

Г.Д. АКОПДЖАНЫ, В.С. САФАРЯН

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ВХОДНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ ЦЕПНЫХ СХЕМ

Исследуются зависимости входных сопротивлений цепных схем от изменения числа их звеньев. Рассматривается изменение как их модулей, так и аргументов.

Ключевые слова: цепная схема, входное сопротивление, модуль, аргумент.

При проектировании и исследовании режимов работы длинных линий электропередач, линий связи, различных устройств автоматики и т.д. их часто представляют при помощи цепных схем [1, 2], состоящих из одинаковых, симметричных, пассивных, каскадно соединенных четырехполюсников (рис. 1).

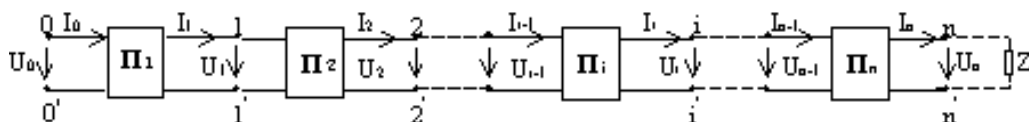


Рис.1

В качестве параметров, характеризующих симметричный, пассивный четырехполюсник, в статье рассматриваются его входные комплексные сопротивления Z_a и Z_{ab} при холостом ходе и, соответственно, коротком замыкании [1, 2].

В настоящей статье исследуются зависимости входных сопротивлений цепной схемы Z_{ia} и Z_{iab} от числа i четырехполюсников, входящих в ее состав, при синусоидальном режиме. Причем интерес представляют изменения как величин Z_{ia} , Z_{iab} , так и аргументов при различных значениях i .

Отметим, что сопротивления Z_{ia} , Z_{iab} выражаются соответствующими им параметрами одного четырехполюсника (Z_a , Z_{ab}) и зависят от числа четырехполюсников (i) в цепной схеме. Эти зависимости для симметричной цепной схемы имеют вид [3]

$$Z_{ia} = \frac{1 + \dot{C}^i}{1 - \dot{C}^i} Z_c = A(i) Z_c, \quad (1)$$

$$Z_{iab} = \frac{1 - \dot{C}^i}{1 + \dot{C}^i} Z_c = \frac{Z_c}{A(i)}. \quad (2)$$

Здесь $Z_c = Z_c e^{j\varphi} = \sqrt{Z_a Z_{ab}} = \sqrt{Z_{ia} Z_{iab}}$ является повторным сопротивлением цепной схемы [3], а комплексная величина равна

$$\dot{C} = C e^{j\alpha} = \frac{Z_a - Z_c}{Z_a + Z_c}. \quad (3)$$

Имея в виду, что величины Z_c и $\dot{C}$ не зависят от i , представим комплексные функции входных сопротивлений (1) и (2) зависящими только от вещественной переменной i .

В таком случае выяснение поведения функций (1) и (2) сводится к исследованию функции $A(i)$:

$$\begin{aligned} A(i) &= \frac{1 + \dot{C}^i}{1 - \dot{C}^i} = \frac{1 + C^i e^{j\alpha}}{1 - C^i e^{j\alpha}} = \frac{1 + C^i \cos i\alpha + j C^i \sin i\alpha}{1 - C^i \cos i\alpha - j C^i \sin i\alpha} = \\ &= \frac{1 - C^{2i}}{1 - 2C^i \cos i\alpha + C^{2i}} + j \frac{2C^i \sin i\alpha}{1 - 2C^i \cos i\alpha + C^{2i}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Модуль и аргумент комплексной величины A будут

$$|A|^2 = \frac{1 + C^{2i} + 2C^i \cos i\alpha}{1 + C^{2i} - 2C^i \cos i\alpha}, \quad (5) \quad \arg(A) = \arctg \frac{2C^i \sin i\alpha}{1 - C^{2i}}. \quad (6)$$

Начнем с выяснения характера изменения модулей входных сопротивлений, хотя в [2] они изображены в виде графиков, без указания на аналитическое выражение функции и, на наш взгляд, с некоторым искажением.

Определим экстремумы функции (5). Взяв для этого производную по i и приравняв ее к нулю, получим

$$\ln C \cos i\alpha - \alpha \sin i\alpha - \alpha C^{2i} \sin i\alpha - C^{2i} \ln C \cos i\alpha = 0. \quad (7)$$

Решение полученного трансцендентного уравнения относительно переменной i проводится графическим методом. Для этого представим уравнение (7) в виде

$$\operatorname{tg} i\alpha = \frac{\ln C}{\alpha} \frac{1 - C^{2i}}{1 + C^{2i}}. \quad (8)$$

Построив графики функций $\operatorname{tg} i\alpha$ и функции в правой части равенства (8) от i , по точкам их пересечения определим решения трансцендентного уравнения. Имея в виду, что $C < 1$ и $\ln C < 0$, для случая $\alpha > 0$ графики указанных функций изображены на рис. 2, где и отмечены точки их пересечения, т.е. решения уравнения (7).

Рассмотрим случай, при котором $|A| = 1$, т.е. когда $Z_{ia} = Z_{iab} = Z_c$ (см. (1) и (2)), или, что то же самое, $\cos i\alpha = 0$ (см. (5)). Следовательно,

$$i = \frac{\pi k}{\alpha} + \frac{\pi}{2\alpha} = \frac{\pi}{\alpha} (k + 0,5). \quad (9)$$

Точки, удовлетворяющие этим условиям, изображены на оси i (рис. 2).

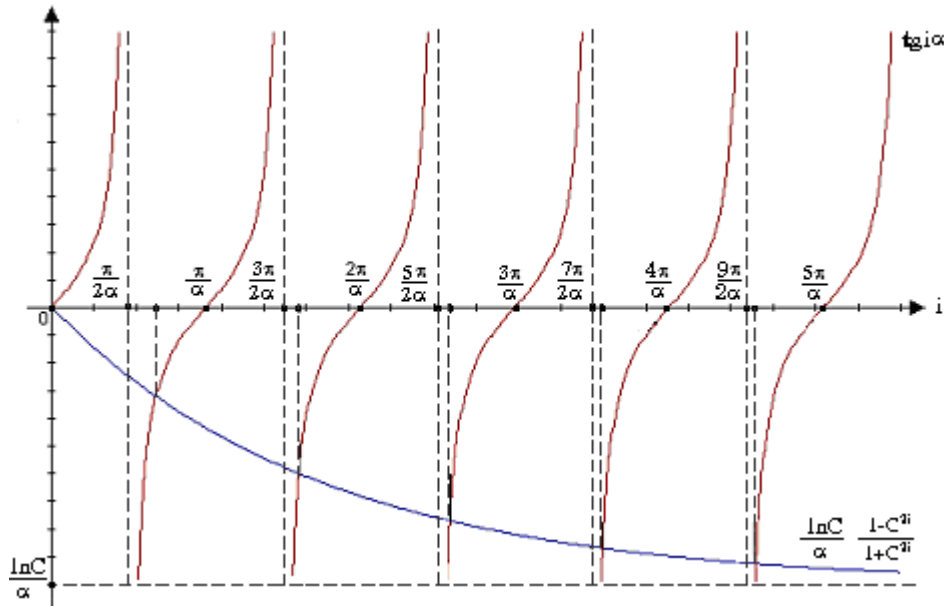


Рис.2

Что касается модулей входных сопротивлений, то, имея абсолютные значения $|A|$, они определяются из соотношений

$$Z_{ia} = |A| Z_c, \quad Z_{iab} = |A|^{-1} Z_c.$$

Кривые зависимости модулей этих сопротивлений приведены на рис. 3. Нетрудно заметить, что экстремумы Z_{ia} и Z_{iab} совпадают. Интересно отметить, что наибольшее Z_{iab} и наименьшее Z_{ia} значения достигаются при одном и том же значении параметра $i = i^*$ (рис. 3).

Перейдем к исследованию аргумента функции $A(i)$. Взяв производную от (6) и приравняв ее к нулю, получим

$$\ln C \sin i\alpha + C^{2i} \ln C \sin i\alpha - \alpha \cos i\alpha + \alpha C^{2i} \cos i\alpha = 0. \quad (10)$$

Для графического решения полученного трансцендентного уравнения относительно переменной i приведем его к виду

$$\operatorname{tg} i\alpha = \frac{\alpha}{\ln C} \frac{1 - C^{2i}}{1 + C^{2i}}. \quad (11)$$

Решив трансцендентное уравнение (10), получим экстремумы функции $\arg(A)$. Из (1) и (2) очевидно, что

$$\arg(Z_{ia}) = \varphi + \arg(A), \quad \arg(Z_{iab}) = \varphi - \arg(A). \quad (12)$$

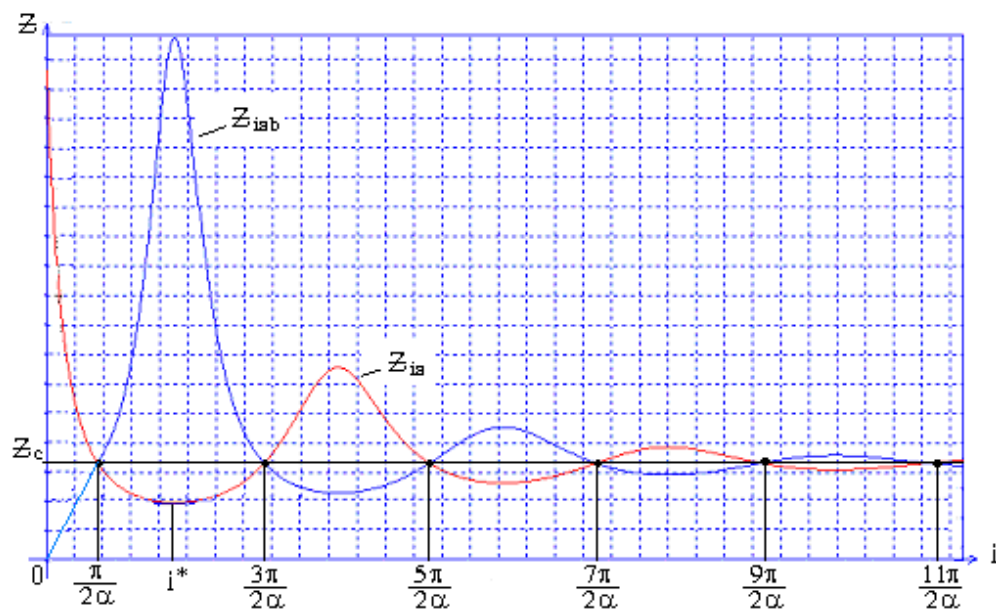


Рис. 3

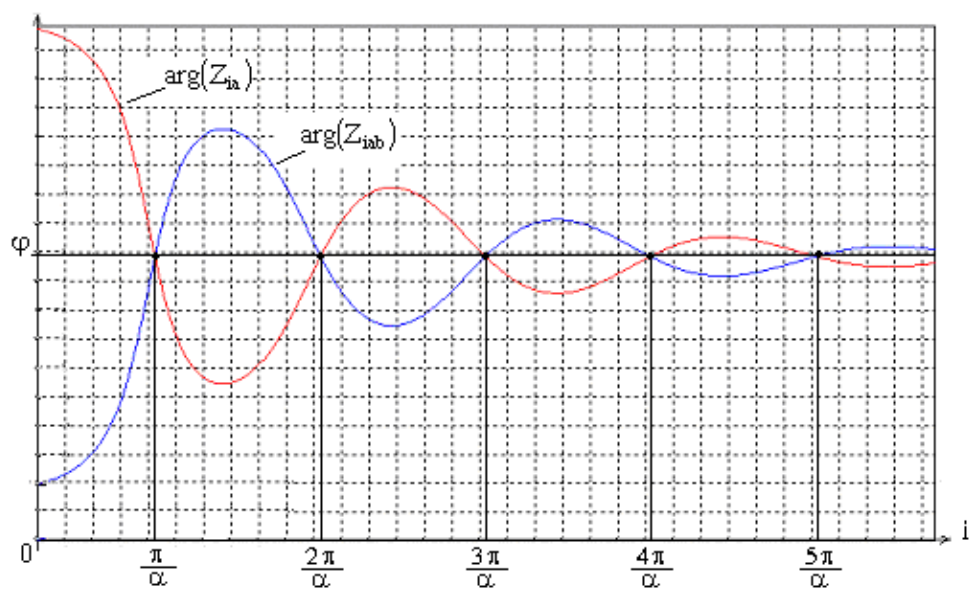


Рис. 4

Кривые зависимости аргументов входных сопротивлений от i (при $\alpha \geq 0$) приведены на рис. 4. Для их построения определено также значение $\arg(A)$ при $i = 0$:

$$\lim_{i \rightarrow 0} \frac{2C^i \sin i\alpha}{1 - C^{2i}} = -\frac{\alpha}{\ln C}$$

и, следовательно, при $i \rightarrow 0$:

$$\arg(A) = -\arctg \frac{\alpha}{\ln C}.$$

Пользуясь графическими построениями на рис. 3 и 4, построена кривая отображения действительной оси на комплексной плоскости $i \in [0, \infty]$ при $\alpha > 0$ (рис. 5). При $\alpha < 0$ спираль меняет направление прокрутки на обратное. Центр спирали (с) соответствует случаю $i \rightarrow \infty$ и, следовательно, случаю $Z_{ia} = Z_{iab} = Z_c$.

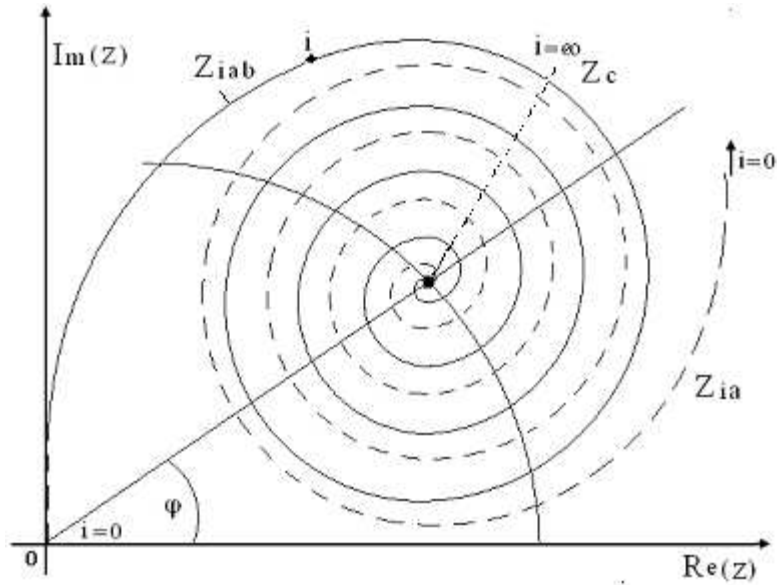


Рис. 5

Окружность с центром в начале координат (0) радиусом, равным Z_c , пересекает спираль при $i = k\pi/2\alpha$, где k - нечетное целое положительное число. Прямая, проходящая через начало (0) координат и центр (с) спирали, пересекает спираль при $i = k\pi/\alpha$, где k - целое положительное число.

Выводы

1. При синусоидальном режиме модули и аргументы входных сопротивлений цепной схемы в зависимости от числа i ее звеньев совершают соответственно колебания вокруг величины модуля и аргумента повторного сопротивления. Существует такое значение i^* , при котором сопротивления Z_{ia} и Z_{iab} достигают соответственно наименьшего и наибольшего значений (рис. 3).
2. При активно-индуктивном (емкостном) характере четырехполюсника спираль отображения (рис. 5) полностью расположена выше (ниже) полуоси $\operatorname{Re}(Z) \geq 0$. При индуктивно-емкостном характере четырехполюсника спираль пересекается с полуосью $\operatorname{Re}(Z) \geq 0$, точки пересечения соответствуют резонансному состоянию цепной схемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники. 4 - е изд. Том 2. - М. - СПб, 2004. - 573 с.
2. Атабеков Г.И. Теоретические основы электротехники. Ч. I. - М.: Госэнергоиздат, 1962. - 280 с.
3. Акопджанян Г.Д., Сафарян В.С. К исследованию однородных цепных схем// Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2003. - Т.56, № 2. - С. 301 - 305.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 18.01.2007.

Գ.Դ. ՀԱԿՈԲՋԱՆՅԱՆ, Վ.Ս. ՍԱՖԱՐՅԱՆ

ՇՐՋԱՑԱԿԱՆ ՄԽԵՄԱՆԵՐԻ ՄՈՒՏՔԱՅԻՆ ԴԻՄԱԴՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ՀԱՏՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Ուսումնասիրվում է շրջայական սխեմաների մուտքային դիմադրությունների կախումը շրջան կազմող տարրերի թվից, դիտարկվում են ինչպես վերջիններիս մոդուլների, այնպես էլ արգումենտների փոփոխությունները:

Առանցքային բառեր. շրջայական սխեմա, մուտքային դիմադրություն, մոդուլ, արգումենտ:

G.D. HAKOBYANYAN, V.S. SAFARYAN

SOME FEATURES OF CHAIN SCHEME INPUT RESISTANCES

The dependence of chain scheme input resistances on the number of elements comprising the chain taking into consideration their modules as well as the changes in arguments is investigated.

Keywords: chain scheme, input resistances, module, argument.