Известия НАН Армении, Математика, том 57, н. 5, 2022, стр. 55 – 64.

О СУММИРУЕМЫХ РЕШЕНИЯХ ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С МОНОТОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ НА ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ

Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян

https://doi.org/10.54503/0002-3043-2022.57.5-55-64

Ереванский государственный университет
Национальный аграрный университет Армении[1]
E-mails: *khachatur.khachatryan@ysu.am*, *Khach82@rambler.ru* *Haykuhi25@mail.ru*

Аннотация. В настоящей заметке исследуется класс двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с монотонной нелинейностью на четверти плоскости. Такие уравнения встречаются в динамической теории p–адических струн. Доказывается конструктивная теорема существования положительного суммируемого и ограниченного решения. Изучается асимптотическое поведение решения на бесконечности. Приводятся также конкретные примеры соответствующих ядер и нелинейностей.

MSC2020 number: 45G05.

Ключевые слова: уравнение Вольтерра; нелинейность; итерация; монотонность; выпуклость.

1. Введение

Рассмотрим следующий класс двумерных интегральных уравнений с двумя нелинейностями типа Вольтерра на четверти плоскости:

$$B(x,y)=\int\limits_x^\infty\int\limits_y^\infty V(x'-x,y'-y)\{G(B(x',y'))+\omega(x',y',B(x',y'))\}dy'dx', \tag{1.1}$$
$$(x,y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+,$$

относительно искомой неотрицательной и измеримой на $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ функции $B(x,y)$, где $\mathbb{R}^+:=[0,+\infty)$. Здесь первая нелинейность $G(u)$ – непрерывная и монотонно возрастающая на $\mathbb{R}^+$ функция удовлетворяющая следующим условиям:

a) $G(0)=0$ и существует ее производная $G'(0)$ такая, что $1<G'(0)<+\infty$, причем

$$G(u)\le G'(0)u,\quad u\in\mathbb{R}^+, \tag{1.2}$$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта No. 21T-1A047

b) $G(u)$ – выпуклая вверх функция на $\mathbb{R}^+$, для которой существует число $\eta > 0$ такое, что $G(\eta) = \eta$.

Вторая нелинейность $\omega(x, y, u)$ определена на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, принимает вещественные значения и обладает следующим основными свойствами:

A) $\omega(x, y, 0) \equiv 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ и при всяком фиксированном $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ функция $\omega(x, y, u)$ монотонно возрастает по u на $\mathbb{R}^+$,

B) $\omega(x, y, u)$ удовлетворяет условию Каратеодори по аргументу u на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, т.е при каждом фиксированном $u \in \mathbb{R}^+$ функция $\omega(x, y, u)$ измерима по (x, y) на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ и почти при всех $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ данная функция непрерывна по u на множестве $\mathbb{R}^+$.

Ядро $V(x, y)$ определено на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ и удовлетворяет следующим ограничениям:

I) $V \in L_1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \cap M(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$,

II) $V(x, y) > 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty V(x, y) dx dy = 1$,

где $L_1(E)$ – пространство суммируемых функций на множестве E, а $M(E)$ – пространство существенно ограниченных функций на E.

Уравнение (1.1) возникает в реологических моделях вязкоупругой среды (см. [1]–[3]). Кроме того такие уравнения встречаются в динамической теории p-адических струн (см. [4]–[6]). В одномерном случае, когда $G(u) = \alpha u$, $\alpha > 1$, уравнение (1.1) подробно исследовалось в работе [7].

2. Формулировка основного результата. Примеры

Прежде чем накладывать основные условия на функцию $\omega(x, y, u)$, введем некоторые обозначения. Пусть $a > 1$ – произвольное число.

Рассмотрим вспомогательную функцию на множестве $\mathbb{R}^+$:

$$\chi_a(\lambda) := a \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty V(x, y) e^{-\lambda(x+y)} dx dy, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+. \tag{2.1}$$

Из условия II) немедленно следует, что справедливы следующие утверждения:

$$\chi_a(0) = a > 1,\ \chi_a \in C(\mathbb{R}^+),\ \chi_a(\lambda) \downarrow \text{ по } \lambda \text{ на } \mathbb{R}^+ \tag{2.2}$$

и

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \chi_a(\lambda) = 0. \tag{2.3}$$

Следовательно, согласно теореме Больцано-Коши для каждого $a > 1$ существует единственное число $\lambda = \lambda(a)$ такое, что $\chi_a(\lambda(a)) = 1$.

Обозначим через $\lambda^* = \lambda^*(G'(0))$ единственное положительное решение характеристического уравнения $\chi_{G'(0)}(\lambda) = 1$.

Относительно нелинейности $\omega(x, y, u)$ предположим также выполнение следующих условий:

C) существует число $\varepsilon > G'(0) - 1$ такое, что имеет место неравенство

$$\omega(x, y, \eta e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)}) \geq \varepsilon \eta e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \tag{2.4}$$

в котором число λ_ε единственным образом определяется из характеристического уравнения $\chi_{1+\varepsilon}(\lambda) = 1$,

D) существует $\rho(x, y) := e^{\lambda^*(x+y)} \sup\limits_{u \in \mathbb{R}^+} \omega(x, y, u)$ и $\rho(x, y) \downarrow$ по x на $\mathbb{R}^+$, $\rho(x, y) \downarrow$ по y на $\mathbb{R}^+$, причем $\int\limits_0^\infty x\rho(x, 0)dx < +\infty$, $\rho(0, 0) < +\infty$.

Основным результатом настоящей заметки является следующая:

Теорема 2.1. *При условиях* $a), b), A) - D), I)$ *и* $II)$ *уравнение* (1.1) *имеет положительное решение в пространстве* $L_1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$. *Более того, для всех* $\lambda \in [0, \lambda^*)$ *имеет место включение*

$$e^{\lambda(x+y)} B(x, y) \in L_1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \cap M(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+), \ \text{а} \ e^{\lambda^*(x+y)} B(x, y) \in M(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+). \ (*)$$

Прежде чем перейдем к доказательству сформулированной теоремы, приведем несколько примеров нелинейностей G, ω и ядра V.

Примеры функций G :

1) $G(u) = \gamma(1 - e^{-u})$, $u \in \mathbb{R}^+$, где $\gamma > 1$ – числовой параметр,
2) $G(u) = \frac{\gamma(1-e^{-u})+u}{2}, \quad u \in \mathbb{R}^+$.

Примеры функций ω :

a_1) $\omega(x, y, u) = \dfrac{2e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)}\varepsilon u}{u + \eta e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)}}$, $(x, y, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$,
где $\varepsilon > G'(0) - 1$ – числовой параметр,

a_2) $\omega(x, y, u) = \dfrac{(1 - \delta e^{-u})\, \varepsilon \eta e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)}}{1 - \delta \exp(\eta e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)})}$, $(x, y, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$,
где $\delta \in (0, 1)$ – числовой параметр, а $\exp(A) := e^A$.

Примеры функций V :

b_1) $V(x, y) = \dfrac{4}{\pi} e^{-(x^2+y^2)}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$,

$b_2)$ $V(x,y)=\int\limits_a^b e^{-(x+y)s}Q(s)ds,\ (x,y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, где $Q(s)$ – непрерывная и положительная функция на множестве $[a,b),\ 0<a<b\le+\infty$, причем

$$\int\limits_a^b \frac{Q(s)}{s^2}ds=1. \tag{2.5}$$

Подробно остановимся на примере a_1). Для остальных примеров проверка соответствующих условий осуществляется аналогичным образом. С этой целью докажем следующую простую лемму:

Лемма 2.1. *Имеет место неравенство:* $\lambda^*<\lambda_\varepsilon$.

Доказательство. Предположим обратное: $\lambda^*\ge\lambda_\varepsilon$. Тогда из этого неравенства, в силу условия II) сразу следует оценка:

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)}V(x,y)dxdy\ge\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-\lambda^*(x+y)}V(x,y)dxdy. \tag{2.6}$$

В силу определения функции $\chi_a(\lambda)$ из (2.6) получаем $\frac{1}{1+\varepsilon}\ge\frac{1}{G'(0)}$ или $G'(0)\ge 1+\varepsilon$. Последнее неравенство противоречит условию $\varepsilon>G'(0)-1$. $\square$

Вернемся к примеру a_1). Так как $\frac{\partial\omega(x,y,u)}{\partial u}=\frac{2\varepsilon e^{-2\lambda_\varepsilon(x+y)}\eta}{(u+\eta e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)})^2}>0$, то $\omega(x,y,u)\uparrow$ по u. Поскольку $\omega(x,y,u)$ в a_1) из себя представляет непрерывную функцию по совокупности своих аргументов на множестве $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, то условие Каратеодори (см условие B)) также выполняется. Заметим, что $\omega(x,y,\eta e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)})=\varepsilon\eta e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, т.е. условие C) выполняется очевидным образом. Проверим условие D). Во - первых, несложно заметить, что $\sup\limits_{u\in\mathbb{R}^+}\omega(x,y,u)=2\varepsilon e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$. Следовательно, $\rho(x,y)=2\varepsilon e^{-(\lambda_\varepsilon-\lambda^*)(x+y)}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$. Используя доказанную лемму, можем утверждать, что $\rho(x,y)\downarrow$ по x на $\mathbb{R}^+,\rho(x,y)\downarrow$ по y на $\mathbb{R}^+$ и $\int\limits_0^\infty x\rho(x,0)dx=2\varepsilon\int\limits_0^\infty xe^{-(\lambda_\varepsilon-\lambda^*)x}dx=\frac{2\varepsilon}{(\lambda_\varepsilon-\lambda^*)^2}<+\infty$. Итак, для примера a_1) условия $A)-D)$ выполнены.

3. Доказательство основного результата

Перейдем к доказательству сформулированной теоремы.

Доказательство. Введем следующие последовательные приближения для уравнения (1.1):

(3.1)
$$B_{n+1}(x,y)=\int\limits_x^\infty\int\limits_y^\infty V(x'-x,y'-y)\{G(B_n(x',y'))+\omega(x',y',B_n(x',y'))\}dy'dx',$$
$$B_0(x,y)=\eta e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)},\quad (x,y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+,\quad n=0,1,2,\ldots,$$

где число $\eta>0$ определяется из условия $b)$, а λ_ε – из характеристического уравнения $\chi_{1+\varepsilon}(\lambda)=1$.

Индукцией по n докажем, что

$$B_n(x,y)\uparrow \text{ по } n. \tag{3.2}$$

Сперва проверим неравенство $B_1(x,y)\geq B_0(x,y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$. Действительно, во-первых заметим, что из условий $a)$ и $b)$ немедленно следует, что $G(u)\geq u$, когда $u\in[0,\eta]$. Учитывая последнее неравенство, условия $C), II), I)$, из (3.1) имеем

$$B_1(x,y)\geq\int\limits_x^\infty\int\limits_y^\infty V(x'-x,y'-y)(\eta e^{-\lambda_\varepsilon(x'+y')}+\eta\varepsilon e^{-\lambda_\varepsilon(x'+y')})dy'dx'=$$

$$=\eta(1+\varepsilon)\int\limits_x^\infty\int\limits_y^\infty V(x'-x,y'-y)e^{-\lambda_\varepsilon(x'+y')}dy'dx'=$$

$$=\eta(1+\varepsilon)\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty V(t_1,t_2)e^{-\lambda_\varepsilon(x+t_1+t_2+y)}dt_2dt_1=$$

$$=\eta(1+\varepsilon)e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty V(t_1,t_2)e^{-\lambda_\varepsilon(t_1+t_2)}dt_2dt_1=$$

$$=\eta e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)}\chi_{1+\varepsilon}(\lambda_\varepsilon)=\eta e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)}=B_0(x,y).$$

Предполагая, что $B_n(x,y)\geq B_{n-1}(x,y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ при некотором $n\in\mathbb{N}$, при этом учитывая монотонность функций G,ω (см. условие A) и условия на функцию G) по переменной u на $\mathbb{R}^+$ и положительность ядра V, из (3.1) получаем, что $B_{n+1}(x,y)\geq B_n(x,y),(x,y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$. Имея ввиду непрерывность функции $G(u)$ и условие Каратеодори на функцию $\omega(x,y,u)$ (см. условие B)), индукцией несложно проверить, что каждый элемент функциональной последовательности $\{B_n(x,y)\}_{n=0}^\infty$ является измеримой функцией на множестве $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$.

Теперь наряду с уравнением (1.1) рассмотрим следующее одномерное интегральное уравнение типа Вольтерра:

$$f(x) = g(x) + \int_x^\infty T(x'-x) f(x') dx', \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{3.3}$$

оноситeльно искомой измеримой функции $f(x)$, где

$$g(x) := \frac{\rho(x,0)}{G'(0)}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.4}$$

$$T(x) = \int_0^\infty \tilde{V}(x,y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.5}$$

а $\tilde{V}(x,y)$ допускает представление вида:

$$\tilde{V}(x,y) = G'(0) V(x,y) e^{-\lambda^*(x+y)}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+. \tag{3.6}$$

Из условий A) и D) немедленно следует, что

$$g(x) \geq 0,\, x \in \mathbb{R}^+,\, g \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad m(g) := \int_0^\infty x g(x) dx < +\infty. \tag{3.7}$$

Так как число λ^* - единственное решение характеристического уравнения $\chi_{G'(0)}(\lambda) = 1$, то из (3.5) и (3.6) следует, что ядро $T(x)$ удовлетворяет условию консервативности:

$$T(x) > 0,\, x \in \mathbb{R}^+,\, \int_0^\infty T(x) dx = 1. \tag{3.8}$$

Таким образом, учитывая (3.7) и (3.8) из результатов работы [8] следует, что уравнение (3.3) имеет положительное суммируемое решение $f(x)$. Убедимся, что данное решение является также ограниченной функцией. Действительно, так как $\rho(x,0) \leq \rho(0,0) < +\infty$, $G'(0) > 1$, $x \in \mathbb{R}^+$, с учетом условия I), и суммируемости на $\mathbb{R}^+$ решения $f(x)$ из (3.3) будем иметь

$$f(x) \leq \rho(0,0) + \frac{G'(0)}{\lambda^*} \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} \{V(x,y)\} e^{-\lambda^* x} \int_x^\infty f(x') dx' \leq$$

$$\leq \rho(0,0) + \frac{G'(0)}{\lambda^*} \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} \{V(x,y)\} \int_0^\infty f(x') dx' < +\infty, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Итак, уравнение (3.3) обладает положительным суммируемым и ограниченным на множестве $\mathbb{R}^+$ решением $f(x)$.

Рассмотрим теперь следующее нелинейное двумерное интегральное уравнение с нелинейностью G :

$$F(x,y) = g_0(x,y) + \int\limits_x^\infty \int\limits_y^\infty V(x'-x, y'-y) G(F(x',y')) dy' dx', \quad (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \tag{3.9}$$

относительно искомой функции $F(x,y)$, где

$$g_0(x,y) := \int\limits_x^\infty \int\limits_y^\infty V(x'-x, y'-y) \rho(x',y') e^{-\lambda^*(x'+y')} dy' dx', \quad (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+. \tag{3.10}$$

Сперва убедимся, что

$$0 \le g_0(x,y) \le \frac{\rho(x,0)}{G'(0)} e^{-\lambda^*(x+y)}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+. \tag{3.11}$$

Действительно, неотрицательность функции g_0 сразу вытекает из условий $II)$ и $A)$. Учитывая условие $D)$ и тот факт, что $\chi_{G'(0)}(\lambda^*) = 1$, из (3.10) получим

$$g_0(x,y) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty V(t_1,t_2) \rho(x+t_1, y+t_2) e^{-\lambda^*(x+t_1+y+t_2)} dt_2 dt_1 \le$$

$$\le e^{-\lambda^*(x+y)} \rho(x,0) \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty V(t_1,t_2) e^{-\lambda^*(t_1+t_2)} dt_2 dt_1 = \frac{\rho(x,0)}{G'(0)} e^{-\lambda^*(x+y)}, \ (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

Рассмотрим теперь следующие простые итерации для вспомогательного уравнения (3.9):

$$\begin{gathered} F_{n+1}(x,y) = g_0(x,y) + \int\limits_x^\infty \int\limits_y^\infty V(x'-x, y'-y) G(F_n(x',y')) dy' dx', \\ F_0(x,y) = g_0(x,y), \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+. \end{gathered} \tag{3.12}$$

Учитывая неотрицательность функции g_0, положительность ядра V и монотонность нелинейности G индукцией по n несложно доказать, что

$$F_n(x,y) \uparrow \text{ по } n, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+. \tag{3.13}$$

В силу непрерывности G и условия $B)$ индукцией можно также проверить, что каждый элемент из функциональной последовательности $\{F_n(x,y)\}_{n=0}^\infty$ является измеримой функцией на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Ниже подробно докажем, что

$$F_n(x,y) \le e^{-\lambda^*(x+y)} f(x), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{3.14}$$

Неравенство (3.14) для $n = 0$ сразу следует из цепочки неравенств:

$$F_0(x,y) = g_0(x,y) \le \frac{\rho(x,0)}{G'(0)} e^{-\lambda^*(x+y)} = g(x) e^{-\lambda^*(x+y)} \le f(x) e^{-\lambda^*(x+y)}, \ (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

Предположим, что (3.14) имеет место при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда учитывая неравенства (1.2), (3.11), монотонность функции G и положительность ядра V, а также обозначения (3.5), (3.6), из (3.12) будем иметь

$$F_{n+1}(x,y) \leq g_0(x,y) + \int_x^\infty \int_y^\infty V(x'-x, y'-y) G(e^{-\lambda^*(x'+y')} f(x')) dy' dx' \leq$$

$$\leq \frac{\rho(x,0)}{G'(0)} e^{-\lambda^*(x+y)} + G'(0) \int_x^\infty \int_y^\infty V(x'-x, y'-y) e^{-\lambda^*(x'+y')} f(x') dy' dx' =$$

$$= \frac{\rho(x,0)}{G'(0)} e^{-\lambda^*(x+y)} + e^{-\lambda^* y} G'(0) \int_x^\infty f(x') e^{-\lambda^* x'} \int_0^\infty V(x'-x, z) e^{-\lambda^* z} dz dx' =$$

$$= \frac{\rho(x,0)}{G'(0)} e^{-\lambda^*(x+y)} + e^{-\lambda^*(x+y)} \int_x^\infty T(x-x') f(x') dx' = f(x) e^{-\lambda^*(x+y)}.$$

Таким образом из (3.13) и (3.14) получаем поточечную сходимость последовательности измеримых функций $\{F_n(x,y)\}_{n=0}^\infty : \lim\limits_{n\to\infty} F_n(x,y) = F(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Согласно предельной теореме Б. Леви (см. [9]) $F(x,y)$ почти всюду на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ удовлетворяет уравнению (3.9).

Из (3.13) и (3.14) следует также, что предельная функция $F(x,y)$ удовлетворяет следующему двустороннему неравенству:

$$g_0(x,y) \leq F(x,y) \leq e^{-\lambda^*(x+y)} f(x), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+. \tag{3.15}$$

Так как $f \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap M(\mathbb{R}^+)$ и $g_0(x,y) \geq 0$, $(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, то из (3.15), во - первых, получаем, что $F \in L_1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \cap M(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$, а, во - вторых,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty F(x,y) dx dy \leq \frac{1}{\lambda^*} \int_0^\infty e^{-\lambda^* x} f(x) dx < +\infty.$$

Наконец перейдем к уравнению (1.1). В последовательных приближениях (3.1) докажем, что

$$B_n(x,y) \leq \eta e^{-\lambda^*(x+y)} + F(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{3.16}$$

Так как $\lambda_\varepsilon > \lambda^*$ (см. лемму), то в силу (3.15) имеем

$$B_0(x,y) = \eta e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)} \leq \eta e^{-\lambda^*(x+y)} \leq \eta e^{-\lambda^*(x+y)} + F(x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

Предполагая, что неравенство (3.16) выполняется при некотором натуральном n, при этом имея в виду положительность ядра V монотонность функций G, ω а также следующее легко проверяемое неравенство для выпуклых вверх функций (со свойствами a) и b)) (см. например [10]): $G(u_1+u_2)\leq G(u_1)+G(u_2)$, $u_1,u_2\in\mathbb{R}^+$, из (3.1) получаем

$$B_{n+1}(x,y)\leq\int\limits_x^\infty\int\limits_y^\infty V(x'-x,y'-y)\{G(\eta e^{-\lambda^*(x'+y')}+F(x',y'))+$$

$$+\omega(x',y',\eta e^{-\lambda^*(x'+y')}+F(x',y'))\}dy'dx'\leq$$

$$\leq\int\limits_x^\infty\int\limits_y^\infty V(x'-x,y'-y)\{G(\eta e^{-\lambda^*(x'+y')}+F(x',y'))+\rho(x',y')e^{-\lambda^*(x'+y')}\}dy'dx'\leq$$

$$\leq\int\limits_x^\infty\int\limits_y^\infty V(x'-x,y'-y)G(\eta e^{-\lambda^*(x'+y')})dy'dx'+$$

$$+\int\limits_x^\infty\int\limits_y^\infty V(x'-x,y'-y)G(F(x',y'))dy'dx'+g_0(x,y)\leq$$

$$\leq F(x,y)+\eta G'(0)\int\limits_x^\infty\int\limits_y^\infty V(x'-x,y'-y)e^{-\lambda^*(x'+y')}dy'dx'=$$

$$=F(x,y)+\eta G'(0)e^{-\lambda^*(x+y)}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty V(t_1,t_2)e^{-\lambda^*(t_1+t_2)}dt_2dt_1=$$

$$=F(x,y)+\eta e^{-\lambda^*(x+y)}\chi_{G'(0)}(\lambda^*)=F(x,y)+\eta e^{-\lambda^*(x+y)}.$$

Итак, оценка (3.16) доказана. Следовательно, учитывая (3.2) и (3.16) заключаем, что последовательность измеримых функций $\{B_n(x,y)\}_{n=0}^\infty$ имеет поточечный предел при $n\to\infty:\lim\limits_{n\to\infty}B_n(x,y)=B(x,y)$. Предельная функция $B(x,y)$ в силу условия B) и теоремы Б. Леви удовлетворяет почти всюду на $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ уравнению (1.1). Из (3.2) и (3.16) следует также, что имеет место

$$\eta e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)}\leq B(x,y)\leq\eta e^{-\lambda^*(x+y)}+F(x,y),\quad(x,y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+ \tag{3.17}$$

Учитывая (3.15), из (3.17) приходим к двойной оценке

$$\eta e^{-\lambda_\varepsilon(x+y)}\leq B(x,y)\leq\eta e^{-\lambda^*(x+y)}+e^{-\lambda^*(x+y)}f(x),\quad(x,y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+. \tag{3.18}$$

В силу ограниченности функции $f(x)$, из (3.18), сразу приходим к включениям: $e^{\lambda(x+y)}B(x,y)\in L_1(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+)\cap M(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+)$, $\lambda\in[0,\lambda^*)$, $e^{\lambda^*(x+y)}B(x,y)\in M(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+)$. □

Замечание 3.1. *Вопрос единственности построенного решения до сих пор остается открытой проблемой.*

Замечание 3.2. *На самом деле для решения* $B(x, y)$ *мы получили более сильную асимптотику (см.* (3.18)*), из которой, в частности, следует* $(*)$.

Abstract. In this note, we study a class of two-dimensional integral equations of the Volterra type with monotonic nonlinearity on a quarter-plane. Such equations are encountered in the dynamical theory of p - adic strings. A constructive existence theorem is proved for a positive summable and bounded solution. The asymptotic behavior of the solution at infinity is studied. Specific examples of the corresponding kernels and nonlinearities are also given.

Список литературы

[1] А. Я. Малкин, А. И. Исаев, "Реология: концепции, методы, приложения", СПб: Профессия (2007).

[2] А. Р. Ржаницын, Теория ползучести, М.: Стройиздат (1968).

[3] А. Н. Тында, А. Е. Романов, "Численное решение нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с дробно-экспоненциальными ядрами реологических моделей вязкоупругой среды", Изв. Иркутского гос. универс., серия математика, **5**, no. 2, 69 – 80 (2012).

[4] И. Я. Арефьева, "Скатывающиеся решения полевых уравнений на неэкстремальных бранах и в р-адических струнах", Избранные вопросы р-адической математической физики и анализа, Сборник статей, К 80-летию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимирова, Тр. МИАН, **245**, Наука, М., 47 – 54 (2004).

[5] В. С. Владимиров, Я. И. Волович, "О нелинейном уравнении динамики в теории p - адической струны", ТМФ, **138**, no. 3, 355 – 368 (2004).

[6] Х. А. Хачатрян, "О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории р-адической струны", Изв. РАН. Сер. матем., **82**:2, 172 – 193 (2018).

[7] Kh. A. Khachatryan, Ts. E. Terdzhyan, M. F. Broyan, "One - parameter family of integrable solution of a system of nonlinear integral equations of the Hammerstein-Volterra type in the supercritical case", Differential Equations, **52**, no. 8, 1036 – 1042 (2016).

[8] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги науки и техн., Сер. Мат. анал., **22**, ВИНИТИ, М., 175 – 244 (1984).

[9] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, "Элементы теории функций и функционального анализа", М.: Наука (1980).

[10] А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян, "Асимптотическое поведение решения для одного класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в задаче распределения дохода", Тр. ИММ УрО РАН, **27**, no. 1, 188 – 206 (2021).

Поступила 22 декабря 2021

После доработки 01 апреля 2022

Принята к публикации 20 апреля 2022