

Известия НАН Армении, Математика, том 57, н. 5, 2022, стр. 15 – 24.

О НЕЛИНЬНОМ УРАВНЕНИИ ФАКТОРИЗАЦИИ В НОРМИРОВАННОМ КОЛЬЦЕ

Н. Б. Енгибарян

<https://doi.org/10.54503/0002-3043-2022.57.5-15-24>

Институт Математики НАН РА

E-mail: *yengib@instmath.sci.am*

Аннотация. Рассмотрена одна общая форма нелинейных уравнений факторизации (НУФ) в кольцах и нормированных кольцах. С применением НУФ получены два основных факта по существованию факторизации, которые труднодоступны или вовсе недоступны способам непосредственного построения обратной факторизации. Первый из них относится к факторизации элементов “близких” к единичному, построенной ранее при сильных дополнительных ограничениях. Второй факт включает факторизацию необратимых элементов в так называемом консервативном случае.

MSC2020 number: 47A68; 46N20.

Ключевые слова: факторизационные структуры в нормированном кольце; нелинейное уравнение факторизации; малая норма; консервативный случай.

ВВЕДЕНИЕ.

В вопросах теории и решения различных классов линейных алгебраических и функциональных уравнений широко применяются методы, сводящие задачу к уравнению с квадратичной нелинейностью. Такие методы, как правило, прямо или косвенно связаны с факторизацией рассматриваемых линейных операторов или их символов в виде произведения более простых (в том или ином смысле) сомножителей.

К “нелинейным” методам факторизации относятся факторизационная трактовка последовательного исключения Гаусса, метод Винера-Хопфа, принцип инвариантности Амбарцумяна [1], [2] и примыкающий к нему метод инвариантного погружения Р. Беллмана [3], метод уравнения Риккати [4].

Хорошо известны также методы построения обратных операторов в факторизованном виде с использованием линейных уравнений факторизации и факторизацию вдоль цепочки ортопроекторов [5].

Автором и соавторами была выполнена серия работ по созданию общей теории нелинейных уравнений факторизации (НУФ) с применением результатов к

решению линейных и нелинейных задач математической физики, теории стохастических процессов и др. (см. [6]-[16] и цитированную в них литературу).

Метод НУФ был наиболее полно разработан для скалярных и векторных уравнений Винера-Хопфа и некоторых других классов уравнений свертки, в основном без привлечения аппарата гармонического анализа. В настоящей работе вводится в рассмотрение одна общая форма НУФ в кольцах и нормированных кольцах. Демонстрируются две возможности НУФ, которые труднодоступны или вовсе недоступны способам непосредственного построения обратной факторизации.

1. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ФАКТОРИЗАЦИИ В КОЛЬЦЕ.

1.1. Факторизационная структура F_0 . Рассмотрим ассоциативное кольцо J с единицей I и нулем 0 . Пусть аддитивная подгруппа G кольца J является прямой суммой своих подгрупп $G^\pm$:

$$(1.1) \quad G = G^+ \oplus G^-.$$

Основное предположение: группы $G^\pm$ обладают следующим совместным мультипликативным свойством:

$$(1.2) \quad \text{если } X^\pm \in G^\pm, \text{ то } X^- X^+ \in G.$$

Единичный элемент I может как принадлежать, так и не принадлежать G^+ или G^- .

Набор $(J, G^\pm)$ назовем факторизационной структурой F_0 .

Пусть в F_0 структуре $G^\pm$ являются кольцами и $X^\pm \in G^\pm$. Элементы $I - X^\pm \in J$ будем считать нормально обратимыми по системе $G^\pm$, если

$$(1.3) \quad \exists (I - X^\pm)^{-1} = I + Y^\pm, \quad Y^\pm \in G^\pm.$$

Задача прямой факторизации: для $A \in G$ найти $X^\pm \in G^\pm$ такие, чтобы имело место разложение

$$(1.4) \quad I - A = (I - X^-) (I - X^+), \quad X^\pm \in G^\pm.$$

Подчеркнем, что обратимость $I - A$ в J не предполагается.

В случае когда $G^\pm$ являются кольцами, факторизация (1.4) называется канонической, если сомножители $I - X^\pm$ нормально обратимы. Тогда из (1.4) следуют существование $(I - A)^{-1} \in J$ и обратная факторизация

$$(1.5) \quad (I - A)^{-1} = (I + Y^+) (I + Y^-), \quad Y^\pm \in G^\pm.$$

Каноническая факторизация единственна.

Факторизация (1.4) является правильной, если хотя бы один из сомножителей нормально обратим. Двойное вырождение соответствует случаю, когда оба сомножителя необратимы.

1.2. Нелинейное уравнение факторизации. Из (1.4) непосредственно следует система нелинейных уравнений относительно $G^\pm$, названная нами нелинейным уравнением факторизации (НУФ).

Обозначим через $P^\pm$ – проекторы, переводящие G в $G^\pm$. Из (1.4) имеем $X^+ + X^- = A + X^- X^+$. Применяя к этому равенству проекторы $P^\pm$, приходим к НУФ относительно $X^\pm \in G^\pm$, где $A^\pm = P^\pm A \in G^\pm$:

$$(1.6) \quad \begin{aligned} X^+ &= A^+ + P^+ (X^- X^+), \\ X^- &= A^- + P^- (X^- X^+). \end{aligned}$$

Пусть теперь $X^\pm \in G^\pm$ удовлетворяют соотношениям (1.6). Сложением этих равенств приходим к (1.4). Имеет место:

Лемма 1.1. *В структуре F_0 факторизация (1.4) эквивалентна НУФ (1.6).*

Под методом НУФ будем понимать построение и применение факторизации (1.4) путем решения системы (1.6).

Будет использована следующая компактная запись системы (1.6):

$$(1.7) \quad X^\pm = A^\pm + P^\pm (X^- X^+).$$

1.3. Симметричный случай. Приведем одно свойство симметрии структуры F_0 и элемента A , в случае выполнения которых система (1.7) обращается в одно уравнение.

Пусть в J определена унитарная операция $*$ сопряжения, обладающая свойствами

$$(1.8) \quad (X^*)^* = X; \quad (X + Y)^* = X^* + Y^*; \quad (XY)^* = Y^* X^*,$$

через A^* обозначается элемент, сопряженный к A . Предполагается, что классы G^+ и G^- взаимно сопряженные:

$$(1.9) \quad \text{если } X \in G^+ \quad (X \in G^-), \quad \text{то } X^* \in G^- \quad (X^* \in G^+).$$

Имеет место:

Лемма 1.2. *Пусть элемент $A \in G$ обладает свойством симметрии*

$$(1.10) \quad A^* = A,$$

а $X \in G^+$ удовлетворяет уравнению

$$(1.11) \quad X = A^+ + P^+ (X^* X).$$

Тогда пара (X, X^*) является решением системы (1.7).

Под симметрическим случаем факторизации (1.4) будем понимать выполнение условий (1.9), (1.10).

Отметим, что система (1.7) может иметь как симметричное решение, так и несимметричное решение, которое будет неединственным.

1.4. Основное решение НУФ. Рассмотрим следующий итерационный процесс для НУФ (1.7):

$$(1.12) \quad X_{n+1}^\pm = A^\pm + P^\pm (X_n^- X_n^+), \quad X_0^\pm = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Рекуррентные соотношения (1.12) определяют последовательности $X_n^\pm$ в $G^\pm$. Если эти последовательности сходятся по некоторой топологии,

$$(X_n^+, X_n^-) \rightarrow (X^+, X^-)$$

и предел удовлетворяет НУФ (1.7), то этот предел назовем его основным решением. В симметрическом случае в (1.12) имеем $(X_n^-)^* = X_n^+ = X_n$, где X_n определяется из простых итераций для (1.11).

2. НУФ в нормированном кольце.

2.1. Факторизационные структуры F_1 и F . Рассмотрим структуру F_0 при следующих дополнительных предположениях.

- Исходное кольцо J является нормированным кольцом (банаховой алгеброй);
- Классы $G^\pm$ являются подпространствами в пространстве J ;
- Проекторы $P^\pm$ суть непрерывные операторы в G ,

$$(2.1) \quad \|P^\pm U\| \leq c \|U\|, \quad U \in G, \quad c > 0.$$

Факторизационную структуру, обладающую указанными свойствами, назовем структурой F_1 .

Структуру F_1 в случае когда классы $G^\pm$ являются подкольцами исходного кольца J , назовем структурой F .

В структуре F применимо понятие нормальной обратимости (1.3). В случае существования канонической факторизации (1.4) оператор $(I - A)^{-1} \in J$ может не принадлежать классу G .

2.2. Примеры структур F и F_1 . Задачи вольтерровой факторизации интегральных операторов (второго рода) с ядрами Гильберта-Шмидта относятся к структурам типа F .

В случае интегрального уравнения с многопарным ядром, которое эквивалентно краевой задаче для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, НУФ обращается в задачу Коши для скалярного или векторного уравнения типа Риккати.

Важные примеры F структуры, в которой класс G не замкнут относительно умножения, связаны с интегральными и дискретными уравнениями Винера-Хопфа (см. [7], [10]).

В случае уравнения Винера-Хопфа с абсолютно монотонной ядерной функцией, НУФ сводится к обобщенному уравнению Амбарцумяна.

Рассмотренная в работе [12] задача невольтерровой факторизации интегральных операторов относится к структуре типа F_1 .

2.3. Разрешимость НУФ (1.6) в случае малой нормы A . В главе IV монографии [5] содержится основная теорема 5.1 о существовании обратной факторизации вида (1.5) в нормированном кольце вдоль цепочки. Теорема опирается на лемму 4.1 этой главы, которая имеет долгую историю развития. В условиях леммы предполагается, что кольцо обладает рядом дополнительных свойств, а элемент A имеет достаточно малую норму.

Ниже будет показано, что применение НУФ позволяет простыми средствами получить обобщение и усиление отмеченной леммы в произвольной F -структуре. Будем следовать работе [14].

Рассмотрим структуру типа F_1 . Введем в G новую норму, эквивалентную норме в J . Пусть $U^\pm \in G^\pm$. Определим норму пары (U^+, U^-) по формуле

$$(2.2) \quad \|(U^+, U^-)\| = \max(\|U^+\|, \|U^-\|).$$

Запишем систему (1.6) в следующей операторной форме:

$$(2.3) \quad (X^+, X^-) = H(X^+, X^-).$$

Здесь H оператор, действующий в $G^+ \times G^-$ согласно равенствам

$$(2.4) \quad Z^\pm = H^\pm (S^+, S^-) =: A^\pm + P^\pm (S^- S^+).$$

Из (2.1) и определения (2.2) нормы в $G^+ \times G^-$ следует непрерывность отображения $S = U^+ U^-$ из $G^+ \times G^-$ в G и тем самым – непрерывность оператора H .

Запишем итерации (1.12) в виде

$$(2.5) \quad (X_{n+1}^+, X_{n+1}^-) = H (X_n^+, X_n^-), \quad X_0^\pm = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Пусть последовательность (X_n^+, X_n^-) сходится в $G^+ \times G^-$:

$$(2.6) \quad (X_n^+, X_n^-) \rightarrow (X^+, X^-) \in G^+ \times G^-.$$

В силу непрерывности H , в (2.5) можно совершить предельный переход, поэтому пара (X^+, X^-) является основным решением НУФ (2.3).

Лемма 2.1. Пусть в случае структуры F_1 число $\mu_0 > 0$ удовлетворяет условию

$$(2.7) \quad q = \frac{1}{c} \left(1 - \sqrt{1 - 4c^2 \mu_0} \right) < 1$$

и выполняется неравенство $0 < \mu \leq \mu_0$ где $\mu = \|A\|$. Тогда НУФ (2.3) обладает основным решением (X^+, X^-) , причем $\|X^\pm\| < 1$. В случае структуры F этому решению соответствуют каноническая факторизация (1.4) и обратная факторизация (1.5).

Доказательство. Обозначим через $\sigma_r \subset G^+ \times G^-$ замкнутый шар радиуса r с центром в нуле. Из (2.4), с учетом неравенств (2.1) получаем: $\|Z^\pm\| \leq c\mu + c\|S^+\|\|S^-\|$, поэтому $\|Z\| \leq c\mu + c\|S\|^2$. Отсюда следует, что при $4c^2\mu < 1$ оператор H переводит шар σ_ρ радиуса $\rho = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c^2\mu}}{2c}$ в себя. При достаточно малом $\mu > 0$ выполняется неравенство $q = 2\rho < 1$. Покажем, что тогда оператор H сжимающий в σ_ρ с коэффициентом сжатия q . Пусть $(\tilde{Z}^+, \tilde{Z}^-) = H(\tilde{S}^+, \tilde{S}^-)$, где $(\tilde{S}^+, \tilde{S}^-) \in \sigma_\rho$. Обозначим $\delta^\pm = \tilde{S}^\pm - S^\pm$, $\varepsilon^\pm = \tilde{Z}^\pm - Z^\pm$. Из (2.4) и из соответствующих соотношений для $\tilde{Z}^\pm$ получаем $\varepsilon^\pm = P^\pm (\tilde{W}^+ \delta^- + \delta^+ W^-)$. Следовательно, $\|(\varepsilon^+, \varepsilon^-)\| \leq q \|(\delta^+, \delta^-)\|$. Поэтому итерации (2.5) (и (1.12)) сходятся к единственному решению (X^+, X^-) системы (1.7) в σ_ρ . Лемма доказана. $\square$

В условиях леммы простые итерации для уравнения (1.11) сходятся к (X^+, X^-) при произвольном начальном приближении из σ_ρ .

Замечание 2.1. В лемме 2.1 не фигурирует операция умножения элементов J на скаляр. Поэтому требование линейной структуры пространства J можно несколько ослабить. Представляет интерес рассмотрение такой структуры типа F_0 , в которой кольцо J является полным метрическим пространством с метрикой ρ , инвариантной относительно сдвига, то есть $\rho(x, y) = \rho(x - y, 0)$.

3. НУФ В СЛУЧАЕ ОПЕРАТОРНОЙ АЛГЕБРЫ J С КОНУСОМ.

В настоящем пункте с использованием НУФ будет получена одна теорема о разрешимости задачи факторизации (1.4), включающая консервативный случай необратимого оператора $I - A$.

Пусть E - банахово пространство с правильным воспроизводящим конусом T неотрицательных элементов, а E^* - сопряженное пространство с конусом T^* . В E определяется модуль $|X|$ элемента X .

В качестве базового пространства J структуры F будем рассматривать B - алгебру линейных ограниченных операторов, действующих в E . Классы $G^\pm$ являются B - пространствами и могут быть незамкнуты относительно умножения.

Нами будут использованы следующие обозначения.

- Через $r(A)$ обозначается спектральный радиус оператора $A \in J$, а через A^* - оператор, сопряженный к A .
- Обозначим через W конус положительных операторов из J , оставляющих T инвариантным. Конусы T , T^* , W порождают частичный порядок $\geq$ в своих пространствах. Запись $\omega > 0$ означает, что соответствующий конус телесный и ω - его внутренний элемент.
- Пусть $f \geq 0$ ненулевой элемент из T . Обозначим через $E_f \subset E$ B -пространство f - измеримых функций, с нормой $\|x\|_f = \inf \{\lambda; |x| \leq \lambda f\}$.
- Пусть $A \in J$, $g \in E^*$. Записи gA и A^*g считаются эквивалентными (что не приводит к недоразумению).
- Пусть $P^\pm$ непрерывные проекторы, участвующие в структуре F . Предполагается, что $T_\pm := P_\pm T \subset T$ и являются конусами в $G^\pm$.

Рассмотрим итерации (1.12) в случае $A \geq 0$. Тогда последовательности $X_n^\pm$ возрастают по конусам $T_\pm$.

Лемма 3.1. а) Пусть $A \geq 0$ и существуют $f \in T$, $f \neq 0$, и $\mu \in (0, 1]$ такие, что

$$(3.1) \quad Af \leq \mu f.$$

Тогда в (1.12) имеют место неравенства

$$(3.2) \quad X_n^+ f \leq \mu f, \quad n = 0, 1, \dots$$

Если $\mu < 1$, то

$$(3.3) \quad X_n^- f \leq (1 - \mu)^{-1} A^- f, \quad n = 0, 1, \dots$$

б) Пусть $A \geq 0$ и существуют $\tilde{f} \in T^*$, $\tilde{f} \neq 0$ и $\tilde{\mu} \in (0, 1]$ такие, что

$$(3.4) \quad \tilde{f} A \leq \tilde{\mu} \tilde{f}.$$

Тогда имеют место неравенства

$$(3.5) \quad \tilde{f} X_n^- \leq \tilde{\mu} \tilde{f}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Если $\tilde{\mu} < 1$, то

$$(3.6) \quad \tilde{f} X_n^- \leq (1 - \tilde{\mu})^{-1} \tilde{f} \tilde{A}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Доказательство. Достаточно доказать утверждение а) леммы. Из (1.12) получаем

$$(3.7) \quad X_{n+1}^+ f + X_{n+1}^- f = Af + X_n^- X_n^+ f.$$

Поэтому

$$(3.8) \quad X_{n+1}^+ f \leq \mu f - [X_{n+1}^- - X_n^-] f - X_n^- [f - X_n^+ f].$$

Отсюда, с учетом монотонности последовательности X_n^- , получаем неравенство (3.2). Неравенство (3.3) следует из (3.6) и (3.2). Лемма доказана. $\square$

Так как конус T считается правильным, то из (3.2) следует сходимость X_n^+ в E_f и неравенство

$$(3.9) \quad X^+ f \leq \mu f.$$

Если $\mu < 1$, то в силу (3.3) последовательность X_n^- также сходится в E_f , имеет место неравенство

$$(3.10) \quad X^- f \leq (1 - \mu)^{-1} A^- f.$$

Аналогично обстоит дело при $\tilde{\mu} \leq 1$.

Рассмотрим теперь тот случай, когда $\mu = \tilde{\mu} = 1$, $\tilde{f} > 0$ и пространство E слабо полное. Тогда последовательность X_n^- слабо сходится в E_f .

Нами доказано следующее утверждение:

Теорема 3.1. *В следующих двух случаях а) и б) существует основное решение (X^+, X^-) НУФ (1.6), которому соответствует факторизация (1.4) как равенство операторов, действующих в E_f .*

а) При $\mu < 1$ имеют место неравенства (3.9) и (3.10).

б) Пусть $\mu = 1$, $\mu' = 1$, $\tilde{f} > 0$ и пространство E слабо полное. Тогда

$$(3.11) \quad X^+ f \leq f, \quad \tilde{f} X^- \leq \tilde{f}.$$

Частные случаи теоремы 3.1 в различных классах интегральных операторов, конечных и бесконечных матриц рассмотрены и применены в ряде работ автора (см. например, [7]-[10], [12], [13], [16]).

Отметим, что в случае б) теоремы 3.1 оператор $I - A$ необратим в E_f .

Существование факторизации (1.4) в случае $\mu = 1$ имеет применения в вопросе изучения и решения однородного и неоднородного консервативного уравнения $f = g + Af$ с некомпактным оператором A . Такие уравнения представляют большой интерес в теории переноса излучения, в кинетической теории газов, в теории полумарковских процессов и др.

Замечание 3.1. *Теорема 3.1 легко распространяется на случай, когда положительность элемента A не требуется и условие (3.1) заменяется условием $|A|f \leq \mu f$.*

Abstract. A general form of non-linear factorization equation (NFE) in rings and normed rings is considered. Using NFE, two basic facts on the existence of factorization are obtained, which are difficult to access or not at all accessible by methods of directly constructing the inverse factorization. The first of them refers to the factorization of elements "close" to unit constructed earlier with strong additional restrictions. The second fact involves the factorization of non-invertible elements in the so-called conservative case.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Амбарцумян, Научные Труды, **1**, Ереван (1960).
- [2] В. В. Соболев, Курс Теоретической Астрофизики, Наука, Москва (1985).

- [3] Н. Н. Kagitvada, R. E. Kalaba, A. Shumitzky, “An initial-value method for Fredholm equations”, J. Math. Anal. Appl. **19**, 197 – 203 (1967).
- [4] В. С. Владимиров, “Приближенное решение одной краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка”, ПММ, **19**, 315 – 324 (1955).
- [5] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Теория Вольтерровых Операторов В Гильбертовом Пространстве и Ее Приложения, Наука, М. (1967).
- [6] Н. Б. Енгибарян, “О факторизации симметрических интегральных операторов”, ДАН СССР, **203**, no. 1, 19 – 21 (1972).
- [7] Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян, “Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения”, Матем. сб., **97** (139):1(5), 35 – 58 (1975).
- [8] Н. Б. Енгибарян, “Некоторые факторизационные теоремы для интегральных операторов”, ДАН СССР, **230**, 1021 – 1024 (1976).
- [9] Н. Б. Енгибарян, “О нелинейных уравнениях факторизации операторов”, Применение методов теории функций и функц. анализа к задачам мат. физики, Ереван, Изд. ЕрГУ, 123 – 128 (1982).
- [10] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, “Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения”, Итоги науки и техники, Мат. анализ, **22**, М.: ВИНТИ, 175 – 244 (1984).
- [11] Н. Б. Енгибарян, “О многократной факторизации интегральных операторов типа свертки”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **37**, no. 4, 447 – 458 (1997).
- [12] Н. Б. Енгибарян, “Постановка и решение некоторых задач факторизации для интегральных операторов”, Мат. Сборник, **191**, no. 12, 61 – 76 (2000).
- [13] N. B. Yengibarian, “Factorization of Markov Chains”, J. of Theoretical probability, **17**, no. 2, 459 – 481 (2004).
- [14] Н. Б. Енгибарян, “О факторизации интегральных операторов в пространствах суммируемых функций”, Изв. РАН. Сер. матем., **73**, no. 5, 67 – 82 (2009).
- [15] Х. А. Хачатрян, “Об одном классе интегральных уравнений типа Урысона с сильной нелинейностью”, Изв. РАН, Сер. матем., **76**, no. 1, 173 – 200 (2012).
- [16] Н. Б. Енгибарян, А. Г. Барсегян, “Об одном уравнении свертки теории фильтрации случайных процессов”, Украинський математичний журнал, **66**, no. 8, 1092 – 1105 (2014).

Поступила 30 марта 2022

После доработки 01 апреля 2022

Принята к публикации 20 апреля 2022