

О СРАВНЕНИИ МОЩНОСТИ ЧАСТИЧНО ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

В. Н. Маргарян, Г. Г. Казарян

<https://doi.org/10.54503/0002-3043-2022.57.5-25-33-43>

Российско - Армянский Университет¹

Институт Математики Академии Наук Армении

E-mails: *vachagan.margaryan@yahoo.com; haikghazaryan@mail.ru*

Аннотация. Сравниваются частично гипоэллиптические (по Гордингу, Мальгранжу и Эренпрейсу) и (частично) - гипоэллиптические по Буренкову операторы (многочлены). Получаются условия при которых добавление младших членов к частично - гипоэллиптическому оператору (многочлену) данного типа не нарушает тип его частной гипоэллиптичности.

MSC2020 number: 12E10; 26C05; 35H10; 35G05.

Ключевые слова: гипоэллиптический (по Хёрмандеру); частично гипоэллиптический (по Гордингу, Мальгранжу, Эренпрейсу и Буренкову) оператор (многочлен); младшие члены.

1. ВВЕДЕНИЕ. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Пусть $\mathbb{N}$ множество всех натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_0^n := \mathbb{N}_0 \times \dots \times \mathbb{N}_0$ – множество n - мерных мультииндексов, т.е. точек $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_j \in \mathbb{N}_0$, $(j = 1, \dots, n)$, $\mathbb{R}^n$ n -мерное евклидово пространство вещественных точек $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\mathbb{R}^{n,0} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_n \neq 0\}$ и $\mathbb{R}^{n,+} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_j \geq 0 (j = 1, \dots, n)\}$.

Для $\nu \in \mathbb{R}^{n,+}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ и $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k < n$ положим $(\xi, \nu) := \xi_1 \nu_1 + \dots + \xi_n \nu_n$, $|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_n$, $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}$, $\xi' := (\xi_1, \dots, \xi_k)$, $\xi'' := (\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$, $\xi = (\xi', \xi'')$. $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ ($j = 1, \dots, n$).

Пусть $R(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$ многочлен с постоянными коэффициентами, где сумма распространяется по конечному набору мультииндексов $(R) := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \gamma_{\alpha} \neq 0\}$.

Введем еще следующие обозначения: для многочлена R и числа $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k < n$: через (r) обозначим множество мультииндексов $\alpha' \in \mathbb{N}_0^k$ для которых

¹Исследование выполнено при финансовой поддержки тематического фонда Российско - Армянского университета министерства образования и науки Российской Федерации.

существует мультииндекс $\alpha'' \in \mathbb{N}_0^{n-k}$ такой, что $\alpha := (\alpha', \alpha'') \in (R)$, а для $\alpha' \in (r)$ обозначим $(r_{\alpha'}) := \{\alpha'' \in \mathbb{N}_0^{n-k}, \alpha := (\alpha', \alpha'') \in (R)\}$ и положим

$$r_{\alpha'}(\xi'') := \sum_{\alpha'' \in (r_{\alpha'})} \gamma_{(\alpha', \alpha'')}(\xi'')^{\alpha''}.$$

Тогда многочлен R можно представить в виде

$$(1.1) \quad R(\xi) = \sum_{\alpha' \in (r)} (\xi')^{\alpha'} r_{\alpha'}(\xi'').$$

Определение 1.1 (см. [1], определение 11.1.2 и теорему 11.1.3). Многочлен R называется гипоеллиптическим, если $R^{(\alpha)}(\xi)/R(\xi) := D^\alpha R(\xi)/R(\xi) \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ для любого $0 \neq \alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Определение 1.2 (см. [2], [3] или [1], определение 11.2.4 и теорему 11.3.3). Многочлен R называется частично гипоеллиптическим по Гордингу - Мальгранжу (далее Г - М - гипоеллиптическим) относительно переменных $\xi'' := (\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$ $1 \leq k < n$, если (см. представление (1.1)) многочлен $r_{\alpha'}(\xi'')$ является гипоеллиптическим относительно ξ'' и для любого $0 \neq \alpha' \in \mathbb{N}_0^k$ $r_{\alpha'}(\xi'')/r_{0'}(\xi'') \rightarrow 0$ при $|\xi''| \rightarrow \infty$.

Определение 1.3 (см. [4] - [5]) Многочлен R называется гипоеллиптическим по Буренкову (далее Б - гипоеллиптическим) относительно переменных $\xi' := (\xi_1, \dots, \xi_k)$ $1 \leq k < n$, если $|R^{(\alpha')}(\xi)|/[1 + |R(\xi)|] \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ для любого $0 \neq \alpha' \in \mathbb{N}_0^k$.

Определение 1.4 (см. [6] и [1] определение 10.3.4) Говорят, что оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) мощнее (соответственно сильнее) оператора $Q(D)$ (многочлена $Q(\xi)$) и пишут $Q < P$, (соответственно $Q \prec P$,) если с некоторой постоянной $C > 0$ $|Q(\xi)| \leq C[1 + |P(\xi)|]$ (соответственно $\tilde{Q}(\xi) \leq C\tilde{P}(\xi)$, где для оператора $R(D)$ — функция Л. Хёрмандера, определяемая формулой $\tilde{R}(\xi) := \sqrt{\sum_{|\alpha| \geq 0} |D^\alpha(\xi)|^2}$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$).

Пусть $\mathfrak{M} = \{\alpha^1, \dots, \alpha^M\}$ набор мультииндексов. Многогранником Ньютона набора $\mathfrak{M}$ назовем наименьший выпуклый многогранник $\mathfrak{R}(\mathfrak{M})$, содержащий все точки $\mathfrak{M}$. Многогранником Ньютона оператора $R(D)$ (многочлена $R(\xi)$) назовем многогранник Ньютона $\mathfrak{R}((R))$ набора $(R) \cup \{0\}$.

Определение 1.5 (см. [7]) Оператор $R(D)$ (многочлен $R(\xi)$) назовем регулярным (или невырожденным), если существует число $c > 0$ такое, что

$$\sum_{\nu \in \mathfrak{R}((R))} |\xi^\nu| \leq c[1 + |R(\xi)|] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Гладкость решений линейных дифференциальных уравнений часто определяется поведением на бесконечности символа (характеристического многочлена) соответствующего дифференциального оператора. Например, эллиптическим уравнениям, все непрерывные решения которых являются аналитическими функциями (вещественных переменных), соответствуют символы, которые бесконечно возрастают при стремлении аргумента на бесконечность. При этом, скорость такого стремления является оптимальной, т.е. если

$$(1.1)' \quad R(D) = \sum_{k=0}^m R_{m-k}(D) =: \sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha|=m-k} \gamma_{\alpha} D^{\alpha}$$

эллиптический оператор порядка $ord R = m$, то существует число $\sigma > 0$ такое, что $|R_m(\xi)| + 1 \geq \sigma [|\xi|^m + 1] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$. Отсюда следует, в частности, что а) $Q < R$ (следовательно $Q \prec R$) для любого оператора Q порядок которого не превосходит m , б) к эллиптическому оператору можно добавить любой оператор Q порядка $ord Q < m$, не нарушая его эллиптичность.

Гипоэллиптическим операторам, все непрерывные решения отвечающих им уравнений которых являются бесконечно дифференцируемыми функциями, также соответствуют символы, которые бесконечно возрастают при стремлении аргумента на бесконечность (см. [1], теорема 11.1.3). Однако добавление младшего члена (конечно представляет интерес только случай когда его порядок строго меньше порядка данного оператора) может нарушить его гипоэллиптичность.

Символы гиперболических (по Гордингу) операторов уже могут не возрастать на бесконечности. Однако оказывается, что если (см. представление (1.1)') главная часть $R_m(D)$ оператора $R(D)$ гиперболическа, то оператор $R(D)$ является гиперболическим тогда и только тогда, когда $R_{m-k} \prec R_m$ для всех $k = 1, 2, \dots, m$ (см. [7] - [8] или [1] теорема 12.4.6).

Нахождению условий, при которых тот или иной младший член можно добавить к данному гипоэллиптическому оператору, не нарушая его гипоэллиптичность, посвящены много работ (см., например [9] - [11]). Но сравнительно мало изучен этот вопрос для разных частично гипоэллиптических операторов.

Настоящая заметка посвящена этому вопросу и, непосредственно связанный с этой тематикой, вопросу о сравнении частично гипоэллиптических операторов разных типов.

Сначала докажем несколько вспомогательных предложений, которыми будем пользоваться при получении основных результатов.

Лемма 1.1. Пусть многочлен $P(\xi) = P(\xi', \xi'')$ Γ - M - гипозэллиптичен относительно ξ'' и $Q < P$. Тогда существует постоянная $c > 0$ такая, что (см. представление (1.1) где многочлены $\{p_{\alpha'}\}$, и $\{q_{\alpha'}\}$ и множества (p) и (q) для многочленов P и Q определяются аналогично тому, как это делалось для многочлена R)

$$(1.2) \quad \sum_{\alpha' \in (q)} |q_{\alpha'}(\xi'')| \leq c [|p_{0'}(\xi'')| + 1] \quad \forall \xi'' \in \mathbb{R}^{n-k}.$$

Доказательство. Из условия леммы на многочлен P (см. определение 1.2) следует существование постоянной $c_1 \geq 1$ такой, что

$$c_1^{-1} [|p_{0'}(\xi'')| + 1] \leq |P(\xi)| + 1 \leq c_1 [|p_{0'}(\xi'')| + 1] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad |\xi'| \leq 1.$$

Отсюда и из условия $Q < P$ следует существование числа $c_2 > 0$ такого, что

$$(1.3) \quad |Q(\xi)| \leq c_2 [|p_{0'}(\xi'')| + 1] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad |\xi'| \leq 1.$$

Пусть m' размерность пространства многочленов от k переменных с комплексными коэффициентами степень которых не превышает $d_q := \max\{|\alpha'|, \alpha' \in (q)\}$ и пусть множество $\mathcal{A} := \{\tau'(j) \in \mathbb{R}^k, |\tau'(j)| \leq 1\}_{j=1}^{m'}$ определяется так, что любой многочлен от k переменных порядка не выше d_q , обращающийся в нуль на множестве $\mathcal{A}$, обращается в нуль тождественно на $\mathbb{R}^k$. Рассмотрим следующую линейную алгебраическую систему уравнений относительно $\{q_{\alpha'} : \alpha' \in (q)\}$

$$\sum_{\alpha' \in (q)} [\tau'(j)]^{\alpha'} q_{\alpha'}(\xi'') = Q(\tau'(j), \xi'') \quad j = 1, \dots, m'; \quad \xi'' \in \mathbb{R}^{n-k}.$$

Из определения множества $\mathcal{A}$ следует, что эта система однозначно разрешима и для любого мультииндекса $\alpha' \in (q)$ существуют числа $\{c_{\alpha', j}\}_{j=1}^{m'}$ такие, что $q_{\alpha'}(\xi'') = \sum_{j=1}^{m'} c_{\alpha', j} Q(\tau'(j), \xi'')$ для всех $\xi'' \in \mathbb{R}^{n-k}$, откуда, в силу (1.3), следует утверждение Леммы 1.1. $\square$

Ниже мы будем пользоваться следующим легко проверяемым предложением

Предложение 1.1. Пусть $r \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq \Lambda \subset \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| = r\}$. Тогда существуют векторы $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_j > 0 \ (j = 1, \dots, n)$ и $\beta \in \Lambda$ такие, что

$$(\lambda, \beta) > \max\{(\lambda, \alpha) \mid \alpha \in \Lambda \setminus \{\beta\}\},$$

$$(\lambda, \beta) > (\lambda, \alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \quad |\alpha| < r,$$

$$(\lambda, \beta) < (\lambda, \alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \quad |\alpha| > r.$$

Лемма 1.2. Если $(q) \setminus \{0'\} \neq \emptyset$, то, при условиях леммы 1.1 $|q_{\alpha'}(\xi'')| / [|p_{0'}(\xi'')| + 1] \rightarrow 0$ при $|\xi''| \rightarrow \infty$ для любого $\alpha \in (q) : |\alpha'| \neq 0$.

Доказательство. Предположим обратное, что при условиях леммы существуют постоянная $c_1 > 0$, мультииндекс $\beta' \in (q) : |\beta'| \neq 0$ и последовательность $\{\xi''(s)\}_{s=1}^\infty : |\xi''(s)| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ такие, что

$$(1.4) \quad |q_{\beta'}(\xi''(s))| \geq c_1 [|p_{0'}(\xi''(s))| + 1] \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Обозначим $t_s := \max_{0' \neq \alpha' \in (q)} |q_{\alpha'}(\xi''(s))|$ ($s = 1, 2, \dots$). В силу конечности множества (q) существует мультииндекс $\gamma' \in (q) : |\gamma'| \neq 0$ и подпоследовательность последовательности $\{\xi''(s)\}_{s=1}^\infty$ (которую, не умаляя общности, также обозначим через $\{\xi''(s)\}_{s=1}^\infty$) для которых $|q_{\gamma'}(\xi''(s))| = t_s$ для всех $s = 1, 2, \dots$.

Пусть $(q)_l := \{\beta' \in (q), |\beta'| = l \text{ } (l = 1, 2, \dots)\}$ и r максимальная длина тех $\alpha' \in (q) : |\alpha'| \neq 0$ для которых $\sum_{\alpha' \in (q)_r} |q_{\alpha'}(\xi''(s))|/t_s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Тогда, за счет выбора подпоследовательности последовательности $\{\xi''(s)\}_{s=1}^\infty$ (которую также обозначим через $\{\xi''(s)\}_{s=1}^\infty$) и определения числа r получаем существование числа $c_2 \geq 1$ такого, что

$$(1.5) \quad \sum_{\alpha' \in (q)_l} |q_{\alpha'}(\xi''(s))| \leq c_2 t_s \quad l = 1, \dots, r-1, \quad s = 1, 2, \dots,$$

$$(1.6) \quad \sum_{\alpha' \in (q)_r} |q_{\alpha'}(\xi''(s))| \leq c_2 t_s \quad s = 1, 2, \dots$$

и при $s \rightarrow \infty$

$$(1.7) \quad \sum_{\alpha' \in (q)_j} |q_{\alpha'}(\xi''(s))|/t_s \rightarrow 0 \quad j > r.$$

Из определения и конечности множества $(q)_r$ следует, что существуют подпоследовательность последовательности $\{\xi''(s)\}_{s=1}^\infty$ (которую также обозначим через $\{\xi''(s)\}_{s=1}^\infty$), непустое множество $\mathbb{B}(q) \subset (q)_r$ и постоянная $c_3 > 0$ для которых при всех $\alpha' \in \mathbb{B}(q)$ (см. определение последовательности $\{t_s\}_{s=1}^\infty$)

$$(1.8) \quad c_3^{-1} t_s \leq |q_{\alpha'}(\xi''(s))| \leq c_3 t_s \quad s = 1, 2, \dots, \quad s = 1, 2, \dots$$

и для любого $\beta' \in (q)_r \setminus \mathbb{B}(q)$ при $s \rightarrow \infty$

$$(1.9) \quad |q_{\alpha'}(\xi''(s))|/t_s \rightarrow 0.$$

В силу определения последовательности $\{t_s\}$ из оценки (1.4) имеем

$$(1.10) \quad t_s \geq c_1/c_3 [|p_{0'}(\xi''(s))| + 1], \quad s = 1, 2, \dots$$

Так как $\mathbb{B}(q) \neq \emptyset$, то в силу предложения 1.1 существует вектор $\lambda' = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, $\lambda_j > 0$ ($j = 1, \dots, k$) и мультииндекс $\delta' \in \mathbb{B}(q)$ такие, что

$$(1.11) \quad (\lambda', \delta') > (\lambda', \alpha') \quad \forall \alpha' \in (q)_l, \quad l < r,$$

$$(1.12) \quad (\lambda', \delta') > (\lambda', \alpha') \quad \forall \alpha' \in \mathbb{B}(q) \setminus \{\delta'\},$$

$$(1.13) \quad (\lambda', \delta') < (\lambda', \alpha') \quad \forall \alpha' \in (q)_l, \quad l > r,$$

Для каждого $s \in \mathbb{N}$ обозначим

$$\theta_s := \min \left\{ \min_{\alpha' \in (q)_r \setminus \mathbb{B}(q)} \left| \frac{q_{\delta'}(\xi''(s))}{q_{\alpha'}(\xi''(s))} \right|^{2/(\lambda', \alpha')}, \right. \\ \left. \min_{\alpha' \in (q)_l, l > r} \left| \frac{q_{\delta'}(\xi''(s))}{q_{\alpha'}(\xi''(s))} \right|^{1/[(\lambda', \alpha') - (\lambda', \delta')]}, \min_{0' \neq \alpha' \in (p)} \left| \frac{p_{0'}(\xi''(s))}{p_{\alpha'}(\xi''(s))} \right|^{1/(\lambda', \alpha')} \right\}.$$

Так как $|\xi''(s)| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, то из частичной гипоеллиптичности многочлена P , из соотношений (1.9), (1.7) и из оценки (1.8), в силу соотношений (1.9) и (1.11) имеем, что $\theta_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$.

Положим $\xi(s) = (\xi'(s), \xi''(s))$, где $\xi'(s) = (\theta_s^{\lambda_1/2}, \dots, \theta_s^{\lambda_k/2})$ и рассмотрим поведения многочленов P и Q на последовательности $\{\xi(s)\}$ для достаточно больших s .

Так как, в силу определения последовательности $\{\xi(s)\}_{s=1}^\infty$, $p_{0'}(\xi''(s)) \neq 0$ для достаточно больших s (см. определения 1.2 и 1.1), то для достаточно больших s имеем

$$|P(\xi(s))| \leq \sum_{\alpha' \in (p)} \theta_s^{(\lambda', \alpha')} |p_{\alpha'}(\xi''(s))| = |p_{0'}(\xi''(s))| \left[1 + \sum_{0' \neq \alpha' \in (p)} \theta_s^{(\lambda', \alpha')} \left| \frac{p_{\alpha'}(\xi''(s))}{p_{0'}(\xi''(s))} \right| \right] \\ \leq |p_{0'}(\xi''(s))| \left[1 + \sum_{0' \neq \alpha' \in (p)} \theta_s^{-(\lambda', \alpha')} \right].$$

Так как координаты λ' положительны и $\theta_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, то отсюда получаем при $s \rightarrow \infty$

$$(1.14) \quad |P(\xi(s))| = |p_{0'}(\xi''(s))| [1 + o(1)].$$

Рассмотрим следующие четыре возможных случая 1) $\alpha' \in (q)_l$ и $l < r$, 2) $\alpha' \in (q)_l$ и $l > r$ 3) $\alpha' \in (q)_r \setminus \mathbb{B}(q)$, 4) $\alpha' \in \mathbb{B}(q) \setminus \{\delta'\}$.

В случае 1) $\alpha' \in (q)_l$ и $l < r$ в силу определения последовательности $\{\xi(s)\}$ и оценок (1.11), (1.5), (1.8) имеем при $s \rightarrow \infty$

$$(1.15) \quad \left| \frac{(\xi'(s))^{\alpha'} q_{\alpha'}(\xi''(s))}{(\xi'(s))^{\delta'} q_{\delta'}(\xi''(s))} \right| = \theta_s^{[(\lambda', \alpha') - (\lambda', \delta')]/2} \left| \frac{q_{\alpha'}(\xi''(s))}{q_{\delta'}(\xi''(s))} \right| \\ \leq \theta_s^{[(\lambda', \alpha') - (\lambda', \delta')]/2} \frac{c_2 t_s}{c_4^{-1} t_s} \rightarrow 0.$$

В случае 2) $\alpha' \in (q)_l$ и $l > r$ в силу определения последовательности $\{\xi(s)\}$ и неравенства (1.13) аналогично имеем при $s \rightarrow \infty$

$$(1.16) \quad \left| \frac{(\xi'(s))^{\alpha'} q_{\alpha'}(\xi''(s))}{(\xi'(s))^{\delta'} q_{\delta'}(\xi''(s))} \right| \leq \theta_s^{[(\lambda', \alpha') - (\lambda', \delta')]/2} \theta_s^{-[(\lambda', \alpha') - (\lambda', \delta')]} \\ = \theta_s^{-[(\lambda', \alpha') - (\lambda', \delta')]/2} \rightarrow 0.$$

В случае 3) $\alpha' \in (q)_r \setminus \mathbb{B}(q)$, в силу определения последовательности $\{\xi(s)\}$, имеем при $s \rightarrow \infty$

$$(1.17) \quad \left| \frac{(\xi'(s))^{\alpha'} q_{\alpha'}(\xi''(s))}{(\xi'(s))^{\delta'} q_{\delta'}(\xi''(s))} \right| = \theta_s^{[(\lambda', \alpha') - (\lambda', \delta')]/2} \left| \frac{q_{\alpha'}(\xi''(s))}{q_{\delta'}(\xi''(s))} \right| \leq \theta_s^{-(\lambda', \delta')/2} \rightarrow 0.$$

В случае 4) $\alpha' \in \mathbb{B}(q) \setminus \{\delta'\}$. в силу определения последовательности $\{\xi(s)\}$ и неравенств (1.8), (1.12) имеем при $s \rightarrow \infty$

$$(1.18) \quad \left| \frac{(\xi'(s))^{\alpha'} q_{\alpha'}(\xi''(s))}{(\xi'(s))^{\delta'} q_{\delta'}(\xi''(s))} \right| \leq \theta_s^{[(\lambda', \alpha') - (\lambda', \delta')]/2} \frac{c_4 t_s}{c_4^{-1} t_s} \rightarrow 0.$$

Из соотношений (1.15) - (1.18), в силу неравенства (1.8) имеем при $s \rightarrow \infty$

$$(1.19) \quad |Q(\xi(s))| \geq |(\xi'(s))^{\delta'} q_{\delta'}(\xi''(s))| - \sum_{\alpha' \in (q) \setminus \{\delta'\}} |(\xi'(s))^{\alpha'} q_{\alpha'}(\xi''(s))| \\ = \theta_s^{(\lambda', \delta')/2} |q_{\delta'}(\xi''(s))| [1 - o(1)] \geq c_4^{-1} t_s \theta_s^{(\lambda', \delta')/2} [1 - o(1)].$$

Так как $\theta_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ то отсюда, в силу (1.14), получаем, что $|Q(\xi(s))|/[1 + |P(\xi(s))|] \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$. Это противоречит условиям леммы и доказывает лемму. Лемма 1.2 доказана. $\square$

Докажем еще следующее вспомогательное предположение, которое понадобится нам далее

Лемма 1.3. Пусть многочлены P и Q такие, что $|Q(\xi)|/[1 + |P(\xi)|] \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$. Тогда при для любых $l, r \in \mathbb{N}$, $l > r$ и $x \rightarrow \infty$

$$(1.20) \quad f(x) := \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{|x^r Q(\xi)|}{1 + |x^l Q(\xi)| + |P(\xi)|} \rightarrow 0.$$

Доказательство. Легко усматреть, что при условиях леммы функция f непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^{1,+}$. Предположим обратное, что при условиях леммы соотношение (1.20) нарушается, т.е. существует последовательность $\{x_s\}_{s=1}^{\infty}$ такая, что $x_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ и число $c > 0$ такие, что

$$(1.21) \quad f(x_s) \geq c \quad s = 1, 2, \dots$$

Из определения функции f в силу (1.21) имеем, что для любого $s \in \mathbb{N}$ существует точка $\xi(s) \in \mathbb{R}^n$ такая, что

$$(1.22) \quad \frac{|x_s^r Q(\xi(s))|}{1 + |x_s^l Q(\xi(s))| + |P(\xi(s))|} \geq \frac{c}{2} \quad s = 1, 2, \dots$$

Из (1.22) следует, что $Q(\xi(s)) \neq 0 \quad s = 1, 2, \dots$. Следовательно при $s \rightarrow \infty$ имеем

$$\frac{c}{2} \leq \frac{|x_s^r Q(\xi(s))|}{|x_s^l Q(\xi(s))|} = x_s^{r-l} \rightarrow 0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Всюду ниже будем считать, что изучаемые многочлены $P, Q, R, \dots$ представлены в виде (1.1), где $1 \leq k < n$, $\xi' := (\xi_1, \dots, \xi_k)$, $\xi'' := (\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$, $\xi = (\xi', \xi'')$.

Теорема 2.1. Пусть многочлен $P(\xi) = P(\xi', \xi'')$ Γ - M - гипозэллиптичен относительно группы переменных ξ'' и $Q < P$. Тогда многочлен $R(\xi) := P(\xi) + Q(\xi) - Q_{0'}(\xi)$ также Γ - M - гипозэллиптичен относительно ξ'' .

Доказательство. Из определения многочлена R следует, что $r_{0'}(\xi'') = p_{0''}(\xi'')$ и $r_{\alpha'}(\xi'') = p_{\alpha'}(\xi'') + q_{\alpha'}(\xi'')$ для любого $\alpha' \in \mathbb{N}_0^k$.

Так как в силу условия теоремы многочлен $p_{0''}(\xi'')$ гипозэллиптичен как многочлен от ξ'' , то многочлен $r_{0'}(\xi'')$ гипозэллиптичен как многочлен от ξ'' . С другой стороны, из условия теоремы на многочлен P (см. определение 1.2) и леммы 1.2 для любого $0 \neq \alpha' \in \mathbb{N}_0^k$ имеем $|r_{\alpha'}(\xi'')|/|p_{0'}(\xi'')| \leq [p_{\alpha'}(\xi'') + |q_{\alpha'}(\xi'')|]/|p_{0'}(\xi'')| \rightarrow 0$ при $|\xi''| \rightarrow \infty$.

Откуда (см. определение 1.2) получаем, что многочлен $R(\xi)$ Γ - M - гипозэллиптичен относительно переменных ξ'' . $\square$

Следствие 2.1. Пусть многочлен $P(\xi) = P(\xi', \xi'')$ Γ - M - гипозэллиптичен относительно группы переменных ξ'' . Если для многочлена $Q(\xi'')$ существуют мультииндекс $0' \neq \alpha' \in \mathbb{N}_0^k$ и число $c > 0$ такие, что $|(\xi')^{\alpha'} Q(\xi'')| \leq c [|P(\xi)| + 1] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$, то для любого мультииндекса $\beta' \in \mathbb{N}_0^k$ многочлен $P(\xi) + (\xi')^{\beta'} Q(\xi'')$ Γ - M - гипозэллиптичен относительно ξ'' .

Теорема 2.2. Пусть многочлен $P(\xi) = P(\xi', \xi'')$ B - гипозэллиптичен относительно группы переменных ξ' , при этом многочлен $p_{0'}(\xi'') = P(0', \xi'')$ гипозэллиптичен как многочлен от ξ'' . Тогда многочлен P Γ - M - гипозэллиптичен относительно ξ'' .

Доказательство. По определению 1.2 достаточно показать, что $p_{\alpha'}(\xi'')/p_{0'}(\xi'') \rightarrow 0$ при $|\xi''| \rightarrow \infty$. В силу условия теоремы для любого $0 \neq \alpha' \in \mathbb{N}_0^k$ имеем при $|\xi''| \rightarrow \infty$

$$\frac{|p_{\alpha'}(\xi'')|}{|p_{0'}(\xi'')|} = \frac{|D^{\alpha'} P(\xi', \xi'')|}{\alpha'! |P(\xi', \xi'')|} \Big|_{\xi'=0} \rightarrow 0,$$

что доказывает теорему, так как по условию теоремы многочлен $p_{0'}(\xi'')$ гипоеллиптичен относительно ξ'' . $\square$

Следствие 2.1. Пусть многочлен $P(\xi) = P(\xi', \xi'')$ Б - гиперболичен относительно ξ' , при этом многочлен $p_{0'}(\xi'') = P(0', \xi'')$ гипоеллиптичен как многочлен от ξ'' . Если $Q < P$, то многочлен $R(\xi) := P(\xi) + Q(\xi) - Q_{0'}(\xi)$ является Г-М - гипоеллиптическим относительно ξ'' .

Теорема 2.3. Пусть $k = n - 1$, $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, $\xi'' = \xi_n$. Если отличный от постоянной многочлен $P(\xi) = P(\xi', \xi'')$ Б - гиперболичен относительно ξ' , то многочлен P Г - М - гипоеллиптичен относительно ξ_n .

Доказательство. Из Б - гиперболичности относительно ξ' , многочлена P следует, что для любого $0 \neq \alpha \in \mathbb{N}_0^{n-1}$ при $\xi'' = \xi_n \rightarrow \infty$

$$(2.1) \quad \frac{|p_{\alpha'}(\xi_n)|}{1 + |p_{0'}(\xi_n)|} = \frac{|(D^{\alpha'} P)(\xi', \xi_n)|}{1 + |P(\xi', \xi_n)|} \Big|_{\xi'=0} \rightarrow 0.$$

Так как мультииндексы $\{\alpha'\}$ и последовательности $\{\xi_n\}$ произвольные, то их можно выбирать так, чтобы $p_{\alpha'}(\xi_n) \neq 0$ для всех ξ_n из этой последовательности. Тогда из (2.1) следует, что $ord_{p_{0'}}(\xi_n) \geq 1$. Так как любой многочлен одного переменного, отличный от постоянной, гипоеллиптичен, то утверждение настоящей теоремы непосредственно следует из теоремы 2.2. $\square$

На примерах покажем, что требование $k = n - 1$ в этой теореме является существенным.

Пример 2.1. Пусть $n = 3$, $k = 1$, т.е. $\xi' = \xi_1$, $\xi'' = (\xi_2, \xi_3)$, $P(\xi) = (\xi_2^2 - \xi_3^2)^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4 + \xi_1^2 (\xi_2^2 + \xi_3^2)$. Легко проверить, что это Б - гипоеллиптический многочлен относительно ξ_1 . Однако из теоремы 2 работы [9] следует, что многочлен $p_{0'}(\xi'') = P(0, \xi_2, \xi_3) = (\xi_2^2 - \xi_3^2)^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4$ как многочлен двух переменных ξ_2, ξ_3 не является гипоеллиптическим, поэтому многочлен P не является частично гипоеллиптическим по ξ_2, ξ_3 .

Пример 2.2. Пусть $n = 3$, $k = 1$, т.е. $\xi' = \xi_1$, $\xi'' = (\xi_2, \xi_3)$, $P(\xi) = \xi_2^6 \xi_3^6 + \xi_2^4 + \xi_3^4 \xi_1^2 (\xi_2^2 + \xi_3^2)$. Легко проверяется, что это Б - гипоеллиптический многочлен относительно ξ_1 .

Так как многогранник Ньютона многочлена $p_{0'} = \xi_2^6 \xi_3^6 + \xi_2^4 + \xi_3^4$ не является вполне правильным, то по лемме 2.1 работы [12] многочлен $p_{0'}$ не является гипозэллиптическим, следовательно, P не является частично гипозэллиптическим по ξ_2, ξ_3 .

Теорема 2.4. Пусть регулярный (см. определение 1.5) многочлен R Γ - M - гипозэллиптичен относительно $\xi'' = (\xi_2, \dots, \xi_n)$. Тогда он B - гипозэллиптичен относительно $\xi' = \xi_1$.

Доказательство. Предположим обратное, что при условиях теоремы, существуют последовательность $\{\xi(s)\}_{s=1}^\infty$ такая, что $|\xi(s)| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, мультииндекс $0 \neq \alpha' = \alpha_1 \in \mathbb{N}$, и число $c_1 > 0$ такие, что

$$(2.2) \quad \frac{|(D_1^{\alpha_1} R)(\xi(s))|}{1 + |R(\xi(s))|} \geq c_1 \quad s = 1, 2, \dots$$

Из условия Γ - M - гипозэллиптичности многочлена P и из оценки (2.2) следует, что $\xi'(s) = \xi_1(s) \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$. Так как многочлен R регулярен, то с некоторыми положительными постоянными c_2 и c_3 имеем (см. представление (1.1))

$$(2.3) \quad \begin{aligned} 1 + |R(\xi(s))| &\geq c_2 \left[1 + \sum_{\beta \in (R)} |\xi^\beta| \right] \\ &\geq c_3 \left[1 + \sum_{\beta' \in (r)} |(\xi')^{\beta'} r_{\beta'}(\xi'')| \right] = c_3 \left[1 + \sum_{\beta_1=0}^M |\xi_1^{\beta_1} r_{\beta_1}(\xi'')| \right]. \end{aligned}$$

Так как из Γ - M - гипозэллиптичности многочлена R относительно $\xi'' = (\xi_2, \dots, \xi_n)$ следует, что $r_{\beta'}(\xi'')/[1 + |r_0(\xi'')|] \rightarrow 0$ при $\xi'' \rightarrow \infty$ то из оценок (2.2) - (2.3), применяя лемму 1.3 имеем, что при $s \rightarrow \infty$

$$c_1 \leq \sum_{\beta_1 \geq \alpha_1} \frac{\beta_1!}{(\beta_1 - \alpha_1)!} \frac{|\xi_1^{\beta_1 - \alpha_1}(s) r_{\beta_1}(\xi''(s))|}{1 + |\xi_1^{\beta_1}(s) r_{\beta_1}(\xi''(s))| + |r_0(\xi''(s))|} \rightarrow 0.$$

Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения теоремы. $\square$

В силу теоремы 2.4 и основной теоремы работы [4] непосредственно следует

Теорема 2.5. Пусть регулярный оператор $P(D', D_n)$ с многогранником Ньютона $\mathfrak{R}(P)$ Γ - M - частично гипозэллиптичен, $r > 0$, $\Omega_r := \{x = (x', x_n); x' \in \mathbb{E}^{n-1}, |x_n| < r\}$. Тогда любое слабое решение u уравнения $P(D', D_n)u = 0$ такое, что $\|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)} < \infty \quad \forall \alpha \in \mathfrak{R}(P)$, является бесконечно дифференцируемой функцией.

Abstract. Partially hypoelliptical operators (according to Gording, Malgrange and Ehrenpreis) and (partially) Burenkov hypoelliptic operators (polynomials) are compared. Conditions are obtained under which the addition of lower terms to a partially hypoelliptic operator (polynomial) of a given type does not violate the type of its partial hypoellipticity.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, **2**, Springer (1983).
- [2] L. Gording, B. Malgrange, “Operateurs différentiels partiellement hypoelliptiques et partiellement elliptiques”, Math. Scand. **9**, 5 – 21 (1961).
- [3] L. Ehrenpreis, “Solutions of some problems of division IV”, American J. Math. **82**, 522 – 588 (1960).
- [4] В. И. Буренков, “Аналог теоремы Хермандера для функций стремящихся к нулю на бесконечности”, Труды Советско - Чехословацкой конференции, Ереван, 63 – 67 (1980).
- [5] V. I. Burenkov, “Conditional hypoellipticity and Fourier multipliers in weighted L_p - spaces with an exponential weight”, Proc. of the Summer School “Function spaces, differential operators, nonlinear analysis”, Stuttgart - Leipzig, Teubner Texte zur Matematik, **133**, 256 – 265 (1993).
- [6] Г. Г. Казарян, “Сравнение дифференциальных операторов и дифференциальные операторы постоянной силы”, ДАН СССР, **208**, no. 6, 1272 – 1275 (1973).
- [7] В. П. Михайлов, “О поведении на бесконечности одного класса многочленов”, Труды МИАН СССР, **91**, 58 – 81 (1967).
- [8] L. Gording, “Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients”, Acta Math. **85**, 1 – 62 (1951).
- [9] L. Svensson, “Necessary and sufficient conditions for the hyperbolicity of polynomials with hyperbolic principal part”, Ark. Mat. **8**, 145 – 162 (1968).
- [10] G. G. Kazaryan, “Estimates of differential operators, and hypoelliptic operators”, Proc. Steklov Inst. Math. **140**, 130 – 161 (1976).
- [11] G. G. Kazaryan, “Hyperbolic operators with given principal parts”, Journal “Differential Equations”, June, **XY**, no. 6, 1059 – 1069 (1979).

Поступила 26 января 2021

После доработки 01 апреля 2022

Принята к публикации 20 апреля 2022