*Известия НАН Армении, Математика, том 57, н. 5, 2022, стр. 65 – 80.*

# ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ВСЕЙ ПРЯМОЙ С ВЫПУКЛОЙ И МОНОТОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян

https://doi.org/10.54503/0002-3043-2022.57.5-65-80

*Национальный аграрный университет Армении*[1]
*Ереванский государственный университет*
E-mails: *Aghavard59@mail.ru, khachatur.khachatryan@ysu.am, Khach82@rambler.ru*

Аннотация. В работе рассматривается система нелинейных интегральных уравнений типа свертки на всей прямой. Данная система встречается во многих разделах математической физики и математической биологии. Исследуются вопросы существования и отсутствия нетривиальных ограниченных решений. Доказывается также теорема единственности решения в определенном классе ограниченных функций. В конце работы приводятся прикладные примеры указанной системы.

**MSC2020 number:** 45G05.

**Ключевые слова:** система уравнений; нелинейность; ядро; спектральный радиус; выпуклость.

## 1. Введение

Настоящая работа посвящена исследованию следующей системе интегральных уравнений типа свертки с монотонной нелинейностью:

$$(1.1)\quad f_i(x)=\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}K_{ij}(x-t)G_j(f_j(t))dt,\quad x\in\mathbb{R}:=(-\infty,+\infty),\quad i=1,2,\dots,n$$

относительно искомой непрерывной вектор-функции $f(x):=(f_1(x),\dots,f_n(x))^T$ ($T$ – знак транспонирования). В системе (1.1) ядра $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n\times n}$ определены на множестве $\mathbb{R}$ и удовлетворяют следующим условиям:

1) $K_{ij}(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$, $K_{ij}\in L_1(\mathbb{R})\cap M(\mathbb{R})$, $i,j=1,2,\dots,n$,
2) $K_{ij}(x)=K_{ji}(x)$, $x\in\mathbb{R}$, $K_{ij}(-\tau)=K_{ij}(\tau)$, $\tau\in\mathbb{R}^+:=[0,+\infty)$, $i,j=1,2,\dots,n$,
3) $K_{ij}(x)$ монотонно убывает по $x$ на множестве $\mathbb{R}^+$, $i,j=1,2,\dots,n$,

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта No. 21T-1A047

4) $r(A) = 1$, $A := (a_{ij})_{i,j=1}^{n\times n}$, $a_{ij} := \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x)dx$, $i,j = 1,2,\dots,n$, где $r(A)$ спектральный радиус матрицы $A$, т.е наибольшее абсолютное значение собственных значений матрицы $A$,

5) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|K_{ij}(x)dx < +\infty$, $i,j = 1,2,\dots,n$.

Учитывая условия 1) – 4), в силу теоремы Перрона-Фробениуса (см. [1]), существует вектор $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)^T$ с положительными координатами $\eta_i, i = 1,2,\dots,n$, такой, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j = \eta_i, \quad i = 1,2,\dots,n. \tag{1.2}$$

В дальнейших рассуждениях нам понадобятся следующее обозначение:

$$\eta_i^* := \frac{\eta_i}{\min\limits_{1\le i\le n}\eta_i}, \quad i = 1,2,\dots,n. \tag{1.3}$$

Нелинейности $\{G_j(u)\}_{j=1}^{n}$ определены и непрерывны на множестве $\mathbb{R}$, причем обладают следующими свойствами:

a) $G_j(-u) = -G_j(u)$, $u \in \mathbb{R}^+$, $j = 1,2,\dots,n$,
b) функции $\{G_j(u)\}_{j=1}^{n}$ выпуклы вверх на множестве $\mathbb{R}^+$,
c) $y = G_j(u)$ монотонно возрастает по $u$ на множестве $\mathbb{R}$, $j = 1,2,\dots,n$,
d) $G_j(\eta_j^*) = \eta_j^*$, $j = 1,2,\dots,n$, где числа $\eta_j^* \ge 1$, $j = 1,2,\dots,n$ определяются согласно формуле (1.3).

Система нелинейных уравнений (1.1) имеет применение в различных направлениях современного естествознания. Такие системы встречаются в динамической теории $p$ - адических открыто-замкнутых струн для скалярного поля тахионов, в кинетической теории газов (при изучении интегро-дифференциального уравнения Больцмана в рамках нелинейной модифицированной модели Бхатнагара-Гросса-Крука), в теории нелинейного переноса излучения в спектральных линиях, в математической теории пространственно-временного распространения пандемии (см. [2]-[8]).

Вопросы существования нетривиального знакопеременного нечетного непрерывного и ограниченного решения для системы (1.1) обсуждались в работе [9]. Соответствующие скалярные нелинейные интегральные уравнения подробно исследовались в работах [10]-[15].

Следует отметить, что вопросы существования положительных и ограниченных решений для соответствующих систем нелинейных интегральных уравнений на положительной полупрямой (т.е когда интегрирование совершается на множестве $\mathbb{R}^+$) изучены в работах [16], [17] в случае когда ядра $\{K_{ij}(x)\}_{j=1}^n$ не обладают свойством симметричности 2). В отмеченных работах, в основном используя инструменты из линейной теории векторных консервативных интегральных уравнений Винера-Хопфа, удается построить однопараметрическое семейство положительных монотонных непрерывных и ограниченных решений.

В настоящей работе мы будем заниматься вопросами существования и отсутствия нетривиальных ограниченных решений для нелинейной системы (1.1) при условиях $1)-5)$ и $a)-d)$. Будет также доказана теорема единственности решения в определенном классе ограниченных функций. В конце мы приведем конкретные прикладные примеры ядер $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n\times n}$ и нелинейностей $\{G_j(u)\}_{j=1}^n$.

## 2. Обозначения и вспомогательные факты

Обозначим через $Q_i(u)$, обратную функцию к функции $G_i(u)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ на множестве $\mathbb{R}$ (в силу свойств $a) - c)$ существование такой функции обеспечено). Из свойств $a) - d)$ сразу следует, что для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ существует $\varepsilon_i \in (0, 1)$ такое, что уравнение $Q_i(u) = \varepsilon_i u$ имеет единственное положительное решение $\xi_i$, причем $\xi_i < \eta_i^*$.

Рассмотрим следующие характеристические уравнения:

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \int_0^\infty K_{ij}(t) e^{-pt} dt = \frac{\varepsilon_i \eta_i^*}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.1}$$

относительно переменной $p > 0$. В работе [9] показано, что для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ характеристическое уравнение (2.1) обладает единственным положительным решением $p_i$. Обозначим через $p^* := \min\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$.

Наряду с системой (1.1) рассмотрим следующую видоизмененную нелинейную систему:

$$Q_i(F_i(x)) = \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x - t) F_j(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.2}$$

относительно непрерывной вектор-функции $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_n(x))^T$.

В той же работе [9] доказано, что система нелинейных интегральных уравнений (2.2) имеет нетривиальное знакопеременное нечетное непрерывное и ограниченное на $\mathbb{R}$ решение, причем

I) $\xi_i^*(1-e^{-p^*x}) \le F_i(x) \le \eta_i^*, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i=1,2,\ldots,n$, где

$$\xi_i^* := \min_{1\le i\le n}\left(\frac{\xi_i}{\eta_i^*}\right)\eta_i^*, \quad i=1,2,\ldots,n, \tag{2.3}$$

II) $y=F_i(x)$ монотонно неубывает на множестве $\mathbb{R}$, $\quad i=1,2,\ldots,n$,

III) $\lim\limits_{x\to+\infty} F_i(x)=\eta_i^*, \quad i=1,2,\ldots,n$,

IV) $\eta_i^*-F_i \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad i=1,2,\ldots,n$.

Очевидно, что вектор функция $f(x) = (Q_1(F_1(x)), Q_2(F_2(x)),\ldots,Q_n(F_n(x)))^T$ будет решением системы (1.1). Заметим, что

$$\eta_i^* - f_i \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad i=1,2,\ldots,n. \tag{2.4}$$

Действительно, учитывая неравенства $I$), включение $IV$), условия 1), 5), монотонность функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$ по $u$ на $\mathbb{R}$, а также соотношения $Q_i(\eta_i^*) = \eta_i^*$, $i=1,2,\ldots,n$, в силу теоремы Фубини (см. [18]), из (2.2) будем иметь

$$0 \le \eta_i^* - f_i(x) = \eta_i^* - Q_i(F_i(x)) = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t)(\eta_j^*-F_j(t))dt \in L_1(\mathbb{R}^+),$$

ибо

$$0 \le \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t)(\eta_j^*-F_j(t))dt = \int_{-\infty}^{0} K_{ij}(x-t)(\eta_j^*-F_j(t))dt + \int_{0}^{\infty} K_{ij}(x-t)(\eta_j^*-F_j(t))dt \le$$

$$\le \eta_j^* \int_x^{\infty} K_{ij}(\tau)d\tau + \int_0^{\infty} K_{ij}(x-t)(\eta_j^*-F_j(t))dt \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad i,j=1,2,\ldots,n.$$

В силу нечетности функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$ и $\{F_i(x)\}_{i=1}^n$ можно утверждать, что

$$\eta_i^* + f_i \in L_1(\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}^+), \quad i=1,2,\ldots,n, \tag{2.5}$$

$$f_i(-x) = -f_i(x), \quad i=1,2,\ldots,n, \quad x\in\mathbb{R}^+. \tag{2.6}$$

Из предельного соотношения $III$) с учетом непрерывности функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$ и соотношений $Q_i(\eta_i^*)=\eta_i^*$, $i=1,2,\ldots,n$, заключаем, что

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_i(x) = \pm\eta_i^*, \quad i=1,2,\ldots,n. \tag{2.7}$$

Из нечетности функций $\{G_j(u)\}_{j=1}^n$ следует, что системе (1.1) удовлетворяет также вектор-функция $f^*(x) = (-f_1(x), -f_2(x),\ldots,-f_n(x))^T$.

**Замечание 2.1.** *Рассмотрим следующую систему нелинейных интегральных уравнений:*

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t) G_j^*(\varphi_j(t))dt, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.8}$$

*относительно вектор-функции* $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))^T$, *где*

$$G_j^*(u) = \eta_j^* - G_j(\eta_j^* - u), \quad u \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.9}$$

*Прямой проверкой можно убедиться, что тогда функции*

$$\varphi_i^{\pm}(x) := \eta_i^* \pm f_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in \mathbb{R}$$

*удовлетворяют системе* (2.8). *Из* (1.2), (2.4) - (2.7) *сразу следует, что*

A) $0 \leq \varphi_i^{\pm}(x) \leq 2\eta_i^*$, $\varphi_i^{\pm}(x) \not\equiv 0$, $\varphi_i^{\pm}(x) \not\equiv \eta_i^*$, $\varphi_i^{\pm}(x) \not\equiv 2\eta_i^*$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $x \in \mathbb{R}$,

B) $\varphi_i^- \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $\varphi_i^+ \in L_1(\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+)$, $\lim\limits_{x \to \mp\infty} \varphi_i^{\pm}(x) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

*Возникает естественный вопрос: система нелинейных интегральных уравнений* (1.1) *может иметь нетривиальное неотрицательное (неположительное) решение в конусном отрезке* $[0, \eta_1^*] \times [0, \eta_2^*] \times \ldots [0, \eta_n^*]$ *с одинаковыми предельными значениями в* $\pm\infty$?

Ответ на этот вопрос можно получить в §3. Прежде чем перейдем к изучению данного вопроса докажем следующую важную вспомогательную лемму:

**Лемма 2.1.** *Пусть элементы матрицы* $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n \times n}$ *положительны, причем* $a_{ij} = a_{ji}$ *и* $r(A) = 1$. *Тогда, если нелинейности* $\{G_j(u)\}_{j=1}^n$ *удовлетворяют условиям* $a) - d)$, *то система нелинейных алгебраических уравнений*

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} G_j(c_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{2.10}$$

*в классе* $\mathfrak{M} := \{\mathrm{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T : x_i \geq 0, \mathrm{x} \not\equiv 0, i = 1, 2, \ldots, n\}$ *обладает единственным решением* $c_i = \eta_i^*$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

**Доказательство.** Во-первых заметим, что в силу условия $d)$ и соотношения (1.2) $c = (\eta_1^*, \eta_2^*, \ldots, \eta_n^*)^T$ является решением системы (2.10). Докажем, что в классе $\mathfrak{M}$ система (2.10) других решений не имеет. Предположим обратное: система (2.10) обладает также решением $\tilde{c} := (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_n)^T$, $\tilde{c} \neq c$. Рассмотрим разность:

$$|\eta_i^* - \tilde{c}_i| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |\eta_j^* - G_j(\tilde{c}_j)|, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.11}$$

Умножим обе части неравенства (2.11) на $G_i(\tilde{c}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и просуммируем полученное неравенство по всем $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда, учитывая симметричность матрицы $A$, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n} G_i(\tilde{c}_i)|\eta_i^* - \tilde{c}_i| \leq \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|\eta_j^* - G_j(\tilde{c}_j)|)G_i(\tilde{c}_i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |\eta_j^* - G_j(\tilde{c}_j)| \sum_{i=1}^{n} a_{ij} G_i(\tilde{c}_i) = \sum_{j=1}^{n} |\eta_j^* - G_j(\tilde{c}_j)| \sum_{i=1}^{n} a_{ji} G_i(\tilde{c}_i) = \sum_{j=1}^{n} |\eta_j^* - G_j(\tilde{c}_j)|\tilde{c}_j,$$

откуда следует, что

$$\sum_{i=1}^{n}(G_i(\tilde{c}_i)|\eta_i^* - \tilde{c}_i| - |\eta_i^* - G_i(\tilde{c}_i)|\tilde{c}_i) \leq 0. \tag{2.12}$$

Ясно, что

$$\sum_{i=1}^{n}(G_i(\tilde{c}_i)|\eta_i^* - \tilde{c}_i| - |\eta_i^* - G_i(\tilde{c}_i)|\tilde{c}_i) = \sum_{i \in \mathcal{P}}(G_i(\tilde{c}_i)|\eta_i^* - \tilde{c}_i| - |\eta_i^* - G_i(\tilde{c}_i)|\tilde{c}_i), \tag{2.13}$$

где

$$\mathcal{P} := \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} : \tilde{c}_i \neq \eta_i^*,\ \tilde{c}_i \neq 0\}. \tag{2.14}$$

Следовательно, учитывая (2.13) и (2.12), приходим к неравенству

$$\sum_{i \in \mathcal{P}} |\eta_i^* - \tilde{c}_i|\tilde{c}_i \left( \frac{G_i(\tilde{c}_i)}{\tilde{c}_i} - \frac{|\eta_i^* - G_i(\tilde{c}_i)|}{|\eta_i^* - \tilde{c}_i|} \right) \leq 0. \tag{2.15}$$

Заметим теперь, что в силу монотонности и выпуклости вверх на $\mathbb{R}^+$ функций $\{G_j(u)\}_{j=1}^n$ для всех $i \in \mathcal{P}$ имеет место неравенство

$$\frac{G_i(\tilde{c}_i)}{\tilde{c}_i} > \frac{|\eta_i^* - G_i(\tilde{c}_i)|}{|\eta_i^* - \tilde{c}_i|} \tag{2.16}$$

Неравенства (2.15) и (2.16) приводят к противоречию. Следовательно, $\tilde{c} = c = (\eta_1^*, \eta_2^*, \ldots, \eta_n^*)^T$ является единственным решением системы (2.10) в классе векторов $\mathfrak{M}$. $\square$

## 3. Отсутствие нетривиальных неотрицательных (неположительных) решений для системы (1.1).

**Теорема 3.1.** *При условиях* 1) − 5) *и* a) − d) *система нелинейных интегральных уравнений* (1.1) *в конусном отрезке* $[0, \eta_1^*] \times [0, \eta_2^*] \times \ldots [0, \eta_n^*]$ *не может иметь нетривиальное неотрицательное (неположительное) решение с одинаковыми предельными значениями в* $\pm\infty$.

**Доказательство.** В силу нечетности нелинейностей $\{G_j(u)\}_{j=1}^n$ достаточно доказать отсутствие нетривиальных неотрицательных решений указанными выше свойствами. Предположим обратное: система нелинейных интегральных уравнений (1.1) имеет нетривиальное неотрицательное решение в конусном отрезке $[0,\eta_1^*]\times[0,\eta_2^*]\times\ldots[0,\eta_n^*]$, причем существуют $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_i(x)=c_i$, $i\in 1,2,\ldots,n$. Так как по предположению $0\le f_i(x)\le\eta_i^*$, $x\in\mathbb{R}^+$, $i\in 1,2,\ldots,n$, то $c_i\in[0,\eta_i^*]$, $i\in 1,2,\ldots,n$. Так как свертка суммируемой и ограниченной функций из себя представляет непрерывную функцию (см. [19]), то в силу условий $1), a), c)$ и $d)$ заключаем, что $f_i\in C(\mathbb{R})$, $i=1,2,\ldots,n$.

Перейдем в обеих частях системы (1.1) к пределу, когда $x\to\pm\infty$. Тогда, используя следующее известное предельное соотношение для операции свертки (см. [20]):

$$\lim_{x\to\pm\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(x-t)\phi(t)dt=\phi(\pm\infty)\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(u)du,$$

с учетом непрерывности функций $\{G_j(u)\}_{j=1}^n$ из (1.1) приходим к системе нелинейных алгебраических уравнений (2.10), в которой $a_{ij}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_{ij}(x)dx$, $i,j=1,2,\ldots,n$. Так как $K_{ij}(x)=K_{ji}(x)$, $x\in\mathbb{R}$, $i,j=1,2,\ldots,n$, $r(A)=1$ и $G_j(0)=0$, $j=1,2,\ldots,n$, то согласно доказанной лемме либо $c_i=0$, $i=1,2,\ldots,n$, либо $c_i=\eta_i^*$, $i=1,2,\ldots,n$.

Ниже убедимся, что

- если $c_i=0, i=1,2,\ldots,n$, то $f_i\in L_1(\mathbb{R})$, $i=1,2,\ldots,n$,
- если же $c_i=\eta_i^*$, $i=1,2,\ldots,n$, то $\eta_i^*-f_i\in L_1(\mathbb{R})$, $i=1,2,\ldots,n$.

Пусть $c_i=0$, $i=1,2,\ldots,n$. Тогда существуют числа $r_1>0$ и $r_2<0$ такие, что

$$0\le f_i(x)<\frac{\eta_i^*}{2},\quad x>r_1,\quad i=1,2,\ldots,n, \tag{3.1}$$

$$0\le f_i(x)<\frac{\eta_i^*}{2},\quad x<r_2,\quad i=1,2,\ldots,n, \tag{3.2}$$

Используя неравенства $0\le f_i(x)\le\eta_i^*$, $x\in\mathbb{R}$, $i=1,2,\ldots,n$, соотношение (1.2), а также условия $4), 5), a), c)$ и $d)$, в силу теоремы Фубини из (1.1) для произвольного $R>r_1$ будем иметь

$$0\le\int\limits_{r_1}^{R}(\eta_i^*-f_i(x))dx=\sum_{j=1}^n\int\limits_{r_1}^{R}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_{ij}(x-t)(\eta_j^*-G_j(f_j(t)))dtdx=$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_{r_1}^{R} \int_{-\infty}^{0} K_{ij}(x-t)(\eta_j^* - G_j(f_j(t)))dtdx + \sum_{j=1}^{n} \int_{r_1}^{R} \int_{0}^{\infty} K_{ij}(x-t)(\eta_j^* - G_j(f_j(t)))dtdx \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \int_{r_1}^{R} \int_{x}^{\infty} K_{ij}(\tau)d\tau dx + \sum_{j=1}^{n} \int_{r_1}^{R} \int_{0}^{r_1} K_{ij}(x-t)(\eta_j^* - G_j(f_j(t)))dtdx +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \int_{r_1}^{R} \int_{r_1}^{R} K_{ij}(x-t)(\eta_j^* - G_j(f_j(t)))dtdx + \sum_{j=1}^{n} \int_{r_1}^{R} \int_{R}^{\infty} K_{ij}(x-t)(\eta_j^* - G_j(f_j(t)))dtdx \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \int_{0}^{\infty} \int_{x}^{\infty} K_{ij}(\tau)d\tau dx + \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \int_{r_1}^{\infty} \int_{0}^{r_1} K_{ij}(x-t)dtdx +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \int_{r_1}^{R} \int_{r_1}^{R} K_{ij}(x-t)(\eta_j^* - G_j(f_j(t)))dtdx + \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \int_{0}^{R} \int_{R}^{\infty} K_{ij}(x-t)dtdx =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \int_{0}^{\infty} \tau K_{ij}(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \int_{r_1}^{\infty} \int_{x-r_1}^{x} K_{ij}(y)dydx + \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \int_{0}^{R} \int_{-\infty}^{x-R} K_{ij}(y)dydx +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \int_{r_1}^{R} \int_{r_1}^{R} K_{ij}(x-t)(\eta_j^* - G_j(f_j(t)))dtdx \leq \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \int_{0}^{\infty} \tau K_{ij}(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \int_{r_1}^{\infty} \int_{x-r_1}^{\infty} K_{ij}(y)dydx +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{z} K_{ij}(y)dydz + \sum_{j=1}^{n} \int_{r_1}^{R} \int_{r_1}^{R} K_{ij}(x-t)(\eta_j^* - G_j(f_j(t)))dtdx \leq$$

$$\leq 2 \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \int_{0}^{\infty} \tau K_{ij}(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \int_{-\infty}^{0} K_{ij}(y)(-y)dy + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \int_{r_1}^{R} (\eta_j^* - G_j(f_j(t)))dt =$$

$$= 3 \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \int_{0}^{\infty} \tau K_{ij}(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \int_{r_1}^{R} (\eta_j^* - G_j(f_j(t)))dt.$$

Итак, мы получили следующую двойную оценку:

$$0 \leq \int_{r_1}^{R} (\eta_i^* - f_i(x))dx \leq \gamma_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \int_{r_1}^{R} (\eta_j^* - G_j(f_j(t)))dt, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.3}$$

где

$$\gamma_i := 3 \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \int_{0}^{\infty} \tau K_{ij}(\tau)d\tau, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.4}$$

Умножим обе части неравенства (3.3) на $\eta_i^*$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и просуммируем полученные неравенства по всем $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда с учетом условия симметричности матрицы $A$ и соотношения (1.2) приходим к следующему двойному неравенству:

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} \eta_i^* \int_{r_1}^{R} (\eta_i^* - f_i(x))dx \leq \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \eta_i^* + \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \int_{r_1}^{R} (\eta_j^* - G_j(f_j(t)))dt$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_i^* \int_{r_1}^{R} (G_i(f_i(t)) - f_i(t))dt \leq \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \eta_i^*. \tag{3.5}$$

Учитывая неравенства (3.1) и выпуклость вверх функций $\{G_j(u)\}_{j=1}^n$ на множестве $\mathbb{R}^+$ несложно проверить, что

$$G_i(f_i(t)) \geq \frac{2G_i(\frac{\eta_i^*}{2})}{\eta_i^*} f_i(t), \quad t > r_1, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.6}$$

Таким образом, в силу (3.6) из (3.5) приходим к оценке

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i^* \left( \frac{2G_i(\frac{\eta_i^*}{2})}{\eta_i^*} - 1 \right) \int_{r_1}^{R} f_i(t)dt \leq \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \eta_i^*. \tag{3.7}$$

Из выпуклости вверх функций $\{G_j(u)\}_{j=1}^n$ на множестве $\mathbb{R}^+$ с учетом условий $a), c)$ и $d)$ следует, что

$$T_i := \frac{2G_i(\frac{\eta_i^*}{2})}{\eta_i^*} - 1 > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Следовательно, $T := \min\limits_{1 \leq i \leq n} \{T_i\} > 0$. Итак, учитывая (1.3), из (3.7) получаем, что

$$0 \leq \int_{r_1}^{R} f_i(t)dt \leq \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \eta_i^*, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.8}$$

Устремляя число $R \to +\infty$ в (3.8) приходим к выключению $f_i \in L_1(r_1, +\infty)$. С использованием неравенств (3.2) аналогично можно доказать, что $f_i \in L_1(-\infty, r_2)$. Так как $f_i \in C(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то из доказанных фактов следует, что $f_i \in L_1(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

В случае когда $c_i = \eta_i^*$, $i = 1, 2, \ldots, n$ совершенно идентичными рассуждениями можно доказать, что $\eta_i^* - f_i \in L_1(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Теперь докажем, что

**(!):** если $f_i \in L_1(\mathbb{R})$, $0 \le f_i(x) \le \eta_i^*$, $x \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, то $f_i(x) \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$,

**(!!):** если же $\eta_i^* - f_i \in L_1(\mathbb{R})$, $0 \le f_i(x) \le \eta_i^*$, $x \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, то $f_i(x) \equiv \eta_i^*$, $x \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Пусть $f_i \in L_1(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, \dots, n$. Интегрируем обе части системы (1.1) по $x$ на $\mathbb{R}$, затем умножим обе части полученного равенства на $\eta_i^*$, $i = 1, 2, \dots, n$ и просуммируем по всем $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда, если учитывать соотношение (1.2) и симметричность матрицы $A$, в силу теоремы Фубини получим

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i^* \int\limits_{-\infty}^{\infty} (G_i(f_i(t)) - f_i(t)) dt = 0 \tag{3.9}$$

Так как $0 \le f_i(t) \le \eta_i^*$, $t \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, то из условий $a) - d)$ сразу следует, что

$$G_i(f_i(t)) \ge f_i(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{3.10}$$

причем равенство в (3.10) возможно только тогда, когда $\left[ \begin{array}{l} f_i(t) = 0, \\ f_i(t) = \eta_i^*, \end{array} \right.$ $i = 1, 2, \dots, n$. Поскольку $f_i \in L_1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, \dots, n$, то из (3.9), в силу (3.10), получаем, что $f_i(t) \equiv 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Точно также можно проверить, что если $\eta_i^* - f_i \in L_1(\mathbb{R})$, $0 \le f_i(t) \le \eta_i^*$, $t \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, то $f_i(t) \equiv \eta_i^*$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Итак, в обеих случаях мы получаем только тривиальные решения. Следовательно, **теорема 3.1 полностью доказана.**

## 4. О единственности решения системы (1.1). Примеры

Как уже было отмечено в §2, система (1.1) обладает двумя непрерывными знакопеременными монотонными решениями: $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$ и $f^*(x) = (-f_1(x), \dots, -f_n(x))^T$, где функции $\{f_i(x)\}_{i=1}^n$ обладают свойствами (2.5) - (2.7).

**Замечание 4.1.** *Прямой проверкой можно убедиться, что системе* (1.1) *удовлетворяют также следующие однопараметрические семейства вектор-функций:*

$$f_c(x) = (f_1(x+c), \dots, f_n(x+c))^T, \quad f_c^*(x) = (-f_1(x+c), \dots, -f_n(x+c))^T, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Возникает следующий вопрос: в классе непрерывных нечетных и ограниченных функций на $\mathbb{R}$ система нелинейных интегральных уравнений (1.1), кроме решений $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$, $f^*(x) = (-f_1(x), \dots, -f_n(x))^T$, может ли иметь других решений?

Ответ на этот вопрос нам удается дать частично. А именно, справедлива следующая

**Теорема 4.1.** *При условиях* $1)-5), a)-d)$ *система нелинейных интегральных уравнений* (1.1) *в классе нетривиальных нечетных функций, определенных на множестве* $\mathbb{R}$, *принадлежащих конусному отрезку* $[-\eta_1^*, \eta_1^*] \times \ldots \times [-\eta_n^*, \eta_n^*]$, *и имеющих конечный предел в* $\pm\infty$, *не может иметь более двух решений.*

Прежде чем займемся доказательством данной теоремы, рассмотрим следующую вспомогательному систему нелинейных интегральных уравнений с суммарно-разностным ядром на положительной полупрямой:

$$(4.1)\quad Q_i(\varphi_i(x)) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty (K_{ij}(x-t) - K_{ij}(x+t))\varphi_j(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

относительно искомой вектор - функции $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))^T$, где, как уже было отмечено, $Q_i = G_i^{-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Вопросу существования неотрицательного нетривиального ограниченного и монотонно неубывающего решения системы (4.1) посвящена работа [9]. Мы докажем следующую вспомогательную лемму о единственности решения системы (4.1).

**Лемма 4.1.** *При условиях* $1)-5), a)-d)$ *система* (4.1) *в классе нетривиальных неотрицательных вектор-функций, определенных на множестве* $\mathbb{R}^+$, *принадлежащих конусному отрезку* $[0, \eta_1^*] \times \ldots \times [0, \eta_n^*]$, *и имеющих конечный предел в* $+\infty$ *имеет единственное решение.*

**Доказательство леммы 4.1.** Аналогичными рассуждениями, как в доказательстве теоремы 3.1, здесь можно убедиться, что если $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))^T$ – любое нетривиальное неотрицательное решение системы (4.1), причем $0 \le \varphi_i(x) \le \eta_i^*$, $x \in \mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_i(x) < +\infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то либо $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, либо $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_i(x) = \eta_i^*$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Более того, в первом случае $\varphi_i \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, а во втором случае $\eta_i^* - \varphi_i \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. С другой стороны, из результатов работы [9] следует, что система (4.1) обладает неотрицательным монотонно неубывающим непрерывным на $\mathbb{R}^+$ решением $\varphi^*(x) = (\varphi_1^*(x), \ldots, \varphi_n^*(x))^T$, причем

$$\xi_i^*(1 - e^{-p^* x}) \le \varphi_i^*(x) \le \eta_i^*, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi_i^*(x)=\eta_i^*,\ \eta_i^*-\varphi_i^*\in L_1(\mathbb{R}^+),\ i=1,2,\ldots,n.$$

Ниже докажем, что на самом деле такое решение единственно в выше упомянутом классе вектор-функций (см. формулировку леммы 4.1). Предположим обратное: тогда либо система (4.1) обладает вторым неотрицательным нетривиальным ограниченным решением $\varphi(x)=(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))^T$ со свойствами: $0\le\varphi_i(x)\le\eta_i^*$, $x\in\mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_i(x)=\eta_i^*$, $\eta_i^*-\varphi_i\in L_1(\mathbb{R}^+)$, $i=1,2,\ldots,n$, либо обладает также неотрицательным нетривиальным суммируемым на $\mathbb{R}^+$ решением $\varphi(x)=(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))^T$, причем

$$0\le\varphi_i(x)\le\eta_i^*,\ x\in\mathbb{R}^+,\ \lim_{x\to+\infty}\varphi_i(x)=0,\ i=1,2,\ldots,n. \tag{4.2}$$

Если существует неотрицательное нетривиальное суммируемое решение $\varphi(x)=(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))^T$ со свойствами (4.2), то, снова используя непрерывность операции свертки суммируемых и ограниченных функций, можно утверждать, что $\varphi_i\in C(\mathbb{R}^+)$, $i=1,2,\ldots,n$. Более того, из (4.1), в силу четности ядер $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n\times n}$ по $x$ и свойств функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$, легко следует, что $\varphi_i(0)=0$, $i=1,2,\ldots,n$. Убедимся, что $\varphi_i(x)>0$, при $x>0$, $i=1,2,\ldots,n$. Так как $\varphi(x)=(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))^T$ тождественно ненулевая вектор - функция и $\varphi_i(x)\ge0$, $x\in\mathbb{R}^+$, $i=1,2,\ldots,n$, то в силу легко проверяемого неравенства:

$$K_{ij}(x-t)>K_{ij}(x+t),\quad x,t>0,\quad i,j=1,2,\ldots,n, \tag{4.3}$$

из (4.1) получим, что $Q_i(\varphi_i(x))\ge0$ и $Q_i(\varphi_i(x))\not\equiv0$, $x\in\mathbb{R}^+$ для всех $i=1,2,\ldots,n$. Учитывая монотонность нечетность и непрерывность функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$, заключаем, что для каждого $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ существует $x_i>0$ такое, что $\varphi_i(x_i)>0$. В силу непрерывности функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$, следует, что существуют положительные числа $\{\delta_i\}_{i=1}^n$, такие, что $\varphi_i(x)>0$, при $x\in(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)$, причем $x_i>\delta_i$, $i=1,2,\ldots,n$. Тогда в силу (4.3) из (4.1) будем иметь

$$Q_i(\varphi_i(x))\ge\sum_{j=1}^n\int\limits_{x_j-\delta_j}^{x_j+\delta_j}(K_{ij}(x-t)-K_{ij}(x+t))\varphi_j(t)dt>0=Q_i(0),\quad i=1,2,\ldots,n. \tag{4.4}$$

Учитывая монотонность функций $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$, из (4.4) получаем

$$\varphi_i(x)>0,\ \text{при}\ x>0,\ i=1,2,\ldots,n. \tag{4.5}$$

Используя неравенства (4.3), оценим теперь разность:

$$|Q_i(\varphi_i(x)) - Q_i(\varphi_i^*(x))| \leq \sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty (K_{ij}(x-t) - K_{ij}(x+t))|\varphi_j(t) - \varphi_j^*(t)|dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, i = 1, 2, \dots, n \tag{4.6}$$

Умножим обе части неравенства (4.6) на функцию $\varphi_i \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $i = 1, 2, \dots, n$ интегрируем обе части полученного неравенства по $x$ пределах от 0 до $+\infty$, затем просуммируем по всем $i = 1, 2, \dots, n$.

Так как $K_{ij} \in L_1(\mathbb{R})$, $\varphi_j, \varphi_j^* \in C_M(\mathbb{R}^+)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ ($C_M(\mathbb{R}^+)$ – пространство непрерывных и ограниченных функций на $\mathbb{R}^+$), то имея в виду теорему Фубини, четность и симметричность ядер $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n\times n}$, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^\infty \varphi_i(x)|Q_i(\varphi_i(x)) - Q_i(\varphi_i^*(x))|dx \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty \varphi_i(x) \int_0^\infty (K_{ij}(x-t) - K_{ij}(x+t))|\varphi_j(t) - \varphi_j^*(t)|dtdx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |\varphi_j(t) - \varphi_j^*(t)| \int_0^\infty (K_{ji}(t-x) - K_{ji}(t+x))\varphi_i(x)dxdt =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty |\varphi_j(t) - \varphi_j^*(t)| \left( \sum_{i=1}^{n} \int_0^\infty (K_{ji}(t-x) - K_{ji}(t+x))\varphi_i(x)dx \right) dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty |\varphi_j(t) - \varphi_j^*(t)| Q_j(\varphi_j(t))dt$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^\infty \{|Q_i(\varphi_i(x)) - Q_i(\varphi_i^*(x))|\varphi_i(x) - |\varphi_i(x) - \varphi_i^*(x)|Q_i(\varphi_i(x))\}dx \leq 0. \tag{4.7}$$

Так как $\eta_i^* - \varphi_i^* \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $\varphi_i \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $\varphi_i(0) = \varphi_i^*(0) = 0$, $\varphi_i^*(x) > 0$, $\varphi_i(x) > 0$, $x > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, то для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ существует $x_i > 0$, такое, что $\varphi_i^*(x_i) \neq \varphi_i(x_i)$. Снова используя непрерывность этих функций, заключаем, что существуют положительные числа $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ такие, что $\varphi_i^*(x) \neq \varphi_i(x)$, $x_i > \lambda_i$, $x \in (x_i - \lambda_i, x_i + \lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Ясно, что когда $x \in (x_i - \lambda_i, x_i + \lambda_i)$

$$\varphi_i(x) \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{4.8}$$

Введем следующие измеримые множества:

$$\mathcal{P}_i := \{x \in \mathbb{R}^+ : \varphi_i^*(x) \neq \varphi_i(x),\, \varphi_i(x) \neq 0\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Очевидно, что $0 \notin \mathcal{P}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

В силу сказанного выше имеем $(x_i - \lambda_i, x_i + \lambda_i) \subset \mathcal{P}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, $mes\mathcal{P}_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Из соотношений $Q_i(0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ сразу следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^\infty \{|Q_i(\varphi_i(x)) - Q_i(\varphi_i^*(x))|\varphi_i(x) - |\varphi_i(x) - \varphi_i^*(x)|Q_i(\varphi_i(x))\}dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{P}_i} \{|Q_i(\varphi_i(x)) - Q_i(\varphi_i^*(x))|\varphi_i(x) - |\varphi_i(x) - \varphi_i^*(x)|Q_i(\varphi_i(x))\}dx \leq 0$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{P}_i} |\varphi_i(x) - \varphi_i^*(x)|\varphi_i(x) \left( \frac{|Q_i(\varphi_i(x)) - Q_i(\varphi_i^*(x))|}{|\varphi_i(x) - \varphi_i^*(x)|} - \frac{Q_i(\varphi_i(x))}{\varphi_i(x)} \right) dx \leq 0. \tag{4.9}$$

В тоже время в силу выпуклости вниз нелинейностей $\{Q_i(u)\}_{i=1}^n$ на множестве $\mathbb{R}^+$ можем утверждать, что для всех $x \in \mathcal{P}_i$ :

$$\frac{|Q_i(\varphi_i(x)) - Q_i(\varphi_i^*(x))|}{|\varphi_i(x) - \varphi_i^*(x)|} > \frac{Q_i(\varphi_i(x))}{\varphi_i(x)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.10}$$

Сопоставляя неравенства (4.9) и (4.10), определение множеств $\{\mathcal{P}_i\}_{i=1}^n$ и тот факт, что $\varphi_i(x) > 0$ при $x \in \mathcal{P}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, приходим к противоречию. Повторяя идентичные рассуждения в случае существования второго нетривиального ограниченного решения $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))^T$ (со свойствами $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi_i(x) = \eta_i^*$, $\eta_i^* - \varphi_i \in L_1(\mathbb{R}^+)$) опять приходим к противоречию. $\square$

Теперь перейдем к доказательству теоремы 4.1.

**Доказательство теоремы 4.1.** Используя нечетность функций $\{G_i(u)\}_{j=1}^n$ и четность ядер $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n \times n}$, прямой проверкой можно убедиться, что если $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))^T$ нетривиальное решение системы (4.1), то вектор-функции $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))^T$, $f^*(x) = (-f_1(x), \ldots, -f_n(x))^T$, где

$$f_i(x) = \begin{cases} Q_i(\varphi_i(x)), & x \geq 0, \\ -Q_i(\varphi_i(-x)), & x < 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

будут решениями системы (1.1). Более того, если $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))^T$, нечетное нетривиальное решение системы (1.1), то $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))^T$, $\varphi_i(x) = G_i(f_i(x))$, $x \in \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2, \ldots, n$ будет решением системы (4.1). Используя эти факты согласно лемме 4.1 приходим к завершению доказательства теоремы 4.1. $\square$

В конце работы приведем примеры прикладного характера ядер $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n\times n}$ и нелинейностей $\{G_i(u)\}_{j=1}^{n}$, для которых выполняются условия доказанных утверждений.

**Примеры ядер** $\{K_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n\times n}$ :

$p_1$) $K_{ij}(x) = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, где $a_{ij} > 0$, $i,j = 1,2,\ldots,n$ элементы матрицы $A$, спектральный радиус которого равен единице,

$p_2$) $K_{ij}(x) = \int\limits_a^b e^{-|x|s}B_{ij}(s)ds$, $x \in \mathbb{R}$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, где $\{B_{ij}(s)\}_{i,j=1}^{n\times n}$ – положительные и непрерывные функции на множестве $[a,b)$, $0 < a < b \leq +\infty$, причем спектральный радиус матрицы $B := \left(2\int\limits_a^b \frac{B_{ij}(s)}{s}ds\right)_{i,j=1}^{n\times n}$ равен единице.

**Примеры нелинейностей** $\{G_i(u)\}_{j=1}^{n}$ :

$q_1$) $G_j(u) = \begin{cases} \gamma_j(1-e^{-u}), & u > 0, \\ \gamma_j(e^u - 1), & u < 0 \end{cases}$ $j = 1,2,\ldots,n$, где $\{\gamma_j\}_{j=1}^{n}$ – числовые параметры, причем $\gamma_j > 1$, $j = 1,2,\ldots,n$,

$q_2$) $G_j(u) = \alpha_j\sqrt[p]{u}$, $j = 1,2,\ldots,n$, где $\alpha_j > 0$, $j = 1,2,\ldots,n$ — числовые параметры, а $p > 2$ — нечетное число.

**Замечание 4.2.** *Отметим, что нелинейности вида $q_1$) с ядрами вида $p_1$) встречаются в математической теории пространственно - временного распространения пандемии (см.* [7], [8]*), а нелинейности вида $q_2$) с ядрами $p_2$) возникают в кинетической теории газов и в теории переноса излучения (см.* [4]-[6]*). В случае гауссовского распределения ядер вида $p_1$) нелинейности типа $q_2$) встречаются в задаче динамической теории $p$ - адических открыто-замкнутых струн (см.* [2], [3]*).*

**Замечание 4.3.** *Следует отметить также, что в скалярном случае $n = 1$ и $K(x) = \frac{\beta}{2}e^{-\beta|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, к изучению интегральных уравнений вида* (1.1) *сводятся задачи нахождения волновых гладких решений нелинейных классических элиптических уравнений и уравнений типа Клейна-Гордона (см.* [15]*).*

**Abstract.** The paper considers a system of nonlinear integral equations of the convolution type on the whole line. This system arises in many branches of mathematical physics and mathematical biology. The questions of existence and absence of nontrivial bounded solutions are investigated. A uniqueness theorem for a solution in a certain

class of bounded functions is also proved. At the end of the work, applied examples of this system are given.

## Список литературы

[1] П. Ланкастер, Теория Матриц, М., Наука (1973).
[2] L. Brekke, P. G. O. Freund, M. Olson, E. Witten, "Non-archimedean string dunamics", Nuclear Physics B, **302**, no. 3, 365 – 402 (1988).
[3] В. С. Владимиров, Я. И. Волович, "О нелинейном уравнении динамики в теории $p$ - адической струны", ТМФ, **138**, no. 3, 355 – 368 (2004).
[4] Н. Б. Енгибарян, "Об одной задаче нелинейного переноса излучения", Астрофизика, **2**, no. 1, 31 – 36 (1966).
[5] C. Cercignani, The Boltzmann Equation and Its Application, Springer, New York (1988).
[6] А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, "О разрешимости нелинейного модельного уравнения Больцмана в задаче плоской ударной волны", ТМФ, **189**, no. 2, 239 – 255 (2016).
[7] O. Diekmann, "Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection", Journal. Math. Biol., **6**, no. 2, 109 – 130 (1978).
[8] O. Diekmann, "Run for your life. A note on the asymptotic speed of propagation of an epidemic", Journal of Diff. Equation, **33**, no. 1, 58 – 73 (1979).
[9] Х. А. Хачатрян, "О разрешимости одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на прямой", Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика, Механика, Информатика, **19**, no. 2, 164 – 181 (2019).
[10] O. Diekmann, H. G. Kaper, "On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation", Nonlinear Analysis, **2**, no. 6, 721 – 737 (1978).
[11] В. С. Владимиров, "О решениях $p$ - адических струнных уравнений", ТМФ, **167**, no. 2, 163 – 170 (2011).
[12] Л. В. Жуковская, "Итерационный метод решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих роллинговые решения в теории струн", ТМФ, **146**, no. 3, 402 – 409 (2006).
[13] Х. А. Хачатрян, "О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории p-адической струны", Изв. РАН. Сер. матем., **82**, no. 2, 172 – 193 (2018).
[14] Х. А. Хачатрян, "О разрешимости одной граничной задачи в p-адической теории струн", Тр. ММО, **79**, no. 1, 117 – 132 (2018).
[15] Kh. A. Khachatryan, H. S. Petrosyan, "Integral equations on the whole line with monotone nonlinearity and difference kernel", Journal of Mathematical Sciences, **255**, no. 6, 790 – 804 (2021).
[16] Kh. A. Khachatryan, "On some systems of nonlinear integral Hammerstein-type equations on the semiaxis", Ukrainian Mathematical Journal, **62**, no. 4, 630 – 647 (2010).
[17] Х. А. Хачатрян, Ц. Э. Терджян, Т. Г. Сардарян, "О разрешимости одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на полуоси", Укр. матем. журнал, **69**, no. 8, 1107 – 1122 (2017).
[18] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы Теории Функций и Функционального Анализа, М., Наука (1981).
[19] У. Рудин, Функциональный Анализ, М., Мир (1975).
[20] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал., **22**, ВИНИТИ, М., 175 – 244 (1984).

Поступила 22 декабря 2021

После доработки 01 апреля 2022

Принята к публикации 20 апреля 2022