2 - \dfrac{\partial A^y}{\partial x}\dfrac{\partial A^x}{\partial y} - \dfrac{\partial A^z}{\partial y}\dfrac{\partial A^y}{\partial z}\right] - \delta^y A^y, \\ f_z = \dfrac{1}{2\mu}\left[\left(\dfrac{\partial A^z}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial A^z}{\partial x}\right)^2 - \dfrac{\partial A^y}{\partial z}\dfrac{\partial A^z}{\partial y} - \dfrac{\partial A^z}{\partial x}\dfrac{\partial A^x}{\partial z}\right] - \delta^z A^z. \end{cases} \qquad (2)$$

Применим для составляющей по оси x известное из вариационного исчисления уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial(f_x + f_y + f_z)}{\partial\left(\dfrac{\partial A^x}{\partial x}\right)} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial(f_x + f_y + f_z)}{\partial\left(\dfrac{\partial A^x}{\partial y}\right)} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial(f_x + f_y + f_z)}{\partial\left(\dfrac{\partial A^x}{\partial z}\right)} - \frac{\partial(f_x + f_y + f_z)}{\partial A^x} = 0.$$

Из (2) имеем

$$\frac{\partial f_x}{\partial \dfrac{\partial A^x}{\partial x}} = 0, \quad \frac{\partial f_x}{\partial A^x} = -\delta^x,$$

$$\frac{\partial(f_x + f_y)}{\partial \dfrac{\partial A^x}{\partial y}} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial A^x}{\partial y} - \frac{\partial A^y}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial(f_x + f_z)}{\partial \dfrac{\partial A^x}{\partial z}} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial A^x}{\partial z} - \frac{\partial A^z}{\partial x}\right).$$

Остальные производные равны нулю. Подставляя их в уравнение Эйлера-Лагранжа, получим первое из уравнений (1). Остальные уравнения получаются аналогично перестановкой индексов x,y,z.

Дискретизируем задачу, разбив рассматриваемую область Ω на тетраэдры (элементы) и приняв, что внутри элемента e магнитная проницаемость μ постоянна, а потенциалы являются линейной функцией вида

$$A^x = \sum_{t \in W_e} A_t^x b_t^e(x,y,z), \quad A^y = \sum_{t \in W_e} A_t^y b_t^e(x,y,z), \quad A^z = \sum_{t \in W_e} A_t^z b_t^e(x,y,z), \qquad (3)$$

где $W_e = (i, j, k, m)$ - множество вершин элемента e; A_t - значение потенциала A в узле t; $b_t^e(x,y,z)$ - базисная функция, т.е. линейная функция, равная единице в узле t и нулю в остальных трех вершинах тетраэдра e.

Базисные функции удобно записать в виде детерминанта

$$b_k^e(x,y,z)=\frac{1}{3V_e}\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ x_j & y_j & z_j & 1\\ x_i & y_i & z_i & 1\\ x_m & y_m & z_m & 1\end{vmatrix}, \tag{4}$$

где (x_t, y_t, z_t)- декартовы координаты вершин тетраэдра, $t=(i,j,k,m)$; V_e - объем тетраэдра e:

$$3V_e=\begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i & 1\\ x_j & y_j & z_j & 1\\ x_k & y_k & z_k & 1\\ x_m & y_m & z_m & 1\end{vmatrix}.$$

Подставляя (3) в (2), получим

$$\begin{cases} f_x=\dfrac{1}{2\mu}\left[\left(\sum\limits_{t\in W_e}A_t^x\dfrac{\partial b_t^e}{\partial y}\right)^2+\left(\sum\limits_{t\in W_e}A_t^x\dfrac{\partial b_t^e}{\partial z}\right)^2\right]-\dfrac{1}{2\mu}\left[\left(\sum\limits_{t\in W_e}A_t^x\dfrac{\partial b_t^e}{\partial y}\right)\times\right.\\ \left.\times\left(\sum\limits_{t\in W_e}A_t^y\dfrac{\partial b_t^e}{\partial x}\right)+\left(\sum\limits_{t\in W_e}A_t^x\dfrac{\partial b_t^e}{\partial z}\right)\left(\sum\limits_{t\in W_e}A_t^z\dfrac{\partial b_t^e}{\partial x}\right)\right]-\delta^x\sum\limits_{t\in W_e}A_t^x b_t^e,\\ f_y=\dfrac{1}{2\mu}\left[\left(\sum\limits_{t\in W_e}A_t^y\dfrac{\partial b_t^e}{\partial x}\right)^2+\left(\sum\limits_{t\in W_e}A_t^y\dfrac{\partial b_t^e}{\partial z}\right)^2\right]-\dfrac{1}{2\mu}\left[\left(\sum\limits_{t\in W_e}A_t^x\dfrac{\partial b_t^e}{\partial y}\right)\times\right.\\ \left.\times\left(\sum\limits_{t\in W_e}A_t^y\dfrac{\partial b_t^e}{\partial x}\right)+\left(\sum\limits_{t\in W_e}A_t^z\dfrac{\partial b_t^e}{\partial y}\right)\left(\sum\limits_{t\in W_e}A_t^y\dfrac{\partial b_t^e}{\partial z}\right)\right]-\delta^y\sum\limits_{t\in W_e}A_t^y b_t^e,\\ f_z=\dfrac{1}{2\mu}\left[\left(\sum\limits_{t\in W_e}A_t^z\dfrac{\partial b_t^e}{\partial x}\right)^2+\left(\sum\limits_{t\in W_e}A_t^z\dfrac{\partial b_t^e}{\partial y}\right)^2\right]-\dfrac{1}{2\mu}\left[\left(\sum\limits_{t\in W_e}A_t^x\dfrac{\partial b_t^e}{\partial z}\right)\times\right.\\ \left.\times\left(\sum\limits_{t\in W_e}A_t^z\dfrac{\partial b_t^e}{\partial x}\right)+\left(\sum\limits_{t\in W_e}A_t^y\dfrac{\partial b_t^e}{\partial z}\right)\left(\sum\limits_{t\in W_e}A_t^z\dfrac{\partial b_t^e}{\partial y}\right)\right]-\delta^z\sum\limits_{t\in W_e}A_t^z b_t^e. \end{cases} \tag{5}$$

Система (5) является дискретным аналогом системы (2). Функционалы (2) зависят от неизвестных функций A^x, A^y, A^z, тогда как в (5) неизвестными являются числа A_t - значения потенциала A в узле t. Искомую систему уравнений получим, приравняв нулю соответствующие производные. Для фиксированного узла k имеем

$$\frac{\partial F}{\partial A_k^x} = \sum_{e \in E_k} \iiint_e \frac{\partial}{\partial A_k^x} \left(f_x + f_y + f_z \right) dxdydz = 0,$$

где $E_к$ - множество элементов e, содержащих узел k.

Из (5) получается

$$\frac{\partial f_x}{\partial A_k^x} = \frac{1}{2\mu} \left[2\left(\sum_{t \in W_e} A_t^x \frac{\partial b_t^e}{\partial y} \right) \frac{\partial b_k^e}{\partial y} + 2\left(\sum_{t \in W_e} A_t^x \frac{\partial b_t^e}{\partial z} \right) \frac{\partial b_k^e}{\partial z} - \right.$$
$$\left. - \left(\sum_{t \in W_e} A_t^y \frac{\partial b_t^e}{\partial x} \right) \frac{\partial b_k^e}{\partial y} - \left(\sum_{t \in W_e} A_t^z \frac{\partial b_t^e}{\partial x} \right) \frac{\partial b_k^e}{\partial z} \right].$$

Аналогично вычисляя остальные производные, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial A_k^x} = \sum\limits_{e \in E_k} \left[\nu_e \sum\limits_{t \in W_e} \left(a_{kt}^{xx} A_t^x - a_{kt}^{xy} A_t^y - a_{kt}^{xz} A_t^z \right) - \delta^x a_k^e \right] = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial A_k^y} = \sum\limits_{e \in E_k} \left[\nu_e \sum\limits_{t \in W_e} \left(a_{kt}^{yy} A_t^y - a_{kt}^{yx} A_t^x - a_{kt}^{yz} A_t^z \right) - \delta^y a_k^e \right] = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial A_k^z} = \sum\limits_{e \in E_k} \left[\nu_e \sum\limits_{t \in W_e} \left(a_{kt}^{zz} A_t^z - a_{kt}^{zx} A_t^x - a_{kt}^{zy} A_t^y \right) - \delta^z a_k^e \right] = 0, \end{cases} \qquad (6)$$

где ν_e - значение $\nu = 1/\mu$ внутри элемента e; a_{kt}^e - коэффициент взаимодействия вершины k с вершинами t в элементе e, причем

$$
\left\{
\begin{aligned}
&a_{kt}^{xx} = \iiint_e \left(\frac{\partial b_k^e}{\partial y} \frac{\partial b_t^e}{\partial y} + \frac{\partial b_k^e}{\partial z} \frac{\partial b_t^e}{\partial z} \right) dxdydz, \\
&a_{kt}^{xy} = \frac{1}{2} \iiint_e \frac{\partial b_k^e}{\partial y} \frac{\partial b_t^e}{\partial x} dxdydz, \\
&a_{kt}^{xz} = \frac{1}{2} \iiint_e \frac{\partial b_k^e}{\partial z} \frac{\partial b_t^e}{\partial x} dxdydz, \\
&a_{kt}^{yy} = \iiint_e \left(\frac{\partial b_k^e}{\partial x} \frac{\partial b_t^e}{\partial x} + \frac{\partial b_k^e}{\partial z} \frac{\partial b_t^e}{\partial z} \right) dxdydz, \\
&a_{kt}^{yx} = \frac{1}{2} \iiint_e \frac{\partial b_k^e}{\partial x} \frac{\partial b_t^e}{\partial y} dxdydz, \\
&a_{kt}^{yz} = \frac{1}{2} \iiint_e \frac{\partial b_k^e}{\partial z} \frac{\partial b_t^e}{\partial y} dxdydz, \\
&a_{kt}^{zz} = \iiint_e \left(\frac{\partial b_k^e}{\partial x} \frac{\partial b_t^e}{\partial x} + \frac{\partial b_k^e}{\partial y} \frac{\partial b_t^e}{\partial y} \right) dxdydz, \\
&a_{kt}^{zx} = \frac{1}{2} \iiint_e \frac{\partial b_k^e}{\partial x} \frac{\partial b_t^e}{\partial z} dxdydz, \\
&a_{kt}^{zy} = \frac{1}{2} \iiint_e \frac{\partial b_k^e}{\partial y} \frac{\partial b_t^e}{\partial z} dxdydz, \\
&a_k^e = \iiint_e b_k^e dxdydz.
\end{aligned}
\right.
\tag{7}
$$

В (6) внешнее суммирование осуществляется по множеству $E_к$ элементов, содержащих узел k, а внутреннее суммирование - по всем узлам i, j, k, m, содержащимся в элементе e. Таким образом, численный расчет трехмерного магнитного поля методом конечных элементов сводится к решению системы уравнений (6). Заметим, что для каждого узла k в (6) принимают участие только непосредственные соседи узла k. Таким образом, получается система уравнений с неизвестными A_k, причем количество уравнений равно количеству неизвестных и утроенному количеству некраевых узлов.

2. Принцип доминирования диагонали. Рассмотрим систему линейных уравнений относительно неизвестных $A_1,\ldots,A_N$ с матрицей коэффициентов (a_{ni}):

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ni} A_i = d_n, \quad n = 1,2,\ldots,N. \qquad (8)$$

Известен (см. [6]) достаточный признак сходимости итерационного процесса решения системы (8), называемый принципом доминирования диагонали: если диагональные элементы a_{nn} существенно превосходят недиагональные, то итерационный процесс решения системы (8) сходится. Рассмотрим разности

$$g_n = 1 - \frac{1}{|a_{nn}|} \sum_{i \neq n}^{N} |a_{ni}|, \quad n = 1,2,\ldots,N.$$

В соответствии с принципом доминирования диагонали, если для всех n величины g_n положительны, то итерационный процесс решения системы линейных уравнений (8) сходится при любом начальном приближении.

При численном решении системы уравнений используется понятие невязки. Под невязкой понимается максимальная разность двух последовательных приближений к решению. Если невязка стремится к нулю, то говорим, что процесс решения системы линейных уравнений сходится; если невязка стремится к бесконечности, то процесс решения расходится; если же невязка не имеет предела, то говорим, что процесс колеблется. Если величины g_n равны нулю или отрицательны, то в зависимости от начального приближения могут иметь место все три случая (сходимость, расходимость, колебательный процесс). При этом чем меньше величины g_n, тем сходимость менее вероятна.

3. Выделение геометрических характеристик системы расчетных уравнений. Преобразуем коэффициенты (7) так, чтобы выделить их геометрические характеристики. Из (4) получаем

$$\frac{\partial}{\partial z} b_j^e(x,y,z) = \frac{1}{3V_e} \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_m & y_m & 1 \end{vmatrix} = \frac{2S_{ikm}^z}{3V_e},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} b_j^e(x,y,z) = \frac{1}{3V_e} \begin{vmatrix} x_i & z_i & 1 \\ x_k & z_k & 1 \\ x_m & z_m & 1 \end{vmatrix} = \frac{2S_{ikm}^y}{3V_e},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} b_j^e(x,y,z) = \frac{1}{3V_e} \begin{vmatrix} y_i & z_i & 1 \\ y_k & z_k & 1 \\ y_m & z_m & 1 \end{vmatrix} = \frac{2S_{ikm}^x}{3V_e},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} b_k^e(x,y,z) = \frac{1}{3V_e}\begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \end{vmatrix} = \frac{2S_{ijm}^z}{3V_e},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} b_k^e(x,y,z) = \frac{1}{3V_e}\begin{vmatrix} x_i & z_i & 1 \\ x_j & z_j & 1 \\ x_m & z_m & 1 \end{vmatrix} = \frac{2S_{ijm}^y}{3V_e},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} b_k^e(x,y,z) = \frac{1}{3V_e}\begin{vmatrix} y_i & z_i & 1 \\ y_j & z_j & 1 \\ y_m & z_m & 1 \end{vmatrix} = \frac{2S_{ijm}^x}{3V_e},$$

где S_{ikm}^x (S_{ikm}^y, S_{ikm}^z) - площадь проекции треугольника с вершинами i, k, m на плоскость, перпендикулярную координатной оси x (соотв. y,z) (рис 1); S_{ijm}^x (S_{ijm}^y, S_{ijm}^z) - площадь проекции треугольника с вершинами i, j, m на плоскость, перпендикулярную координатной оси x (соотв. y,z). Согласно свойству проекции, имеем $S_{ikm}^z = S_{ikm}\cos\beta_{xy}^i$, $S_{ikm}^y = S_{ikm}\cos\beta_{xz}^i$, $S_{ikm}^x = S_{ikm}\cos\beta_{yz}^i$, где β_{xy}^i - угол между плоскостью треугольника с вершинами i, k, m и плоскостью xoy; β_{xz}^i - угол между плоскостью треугольника с вершинами i, k, m и плоскостью xoz; β_{yz}^i - угол между плоскостью треугольника с вершинами i, k, m и плоскостью yoz.

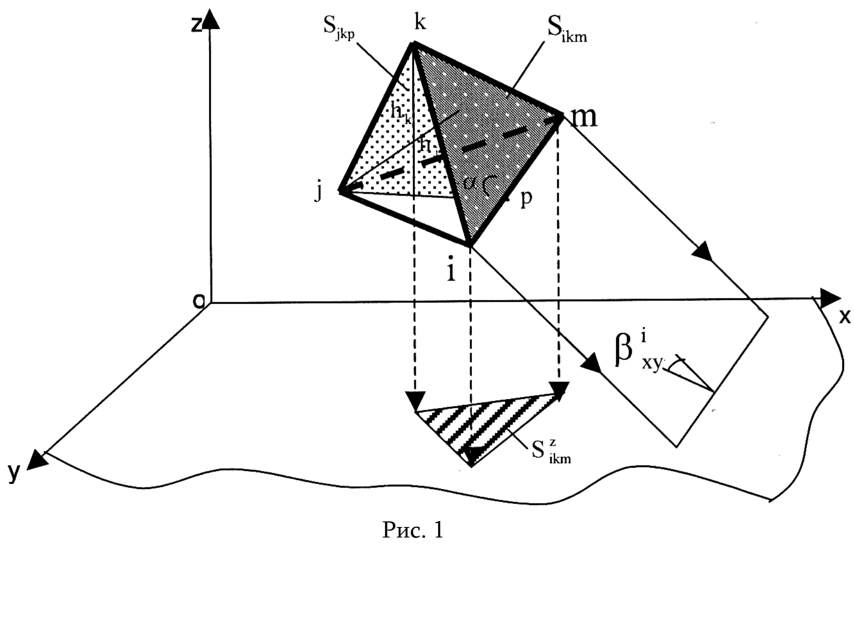

Рис. 1

Объем и площадь связаны соотношением $3V_e = S_{ikm} h_j$ или $3V_e = S_{ijm} h_k$, где h_j - высота, опущенная из вершины j на противоположную плоскость тетраэдра e; h_k - высота, опущенная из вершины k на противоположную плоскость тетраэдра e. Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial z} b_j^e(x, y, z) = \frac{2}{h_j} \cos\beta_{xy}^j,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} b_j^e(x, y, z) = \frac{2}{h_j} \cos\beta_{xz}^j,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} b_j^e(x, y, z) = \frac{2}{h_j} \cos\beta_{yz}^j,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} b_k^e(x, y, z) = \frac{2}{h_k} \cos\beta_{xy}^k,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} b_k^e(x, y, z) = \frac{2}{h_k} \cos\beta_{xz}^k,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} b_k^e(x, y, z) = \frac{2}{h_k} \cos\beta_{yz}^k.$$

Написав аналогичные уравнения для остальных вершин j, k, m и подставив их в (7), получим

$$\begin{cases} \iiint\limits_e \frac{\partial b_k^e}{\partial z} \frac{\partial b_j^e}{\partial z} dxdydz = \frac{4V_e}{h_k h_j} \cos\beta_{xy}^k \cos\beta_{xy}^j, \\ \iiint\limits_e \frac{\partial b_k^e}{\partial y} \frac{\partial b_j^e}{\partial y} dxdydz = \frac{4V_e}{h_k h_j} \cos\beta_{xz}^k \cos\beta_{xz}^j, \\ \iiint\limits_e \frac{\partial b_k^e}{\partial y} \frac{\partial b_j^e}{\partial x} dxdydz = \frac{4V_e}{h_k h_j} \cos\beta_{xz}^k \cos\beta_{yz}^j, \\ \iiint\limits_e \frac{\partial b_k^e}{\partial z} \frac{\partial b_j^e}{\partial x} dxdydz = \frac{4V_e}{h_k h_j} \cos\beta_{xy}^k \cos\beta_{yz}^j, \\ \iiint\limits_e \frac{\partial b_k^e}{\partial x} \frac{\partial b_j^e}{\partial x} dxdydz = \frac{4V_e}{h_k h_j} \cos\beta_{yz}^k \cos\beta_{yz}^j, \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \iiint\limits_e \dfrac{\partial b_k^e}{\partial x}\dfrac{\partial b_j^e}{\partial y}dxdydz = \dfrac{4V_e}{h_k h_j}\cos\beta_{yz}^k \cos\beta_{xz}^j, \\ \iiint\limits_e \dfrac{\partial b_k^e}{\partial z}\dfrac{\partial b_j^e}{\partial y}dxdydz = \dfrac{4V_e}{h_k h_j}\cos\beta_{xy}^k \cos\beta_{xz}^j, \\ \iiint\limits_e \dfrac{\partial b_k^e}{\partial x}\dfrac{\partial b_j^e}{\partial z}dxdydz = \dfrac{4V_e}{h_k h_j}\cos\beta_{yz}^k \cos\beta_{xy}^j, \\ \iiint\limits_e \dfrac{\partial b_k^e}{\partial y}\dfrac{\partial b_j^e}{\partial z}dxdydz = \dfrac{4V_e}{h_k h_j}\cos\beta_{xz}^k \cos\beta_{xy}^j. \end{cases}$$

Из (6) и (9) получаем уравнение для расчета потенциала A_k^x с перенесенным влево диагональным элементом

$$\begin{aligned} &\sum_{e\in E_k} \nu_e \frac{4V_e}{\left(h_k^e\right)^2}\left(\cos^2\beta_{xy}^k + \cos^2\beta_{xz}^k\right)A_k^x = \\ &= \sum_{e\in E_k} \nu_e \sum_{t=i,j,m} \frac{V_e}{h_t^e h_k^e}\Big[\left(\cos\beta_{xy}^k \cos\beta_{xy}^t + \cos\beta_{xz}^k \cos\beta_{xz}^j\right)A_t^x - \\ &- \cos\beta_{xz}^k \cos\beta_{yz}^j A_t^y - \cos\beta_{xy}^k \cos\beta_{yz}^j A_t^z\Big] - \delta^x a_k^e. \end{aligned} \qquad (10)$$

Согласно (10), недиагональные элементы k-й строки матрицы системы линейных уравнений будут больше, чем диагональный элемент данной строки, если

$$\frac{V_e}{h_t^e h_k^e} >> \frac{V_e}{\left(h_k^e\right)^2}, \qquad (11)$$

т.е. если в сетке существует тетраэдр е с существенно разными длинами высот $h_t^e << h_k^e$. В соответствии с принципом доминирования диагонали в таком случае итерационный процесс расходится.

Заметим, что входящие в (10) величины типа $\cos\beta_{xy}^t$ не влияют на сходимость процесса, так как не могут все одновременно быть близкими к нулю. Действительно, $\cos\beta_{xy}^i = 0$, если плоскость треугольника с вершинами j, k, m перпендикулярна координатной плоскости xoy. Но никакая плоскость не может быть перпендикулярной всем трем координатным плоскостям одновременно. Следовательно, при $h_t^e << h_k^e$ хотя бы один недиагональный элемент k-й строки матрицы будет больше, чем диагональный элемент данной строки.

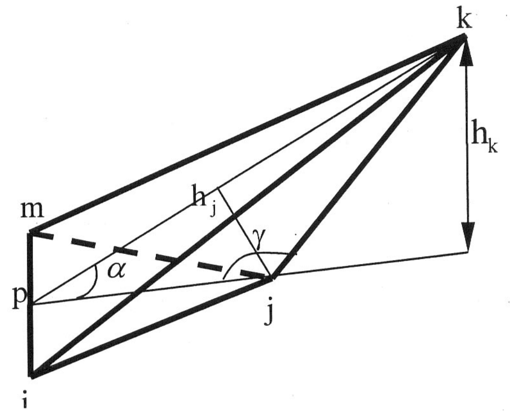

Рис. 2

Условие (11) накладывает ограничение и на углы тетраэдра. Рассмотрим плоскость, перпендикулярную ребру im (рис. 2). Имеем $3V_e = S_{jkp} l_{im}$, где S_{jkp} - площадь образуемого треугольника с вершинами j, k, p; l_{im} - длина ребра с вершинами i и m. Определим, каким должен быть угол α между плоскостями треугольников с вершинами i, j, m и i, k, m, чтобы выполнялось условие (11).

Зафиксируем высоту h_k^e и площадь S_{jkp}. Для высот имеем пропорцию $dh_j^e = ch_k^e$, где d - длина стороны (k, p); c - длина стороны (j, p). Заметим, что величина $c = \dfrac{S_{jkp}}{2h_k^e}$ тоже фиксирована. По теореме Пифагора имеем

$$d^2 = h_k^2 + (c - h_k \operatorname{ctg}\gamma)^2.$$

Следовательно,

$$h_t^e = \frac{c}{d} h_k^e = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{c}{h_k^e} - \operatorname{ctg}\gamma\right)^2}}.$$

Отсюда видно, что при фиксированных высоте h_k^e и площади S_{ijp} вторая высота тетраэдра может быть малой длины только тогда, когда $\operatorname{ctg}\gamma < 0$, т.е. при тупом угле. Итак, как и в двумерном случае, наличие в сетке тупоугольных тетраэдров отрицательно сказывается на сходимости процесса решения. Оценим критическое значение тупого угла γ, при превышении которого итерационный процесс расходится.

4. **Оценка критического угла в тетраэдрической сетке.** Рассмотрим в трехмерном пространстве выпуклый многогранник. Известна классическая формула Эйлера, которая

связывает количество граней G, ребер R и вершин W любого выпуклого многогранника:

$$G - R + W = 2.$$

Предположим, что все грани многогранника являются треугольниками. Тогда каждая грань содержит три ребра и каждое ребро лежит на границе двух граней. Следовательно, $3G = 2R$. Подставляя полученное значение в формулу Эйлера, получим

$$W = 2 - G + \frac{3}{2}G = 2 + \frac{1}{2}G. \tag{12}$$

Добавим внутри многогранника вершину (узел) O и соединим ее со всеми вершинами W. Так как все грани многогранника являются треугольниками, то получим непересекающиеся тетраэдры с общей вершиной O. Заметим, что количество тетраэдров равно количеству граней выпуклого многогранника. Тогда количество узлов W, соединенных с O, вычисляется формулой (1).

Таким образом, для любой тетраэдрической сетки и любого ее внутреннего узла число O *тетраэдров* G*, содержащих узел* O*, обязательно четное и связано с числом W соседних узлов соотношением (12).*

Для правильного тетраэдра телесный угол при каждой вершине равен $\pi / 6$, а полный телесный угол равен площади единичной сферы 4π. Следовательно, узел можно окружить 24 правильными тетраэдрами. Согласно (12), такой узел будет иметь 14 соседних узлов.

Следовательно, для любой тетраэдрической сетки число тетраэдров, содержащих данный узел, в среднем равно 24, а число узлов, соседствующих с данным узлом, в среднем равно 14.

Учитывая полученную среднюю оценку, предположим, что вершина тупого угла соседствует с 14 узлами. Если

$$\frac{V_e}{h_j^e h_k^e} > 14 \frac{V_e}{\left(h_k^e\right)^2}, \tag{13}$$

то в матрице расчетной системы уравнений элемент k-й строки и j-го столбца будет больше диагонального элемента этой строки. Из рис. 2 видно, что

$$S_{jkp} = \frac{h_j h_k}{2 \sin \alpha}.$$

Следовательно, условие (13) будет выполнено, если $\sin \alpha < \frac{1}{7}$, т.е. $\alpha < 8{,}2^\circ$. Последнее неравенство заведомо выполняется, если $\gamma > 163{,}6^\circ$.

Выводы. Если в тетраэдрической сетке, используемой при численном расчете трехмерного магнитного поля методом конечных элементов, у всех тетраэдров все 4 высоты имеют длины одного порядка, то при подходящем выборе начального приближения итерационный процесс сходится. Наличие в сетке тупоугольных треугольников отрицательно сказывается на сходимости процесса решения. Если существуют тетраэдры с тупыми углами большими, чем $\gamma > 163{,}6^\circ$, то итерационный процесс решения полевой задачи заведомо расходится.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Пароникян А.Е.** О расчете магнитных полей методом конечных элементов с динамической композицией элементов дискретизации // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2005. - Т. 58, №2. – С. 332-339.
2. **Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Пароникян А.Е.** Об углах треугольной сетки для расчета магнитных полей методом конечных элементов // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2007. - Т. 60, №3. – С. 523-532.
3. **Новик Я.А.** Вариационная формулировка решения задачи расчета трехмерного стационарного магнитного поля с учетом нелинейных свойств среды // Изв. АН ЛатвССР. Сер. физ. и техн. наук.- 1974. - №4. - С.79-89.
4. **Терзян А.А.** Автоматизированное проектирование электрических машин. – М.: Энергоатомиздат, 1983.- 256 с.
5. **Терзян А.А., Джавадян А.Д., Рымша В.В., Бородина Е.И.** Трехмерное магнитное поле линейного индукторного двигателя постоянного тока // Электричество. - 1991.- №11.- С. 42-47.
6. **Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.** Справочник по математике. - М.:Наука,1986. - 544 с.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 14.04.2008.

Հ. Ա. ԹԵՐԶՅԱՆ, Հ.Ս. ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ, Ա.Է. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՏԱՐՐԵՐԻ ԵՂԱՆԱԿՈՎ ԵՌԱՉԱՓ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ստացված և հետազոտված են վերջավոր տարրերի եղանակով եռաչափ ոչ գծային դաշտային խնդիրների թվային լուծման ժամանակ առաջացած հավասարումների համակարգի երկրաչափական բնութագրերը: Ապացուցված է քառանիստային ցանցում բութ անկյունների առկայության բացասական ազդեցությունը իտերացիոն գործընթացի զուգամիտման վրա: Տրված է կրիտիկական անկյան գնահատականը, որի գերազանցման դեպքում խնդիրը տարամիտում է:

Առանցքային բառեր. էլեկտրամագնիսական դաշտ, վերջավոր տարրերի մեթոդ, եռաչափ քառանիստ ցանցեր:

H.A. TERZYAN, H. S. SUKIASYAN, A.E. HAKOBYAN

ON COMPUTATION OF THREE-DIMENSIONAL MAGNETIC FIELDS BY FINITE-ELEMENT METHOD

The geometric characteristics of equation system for numeric solution of three-dimensional nonlinear field problems by the finite-element method are obtained and investigated. The negative impact of obtuse angle existence in tetrahedral mesh on convergence of iteration process is proved. The estimation of a critical angle is given at the excess of which the problem is diverged.

Keywords: electromagnetic field, finite-element method, three-dimensional tetrahedral mesh.