

О ПОСТРОЕНИИ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М. Г. Мурадян

<https://doi.org/10.54503/0002-3043-2022.57.5-44-54>

Армянский государственный экономический университет

E-mail: *maxim_muradyan@yahoo.com*

Аннотация. Предлагается способ построения общего решения $2n$ -мерной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, фундаментальная система которой состоит из n ограниченных и n неограниченных решений при $t \rightarrow \infty$. Алгоритм основан на предварительном решении двух матричных алгебраических уравнений Риккати и устойчивых линейных задач Коши. Метод реализован для конечномерного уравнения переноса излучения, а также для линейной гамильтоновой системы.

MSC2020 number: 34A30; 70H05; 85A25.

Ключевые слова: неустойчивая система; алгебраическое уравнение Риккати; уравнение переноса излучения; гамильтонова система.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается $2n$ -мерная система дифференциальных уравнений

$$(1.1) \quad \frac{dx}{dt} = Ax + By, \quad -\frac{dy}{dt} = Cx + Dy, \quad 0 \leq t \leq r,$$

где A , B , C и D – независимые от t вещественные матрицы n -ого порядка. Предполагается, что среди собственных значений матрицы коэффициентов имеются числа как с положительными, так и с отрицательными вещественными частями, т.е. система (1.1) неустойчива.

Надо отметить, что структура общего решения системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами хорошо известна и существуют различные алгоритмы построения ее общего решения в том или другом случае. Однако, непосредственное построение общего решения путем нахождения собственных чисел и собственных векторов довольно трудоемко (особенно если матрица коэффициентов большого размера) и мало применяется на практике. Процесс для неустойчивой системы усложняется тем, что наряду с убывающими, имеются и быстро возрастающие частные решения, которые численно определить с

удовлетворительной точностью очень трудно, особенно если промежуток интегрирования не мал. Более того, даже если частные решения и будут определены, для удовлетворения начальных или краевых условий, придется решить плохо обусловленную систему алгебраических уравнений.

Ниже всюду предполагается, что фундаментальная система уравнения (1.1) состоит из n ограниченных и n неограниченных решений при $t \rightarrow +\infty$. На основе этого в п.2 предполагается, что следующие две задачи однозначно разрешимы.

Задача А. Система (1.1) рассматривается на полуоси $[0; +\infty)$, к уравнениям (1.1) присоединяются условия

$$(1.2) \quad x(0) = \alpha, \quad y(t) \text{ ограничено при } t \rightarrow +\infty.$$

Задача В. Система (1.1) рассматривается на $(-\infty; r]$, к уравнениям (1.1) присоединяются условия

$$(1.3) \quad y(r) = \beta, \quad x(t) \text{ ограничено при } t \rightarrow -\infty.$$

В настоящей работе предлагается способ построения общего решения системы (1.1). В наших построениях центральное место занимают алгебраические уравнения Риккати вида

$$(1.4) \quad \rho A + D\rho + \rho B\rho + C = 0.$$

Связь между матричными уравнениями Риккати и системами линейных дифференциальных уравнений давно известна и стала основой плодотворных математических построений и эффективных численных алгоритмов. Поскольку система (1.1) рассматривается на конечном промежутке, то, вообще говоря, она ассоциируется с дифференциальным уравнением Риккати

$$(1.5) \quad \frac{dR}{dt} + RA + DR + RBR + C = 0, \quad 0 \leq t \leq r.$$

Уравнение (1.5) получается, если при решении краевых или начальных задач для системы (1.1) использовать соотношение $y(t) = R(t)x(t)$, $0 \leq t \leq r$, последующим дифференцированием этого равенства.

Использование алгебраического уравнения Риккати связано с полубесконечным интервалом времени, поэтому, при решении задач на конечном промежутке, механическая аппроксимация дифференциального уравнения Риккати (1.5) соответствующим алгебраическим уравнением (1.4) вряд ли приведет к удовлетворительной точности, особенно если интервал $[0; r]$ не очень велик.

В настоящей работе общее решение системы (1.1) на конечном промежутке получено посредством алгебраических уравнений Риккати, фактически минуя дифференциальные уравнения Риккати типа (1.5).

В п.2 излагается общая схема построения общего решения системы (1.1). В остальных параграфах работы изложено применение развитого метода в некоторых конкретных приложениях.

2. ОБЩАЯ СХЕМА

Рассмотрим две задачи для матричной системы дифференциальных уравнений

$$(2.1) \quad \frac{dX}{dt} = AX + BY, \quad -\frac{dY}{dt} = CX + DY,$$

где $X(t)$ и $Y(t)$ – матрицы n -ого порядка.

Задача АМ. Система (2.1) рассматривается на полуоси $[0; +\infty)$, к ней присоединяются условия (I – единичная матрица)

$$(2.2) \quad X(0) = I, \quad Y(t) \text{ ограничена при } t \rightarrow +\infty.$$

Задача ВМ. Система (2.1) рассматривается на $(-\infty; r]$, к ней присоединяются условия

$$(2.3) \quad Y(r) = I, \quad X(t) \text{ ограничена при } t \rightarrow -\infty.$$

Очевидно, задачи (2.1)-(2.2) и (2.1)-(2.3) однозначно разрешимы.

Пусть $X(t), Y(t)$ решение задачи (2.1)-(2.2). Очевидно $X(t+t_0), Y(t+t_0)$ также удовлетворяют этой задаче, но с начальным значением $X(t_0)$, при $t = 0$. Этим же условиям удовлетворяют также матрицы-функции $X(t)X(t_0)$ и $Y(t)X(t_0)$. Поэтому, из однозначной разрешимости задачи АМ следует, что

$$X(t+t_0) = X(t)X(t_0), \quad Y(t+t_0) = Y(t)X(t_0).$$

Первое равенство означает, что множество $X(t)$ составляет полугруппу, а из второго соотношения следует, что

$$(2.4) \quad Y(t) = Y(0)X(t), \quad 0 \leq t < \infty.$$

Лемма 2.1. Матрица $X(t)$ обратимая при всех $t \in [0; +\infty)$.

Доказательство. Пусть для некоторого t_0 , $\det X(t_0) = 0$. Следовательно, для некоторого ненулевого вектора σ выполняется равенство $X(t_0)\sigma = 0$. Из (2.4)

следует также $Y(t_0)\sigma = 0$. Теперь из (2.1)-(2.2) имеем, что вектор функции $X(t)\sigma$, $Y(t)\sigma$ удовлетворяют системе (1.1) с начальным условием $X(0)\sigma = \sigma$. Однако, как решение задачи Коши с нулевыми начальными условиями, $X(t)\sigma = 0$, $Y(t)\sigma = 0$ при всех $t \in [0; +\infty)$, что противоречит условию $X(0)\sigma = \sigma$. Следовательно равенство $\det X(t_0) = 0$ невозможно. Лемма доказана.

Обозначим $Y(0) = \rho^+$, имеем также, что $\rho^+ = Y(t)X^{-1}(t)$. Дифференцируя обе части равенства (2.4), с учетом уравнений (2.1), а также леммы 2.1, для матрицы ρ^+ получаем матричное уравнение Риккати

$$(2.5) \quad \rho A + D\rho + \rho B\rho + C = 0.$$

Так как $Y(t)$ ограничена при $t \rightarrow +\infty$, то из структуры общего решения линейной системы следует, что $X(t)$ также ограничена при $t \rightarrow +\infty$. Следовательно, $X(t)$ определяется из устойчивой задачи Коши

$$(2.6) \quad \frac{dX}{dt} = (A + B\rho^+)X, \quad X(0) = I.$$

Обозначим решение задачи (2.6) через $X^+(t)$. Таким образом нами доказана

Теорема 2.1. *Уравнение (2.5) имеет такое решение ρ^+ , что задача Коши (2.6) является устойчивой. При любом векторе u , пара вектор функций $x(t) = X^+(t)u$, $y(t) = \rho^+ X^+(t)u$ при $t \rightarrow +\infty$ является ограниченным решением системы (1.1).*

Рассматривая задачи В и ВМ, аналогичным путем можно доказать теорему.

Теорема 2.2. *Матричное уравнение Риккати*

$$(2.7) \quad A\rho + \rho D + \rho C\rho + B = 0$$

имеет такое решение ρ^- , что решение $Y^-(t)$ задачи Коши

$$(2.8) \quad -\frac{dY}{dt} = (D + C\rho^-)Y, \quad Y(r) = I, \quad -\infty < t \leq r$$

ограничено при $t \rightarrow -\infty$. Для любого вектора v , пара вектор функций $x(t) = \rho^- Y^-(t)v$, $y(t) = Y^-(t)v$ при $t \rightarrow -\infty$ является ограниченным решением системы (1.1).

Комбинируя теоремы 2.1 и 2.2, получаем следующее утверждение. Для произвольных векторов u и v пара вектор функций

$$(2.9) \quad \begin{aligned} x(t) &= X^+(t)u + \rho^- Y^-(t)v, \\ y(t) &= \rho^+ X^+(t)u + Y^-(t)v \end{aligned}$$

являются решением системы (1.1) на любом промежутке $[0; r]$.

Теорема 2.3. *Если матрица $I - \rho^- \rho^+$ неособенная, то формулы (2.9) представляют общее решение системы (1.1).*

Доказательство. Докажем, что подходящим выбором векторов u и v можно из (2.9) выделить решение системы (1.1) с произвольными начальными условиями $x(0) = \alpha$, $y(0) = \beta$. Действительно, из (2.9) имеем

$$(2.10) \quad \begin{cases} u + \rho^- Y^-(0)v = \alpha, \\ \rho^+ u + Y^-(0)v = \beta. \end{cases}$$

Умножая второе уравнение слева на ρ^- и вычитая из первого уравнения, получаем

$$(I - \rho^- \rho^+)u = \alpha - \rho^- \beta.$$

Если матрица $I - \rho^- \rho^+$ неособенная, то из этого уравнения определяется вектор u , после него из второго уравнения (2.10), с учетом $\det Y^-(0) \neq 0$, определяется вектор v . Теорема доказана.

Сформулируем алгоритм построения общего решения системы (1.1)

- а) Из уравнений (2.5) и (2.7) определяются матрицы ρ^+ и ρ^- соответственно. Единственный аргумент их выбора является устойчивость матриц $A + B\rho^+$ и $D + C\rho^-$.
- б) Из устойчивых задач Коши (2.6) и (2.8) определяются матрицы $X^+(t)$ и $Y^-(t)$ при $t \in [0; r]$.
- в) Общее решение строится по формулам (2.9).

Во многих приложениях, например в теории переноса излучения, рассматривается краевая задача для системы (1.1)

$$(2.11) \quad x(0) = \alpha, \quad y(r) = \beta \quad 0 \leq t \leq r,$$

На основе представления (2.9), аналогично доказательству теоремы 2.3, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2.4. *Если матрица $I - X^-(0)Y^+(r)$ обратимая, то краевая задача (1.1)-(2.11) однозначно разрешима.*

3. КОНЕЧНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Вследствии дискретизации по направлениям, частотам и др. уравнение переноса излучения сводится к системе дифференциальных уравнений [1, 2]

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= (-A + L^+)x + L^-y, \\ -\frac{dy}{d\tau} &= L^-x + (-A + L^+)y, \quad 0 \leq \tau \leq r. \end{aligned}$$

Здесь A и $L^\pm$ независимые от τ квадратные матрицы порядка n , A – диагональная матрица с положительными элементами a_i , $L^\pm = (\ell_{ij}^\pm)$ – неотрицательные матрицы, причем L^- – неразложимая матрица. Матрицы $L^\pm$ и A связаны условием балантности

$$(3.2) \quad \sum_{j=1}^n (\ell_{ij}^+ + \ell_{ij}^-) = \lambda a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где $\lambda \in (0; 1]$ – вероятность выживания частицы при элементарном акте рассеяния, n -мерные вектор-функции $x(\tau)$ и $y(\tau)$ – интенсивности излучения на глубине τ по направлениям возрастания и убывания τ соответственно.

Обычно различают две принципиально различные ситуации: диссипативный случай, когда $\lambda < 1$, и консервативный случай, когда $\lambda = 1$.

Некоторые результаты настоящего раздела синтезированы из результатов ранее опубликованных работ автора [3, 4].

Для системы (3.1) роль алгебраического уравнения Риккати (2.5) играет следующее уравнение, относительно квадратной матрицы $\rho = (\rho_{i,j})$:

$$(3.3) \quad A\rho + \rho A = L^- + L^+\rho + \rho L^+ + \rho L^-\rho.$$

Уравнение (3.3) является конечномерным аналогом известного в астрофизике уравнения Амбарцумяна относительно коэффициента яркости для задачи переноса излучения в однородном полупространстве [5]. Разработан (см. [6]) устойчивый алгоритм определения “физического” решения уравнения (3.3). Оно является пределом следующих монотонно возрастающих итераций

$$A\rho_{n+1} + \rho_{n+1}A = L^- + L^+\rho_n + \rho_n L^+ + \rho_n L^-\rho_n, \quad \rho_0 = 0,$$

и обладает свойством

$$(3.4) \quad \rho_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n \rho_{ij} \leq \lambda, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Теорема 3.1. *Для уравнения (3.1) задачи A и B однозначно разрешимы.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что для системы (3.1) матричные уравнения (2.5) и (2.7) совпадают. Поэтому в качестве ρ^- можно взять матрицу ρ^+ , где под ρ^+ подразумевается физическое решение уравнения (3.3). Поэтому имеем, что $A + B\rho^+ = D + C\rho^-$. Таким образом матрицы $X^+(\tau)$ и $Y^-(\tau)$ удовлетворяют задачам Коши:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= (-A + L^+ + L^-\rho^+)X, & -\frac{dY}{d\tau} &= (-A + L^+ + L^-\rho^+)Y, \\ X(0) &= I, \quad t \geq 0, & Y(r) &= I, \quad t \leq r. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $Y^-(\tau) = X^+(r - \tau)$.

Докажем, что спектр системы (3.1) является объединением спектров матриц $-A + L^+ + L^-\rho^+$ и $-(-A + L^+ + L^-\rho^+)$. Пусть λ – собственное значение матрицы $-A + L^+ + L^-\rho^+$, а u – соответствующий собственный вектор $(-A + L^+ + L^-\rho^+)u = \lambda u$. Из (3.3) следует равенство $\rho^+(-A + L^+ + L^-\rho^+) = -L^- + A\rho^+ - L^+\rho^+$. Поэтому $(-L^- + A\rho^+ - L^+\rho^+)u = \lambda\rho^+u$. Из этих равенств следует, что

$$\begin{pmatrix} -A + L^+ & L^- \\ -L^- & A - L^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \rho^+u \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ \rho^+u \end{pmatrix},$$

т.е. λ является собственным значением матрицы коэффициентов G системы (3.1).

Пусть теперь λ является собственным значением матрицы $-(-A + L^+ + L^-\rho^+)$, а v – соответствующий собственный вектор $(-A + L^+ + L^-\rho^+)v = -\lambda v$. Пользуясь тем, что ρ^+ удовлетворяет уравнению (3.3), нетрудно проверить, что имеет место равенство

$$\begin{pmatrix} -A + L^+ & L^- \\ -L^- & A - L^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho^+v \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \rho^+v \\ v \end{pmatrix},$$

т.е. λ является собственным значением матрицы коэффициентов G .

Убедимся, что собственные значения матрицы $Q = -A + L^+ + L^-\rho^+$ имеют неположительные вещественные части. Действительно, так как матрица $\rho = (\rho_{ij})$ удовлетворяет условиям (3.4), то с учетом (3.2), имеем

$$Q_{ij} \geq 0, \quad i \neq j, \quad \sum_{j=1}^n Q_{ij} \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где Q_{ij} – элементы матрицы Q . Согласно известным результатам теории матриц (см. напр. [7], с. 419) собственные значения матрицы Q неположительны.

Таким образом матрица G имеет n собственных значений с неположительными вещественными частями и еще n собственных значений – с неотрицательными вещественными частями.

В диссипативном случае (когда $\lambda < 1$), этот результат можно уточнить, а именно, в этом случае вещественные части всех собственных значений матрицы Q отрицательные числа [7]. Отсюда следует, что в диссипативном случае система (3.1) имеет ровно n линейно независимых решений, стремящихся к нулю при $\tau \rightarrow +\infty$, и n решений – стремящихся к нулю при $\tau \rightarrow -\infty$. Поэтому задачи А и В в диссипативном случае однозначно разрешимы.

В консервативном случае (когда $\lambda = 1$) 0 является двукратным собственным значением матрицы G , причем в этом случае [8]

$$\rho_{ij} \geq 0 \quad \sum_{j=1}^m \rho_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

В работе [4] доказано, что в консервативном случае также задачи А и В имеют единственное решение. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что для системы (3.1) справедливы утверждения теорем 2.1 и 2.2. Так как матрицы $\rho^\pm$ удовлетворяют условиям (3.4), то в диссипативном случае это условие обеспечивает обратимость матрицы $I - \rho^- \rho^+$ (см напр. [7]), поэтому справедлив аналог представления (2.9).

Теорема 3.2. *Общее решение системы (3.1) в диссипативном случае представляется в виде (u и v произвольные n -мерные векторы)*

$$\begin{aligned} x(\tau) &= X(\tau)u + \rho X(r - \tau)v, \\ y(\tau) &= \rho X(\tau)u + X(r - \tau)v, \quad 0 \leq \tau \leq r, \end{aligned}$$

где ρ – решение матричного уравнения (3.3), удовлетворяющая условиям (3.4), а матрица $X(\tau)$ есть решение задачи Коши

$$\frac{dX}{d\tau} = (-A + L^+ + \rho L^-)X, \quad X(0) = I.$$

В работе [4], посредством матриц ρ и $X(\tau)$ получено также общее решение системы (3.1) в консервативном случае.

4. ГАМИЛЬТОНОВА ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА

Когда функция Гамильтона есть вещественная квадратичная форма переменных $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$, то гамильтонова система принимает вид (см. напр. [9])

$$(4.1) \quad \frac{dx}{dt} = Ax + By, \quad -\frac{dy}{dt} = Cx + A'y, \quad 0 \leq t \leq r,$$

где A , B и C независимые от t квадратные матрицы n -ого порядка, а A' – транспонированная матрица, причем C и B симметрические матрицы.

Уравнение Гамильтона (также называемое каноническим уравнением) является одним из основных уравнений теоретической механики. Оно играет важную роль в теории динамических систем, в теории оптимального управления и т.д.

В настоящем разделе результаты п.2 распространяются на систему (4.1). Основой для этого служит следующий хорошо известный факт [9]: спектр гамильтоновой системы расположен симметрично (с учетом кратности) относительно мнимой оси, т.е. если $\alpha + i\beta$ – собственное значение матрицы коэффициентов системы (4.1), то собственным значением является также число $-\alpha + i\beta$.

Рассмотрим тот случай, когда фундаментальная система уравнения (4.1) состоит из n ограниченных и n неограниченных решений при $t \rightarrow +\infty$. Следовательно, задачи А и В для уравнения (4.1) однозначно разрешимы.

Для системы (4.1) уравнения Риккати (2.5) и (2.7) принимают вид

$$(4.2) \quad \rho A + A' \rho + \rho B \rho + C = 0, \quad A \rho + \rho A' + \rho C \rho + B = 0$$

Из теорем 2.1 и 2.2 следует, что эти уравнения, соответственно, имеют такие решения ρ^+ и ρ^- , что следующие задачи Коши устойчивы, первое при $t \rightarrow +\infty$, а второе – при $t \rightarrow -\infty$

$$(4.3) \quad \frac{dX}{dt} = (A + B\rho^+)X, \quad X(0) = I; \quad -\frac{dY}{dt} = (A' + C\rho^-)Y, \quad Y(r) = I.$$

Таким образом, для реализации нашего подхода, вопрос сводится к определению матриц ρ^+ и ρ^- . В теории оптимального управления, для численного решения уравнений (4.2), помимо других методов (см. напр. [10], применяют также итерационный процесс, основой которого служит метод Ньютона решения нелинейных уравнений [11]).

Для первого уравнения (4.2) определяется последовательность $\{\rho_n\}$ следующим соотношением

$$(4.4) \quad \rho_{n+1}(A + B\rho_n) + (A + B\rho_n)' \rho_{n+1} = \rho_n B \rho_n - C,$$

где матрица ρ_0 выбирается так, чтобы была симметрической, а матрица $A + B\rho_0$ была устойчивой. Эти соотношения (для каждого n) можно представить как уравнение следующего типа относительно матрицы ρ_{n+1}

$$(4.5) \quad VL + L'V = -W.$$

Уравнение (4.5), называемая уравнением Ляпунова, хорошо известно и развиты эффективные методы его решения (см. напр. [10]). На каждом шагу решая уравнение Ляпунова определяется матричная последовательность $\{\rho_n\}$.

Если матрица B отрицательно определенная, а C – положительно определенная, то стандартными рассуждениями можно показать, что для каждого n , ρ_n симметрическая, положительно определенная матрица и последовательность $\{\rho_n\}$ монотонно-убывающая (по смыслу положительной определенности) стремится к положительно определенной матрице ρ^+ .

Аналогичным образом организуется также итерационная последовательность для второго нелинейного уравнения (4.2) которая стремится к матрице ρ^- .

Сформулируем теперь следующий способ определения общего решения гамильтоновой системы (4.1).

- (1) Из уравнений (4.2) итерационным путем определяются матрицы ρ^+ и ρ^- соответственно.
- (2) Из устойчивых задач Коши (4.3) определяются матрицы $X^+(t)$ и $Y^-(t)$ на промежутке $[0; r]$.
- (3) Общее решение системы (4.1) строится по формулам (2.9).

В конце отметим, что результаты настоящей работы можно распространить на операторный случай, например, когда A, B, C, D интегральные операторы, независящие от t (для одного частного случая это сделано в работе [12]). Нам кажется, что здесь могут возникнуть трудности в основном технического характера. Нам также кажется, что результаты работы можно распространить на случай периодических матриц коэффициентов A, B, C и D . Для уравнений переноса это сделано в работах [13, 14]. В этом случае алгебраическое уравнение Риккати заменяется дифференциальным уравнением Риккати с периодическими коэффициентами.

Abstract. A method for constructing a general solution for a $2n$ - dimensional system of differential equations with constant coefficients, the fundamental system of which consists of n bounded and n unbounded solutions (as $t \rightarrow \infty$) is proposed. The algorithm is based on preliminary solution of two matrix algebraic Riccati equations and on stable linear Cauchy problems. The proposed method is implemented for the nite dimensional radiative transfer equation, as well as for a linear Hamiltonian system.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. Bellman, G. M. Wing, An Introduction to Invariant Imbedding, N.Y. Wiley and Sons., (1975).
- [2] Alan Ping-I Wang, “Discrete radiative transfer in slabs”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **24**, no. 3, 530 – 544 (1968).
- [3] М. Г. Мурадян, “О решении одной задачи теории переноса”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **33**, no. 2, 271 — 282 (1993).
- [4] М. Г. Мурадян, “К определению операторов отражения и пропускания излучения в плоском слое”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **54**, no. 3, 529 — 535, (2014).
- [5] В. А. Амбарцумян, Научные Труды, **1**, Ереван, изд.-во АН Арм. ССР (1960).
- [6] Н. Б. Енгибарян, Э. А. Мелконян, “Перенос излучения в плоском слое и уравнения Амбарцумяна”, Принцип инвариантности и его приложения, Ереван, Изд-во АН Арм. ССР, 326 — 333 (1989).
- [7] Р. Хорн, Ч. Джонсон, Матричный Анализ, М., Мир (1989).
- [8] М. Г. Мурадян, “Проблема Милна для периодической среды”, Дифференц. уравнения, **40**, no. 8, 1050 — 1058 (2004).
- [9] В. А. Якубович, В. М. Старжинский, Линейные Дифференциальные Уравнения с Периодическими Коэффициентами, М., Наука (1972).
- [10] Ю. Н. Андреев, Управление Конечномерными Линейными Объектами, М., Наука (1976).
- [11] D. L. Kleinman, “On an iterative technique for Riccati equation computations”, IEEE Trans. Autom. Control, AC-13, no. 2, 114 – 115 (1968).
- [12] M. G. Mouradian (Muradyan), “Analytical solution of the linear problem of radiation transfer in a plane Homogeneous Layer”, J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer, **46**, no. 5, 477 – 481 (1991).
- [13] М. Г. Мурадян, “Построение общего решения линейного уравнения переноса для периодической среды”, Дифференц. уравнения, **31**, no. 5, 885 — 887 (1995).
- [14] М. Г. Мурадян, “Аналитическое решение задачи переноса излучения в периодической среде”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **37**, no. 7, 794 — 798 (1997).

Поступила 23 декабря 2021

После доработки 01 апреля 2022

Принята к публикации 20 апреля 2022