

Ж.М. МИРЗАБЕКЯН

## РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ КАБЕЛЕЙ С ЛЕНТОЧНЫМИ ТОКОПРОВОДЯЩИМИ ЖИЛАМИ

Рассматриваются методы расчета электрической емкости и индуктивности кабеля с плоскими токопроводящими жилами. Дается анализ этих расчетов с применением  $\theta$ -функции. Для плоских жил сечением  $1,13 \text{ мм}^2$  рассчитываются активное сопротивление и емкость при частоте  $20 \text{ кГц}$ .

**Ключевые слова:** плоский кабель, тета-функция, емкость, индуктивность, симметричное поле относительно экрана.

**Введение.** Важной проблемой в современной электротехнической промышленности является снижение материалоемкости выпускаемых изделий. Поэтому следует более обоснованно и экономично применять материалы в конструкциях, в том числе в высокочастотных кабелях, где в большом количестве используются дорогостоящие цветные металлы и пластмассы.

Анализ существующих конструкций и параметров передачи высокочастотных кабелей, а также всесторонние теоретические и экспериментальные исследования показывают, что одним из возможных вариантов конструкции, удовлетворяющих выдвинутому требованию, по-видимому, является кабель с прямоугольными ленточными токопроводящими жилами. Исследования показали, что при передаче токов высокой частоты воздействие поверхностного эффекта на активное сопротивление в токопроводящих жилах круглой формы больше, чем в жилах ленточной формы. Это обусловлено глубиной проникновения тока, которого при прямоугольных лентах меньше, чем при круглых проводах. Кроме того, кабели с ленточными токопроводящими жилами обладают следующими преимуществами по сравнению с кабелями цилиндрической формы сечения жил:

- большой теплоотдачей, что дает возможность передавать по таким кабелям большие мощности;
- меньшим весом.

Рассматривается теория определения электрических и магнитных полей кабелей с ленточными токопроводящими жилами, при помощи которых можно легко определить их первичные и вторичные параметры передачи. Излагается метод расчета электромагнитных полей кабелей указанных конструкций, где применен метод зеркальных отображений.

1. Для расчета рабочей емкости кабелей с ленточными жилами рассматривается электрическое поле в кабеле (рис. 1).

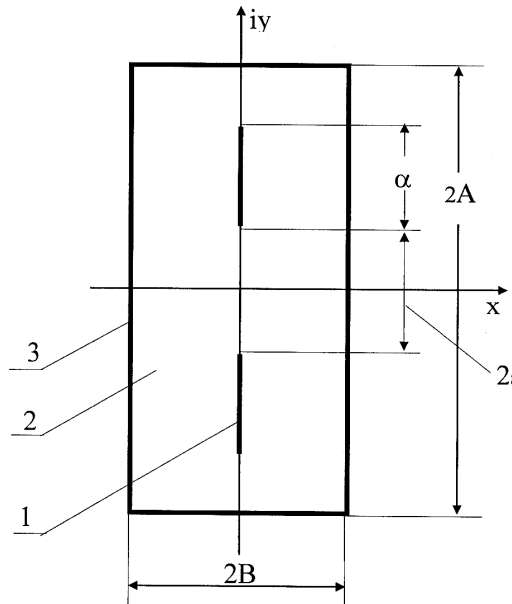


Рис.1.

1 – токопроводящая жила, 2 – диэлектрик, 3 – экран;  $\alpha$  – размер жилы (ширина жилы), 2 – расстояние между жилами, 2A и 2B – размеры экрана

В [1] обосновано, что на границе проводник-диэлектрик

$$E_t = 0, \quad (1)$$

где  $E_t$  – касательная составляющая поля  $E$ .

В соответствии с уравнениями Максвелла [1] напряженность электрического поля в диэлектрике можно определить следующим образом:

$$\text{rot } E = 0, \quad \text{div } E = 0, \quad (2)$$

или в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Составляющая  $E_z$  отсутствует, так как поле плоское. Система (2) является системой Коши-Римана [2], поэтому функция

$$f(x + iy) = E_x(x, y) + i E_y(x, y) \quad (4)$$

является аналитической функцией переменной  $z = x + iy$ .

При расчете электрического поля и емкости с достаточной для практики точностью можно предположить, что толщина провода равна нулю. В этом случае пренебрегается

электрическое поле в области I (рис. 2), которая предполагается намного меньше общего объема диэлектрика. Тогда, учитывая условие (1), можно записать:

- на горизонтальной границе экран-диэлектрик:

$$E_x = \operatorname{Re} f(z) = 0; \quad (5)$$

- на вертикальной границе экран – диэлектрик:

$$E_y = \operatorname{Im} f(z) = 0. \quad (6)$$

Функция  $\operatorname{Im} f(z)$  – нечетная,  $\operatorname{Re} f(z)$  – четная (относительно переменной  $z$ ), т.е.  $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(-z)$ ,  $\operatorname{Im} f(z) = -\operatorname{Im} f(-z)$ .

Симметрия функции запишется следующим образом:

$$E(x + iy) = -\overline{E(x - iy)}, \quad (7)$$

$$E(x + iy) = -\overline{E(-x + iy)}, \quad (8)$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение.

Для решения задачи целесообразно использовать метод зеркального отображения [1, 2], т.е. учесть влияние экрана заменой его на эквивалентную систему бесконечного числа проводов.

Опишем способ такой замены. Через горизонтальный участок экрана  $y = A$  функция  $f(z)$  аналитически продолжается по формуле

$$f(z) = -\overline{f(\bar{z} + 2iA)} \quad (\text{зеркальное отображение}) \quad (9)$$

в областях  $|\operatorname{Re} z| < B$  и  $A < \operatorname{Im} z < 3A$ .

По аналогичной формуле продолжаем  $f(z)$  через горизонтальный участок  $y = 3A$  в областях  $|\operatorname{Re} z| < B$  и  $3A < \operatorname{Im} z < 5A$ . В результате получаем функции  $f(z)$  в полуполосе  $|\operatorname{Re} z| < B$  и  $\operatorname{Im} z > 0$ , переходя к формуле

$$f(z) = \overline{f(-x + iy)}. \quad (10)$$

Таким образом, получаем функцию  $f(z)$ , аналитичную в полосе вида  $|\operatorname{Re} z| < B$ . Функция периодична и имеет период  $2A$  (рис.3).

Затем продолжаем функцию через вертикальный участок экрана  $|\operatorname{Re} z| < B$ , которое с учетом условия (5) примет вид

$$f(z) = \overline{f(-\bar{z} + 2B)} \quad (\text{зеркальное отображение}). \quad (11)$$

Пользуясь приведенными выше рассуждениями, получаем, что функция  $f(z)$  аналитична в области, указанной на рис. 3. В этой области функция периодична и имеет период  $2A$  по оси  $y$  и  $4B$  по оси  $x$ .

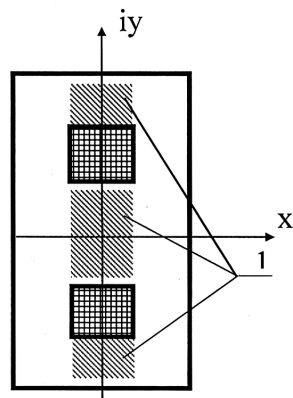


Рис.2

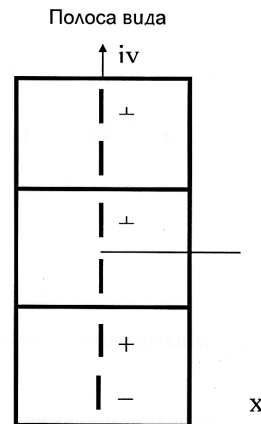


Рис.3

В плоскости имеются участки, где  $f(z)$  не аналитична, т.е. участки, где имеются электрические заряды (токопроводящие жилы).

Из соображений четности на проводах имеем

$$f^+(z) = -f^-(z), \quad (12)$$

где  $f^+(z)$  - значение  $f(z)$  на верхней плоскости провода, а  $f^-(z)$  - на нижней.

Такого рода задачи в непериодическом случае рассмотрены в [1] для конечного числа разрезов (проводов). В периодическом случае нужно все возникающие функции заменить на периодические на горизонтальной границе экрана.

В непериодическом случае [3]:

$$f(z) = \frac{C}{\sqrt{(z - i\ell)(z - i\ell - ia)}} = f_1(z) \quad - \quad \text{для провода 1,}$$

$$f(z) = \frac{C}{\sqrt{(z + i\ell)(z + i\ell + ia)}} = f_2(z) \quad - \quad \text{для провода 2,}$$

где константа  $C$  характеризует полный заряд единицы длины провода.

Функция  $f(z) = f_1(z) \times f_2(z)$  удовлетворяет условию (12) на обоих проводах.

Однако эта функция не учитывает знака заряда провода (функция нигде не равна нулю). Построим периодическое решение. Укажем, что в одном прямоугольнике период (размером  $2A \times 4B$ )  $f(x, y)$  (т.е. поле  $E$ ) обращается в нуль в точках  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  (рис. 4).

Этим требованиям удовлетворяет эллиптическая функция, которая выражается через тэта-функцию [4].

Решение данной задачи будем искать в виде

$$E = C \sqrt{\frac{\theta_1(z-\alpha)\theta_1(z-\beta)\theta_1(z-\gamma)\theta_1(z-\delta)}{\theta_1(z-ia)\theta_1(z-ia-i\ell)\theta_1(z+ia)\theta_1(z+ia+i\ell)}}, \quad (13)$$

$$\theta_1(z) = \theta_1(z/2B, 2Ai). \quad (14)$$

Покажем, что при соответствующем выборе  $C$  функция (13) удовлетворяет условиям (1) и (12).

Преобразуем выражение (13), пользуясь формулами и таблицами, приведенными в [4]:

$$\theta_1(z-\gamma) = \theta_1(z-B) = \theta_1\left(V - \frac{1}{2}\right) = -\theta_2(V),$$

где

$$V = z/2B,$$

$$\theta_1(z-\alpha) = \theta_1(z+B) = \theta_1(V+1/2) = -\theta_2(V),$$

$$\theta_1(z-\delta) = \theta_1(z-iA+B) = \theta_1(V-1/2-\tau/2) =$$

$$= e^{-i\pi(V+\tau/4)} e^{i\pi(2V+\tau)} \theta_3(V) = e^{i\pi(V+3/4+\tau)} \theta_3(V),$$

$$\theta_1(z-\beta) = \theta_1(V+1/2+\tau/2) = e^{-i\pi(V+\tau/4)} \theta_3(V).$$

|        |                 |   |
|--------|-----------------|---|
| -      | +               | - |
| +      | -               | + |
| -      | 1<br>+          | - |
| 3<br>+ | 2<br>-<br>delta | + |
| -      | +               | - |
| +      | -               | + |

Рис. 4

$$E = C \frac{\sqrt{-\theta_2^2(V) e^{i\pi\tau/4} \theta_3^2(V)}}{\sqrt{\theta_1(z-i\ell)\theta_1(z-ia-i\ell)\theta_1(z+i\ell)\theta_1(z+ia+i\ell)}}$$

или

$$E = C \frac{\theta_2(V)\theta_3(V)}{\sqrt{\theta_1\left(\frac{z-i\ell}{2B}\right)\theta_1\left(\frac{z-ia-i\ell}{2B}\right)\theta_1\left(\frac{z+i\ell}{2B}\right)\theta_1\left(\frac{z+ia+i\ell}{2B}\right)}}. \quad (15)$$

Выражение (15) представляет собой конечную формулу для расчета поля в экранированном кабеле с прямоугольными жилами. Найдем константу  $C$  и проверим выполнение условия (1) и (12).

Возьмем произвольную точку на проводе ( $x = 0, \ell < y < \ell + a$ ).

Аргумент  $(z - ia - i\ell)$  в (15) - чисто мнимое число с отрицательной мнимой частью. Остальные аргументы  $\theta_1$  функций положительные, чисто мнимые. Поэтому выражение под корнем, являясь произведением отрицательного чисто мнимого и трех положительных чисто мнимых чисел, есть действительное отрицательное число. Корень из него чисто мнимый. Учитывая, что числитель в (15) действительный, как произведение двух действительных чисел, определяем, что  $C$  - чисто мнимая величина (поскольку электрическое поле  $E$  перпендикулярно проводнику).

2. Докажем, что найденное поле перпендикулярно экрану. Возьмем произвольную точку на экране (например,  $x=B$ ) и подставим в (15):

$$\theta_2(V) = \theta_2\left(\frac{z}{2B}\right) = \theta_2\left(\frac{B+iy}{2B}\right) = \theta_2\left(\frac{1}{2} + V_1\right),$$

где  $V_1 = iy/2B$  - чисто мнимый аргумент.

Согласно [4],

$$\theta_2\left(V_1 + \frac{1}{2}\right) = -\theta_1(V_1) \text{ - чисто мнимое число;}$$

$$\theta_3(V) = \theta_3\left(V_1 + \frac{1}{2}\right) = \theta_1(V_1) \text{ - действительное число;}$$

$$\theta_1\left(\frac{z-i\alpha}{2B}\right) = \theta_1\left(\frac{B+iy+i\alpha}{2B}\right) = \theta_1\left(\frac{1}{2} + V_1 - \frac{i\alpha}{2B}\right) = \theta_2\left(V_1 - \frac{i\alpha}{2B}\right) \text{ - положительное действительное число;}$$

$$\theta_1\left(\frac{z-i\alpha-i\ell}{2B}\right) = \theta_1\left(\frac{1}{2} + V_1 - \frac{i\alpha+i\ell}{2B}\right) = \theta_2\left(V_1 - \frac{i\alpha+i\ell}{2B}\right) \text{ - положительное действительное число.}$$

Таковыми же преобразованиями можно определить, что и остальные  $\theta_1$  функции - положительные действительные числа. Таким образом, в (15) числитель - чисто мнимый, знаменатель - действительный, коэффициент  $C$  - чисто мнимый.

Электрическое поле  $E$  – действительное число, т.е. направлено перпендикулярно экрану. Аналогичным способом можно доказать, что и на противоположном вертикальном участке экрана  $E$  направлено по нормали.

Докажем, что на горизонтальном участке  $x=A$  поле перпендикулярно экрану.

Рассмотрим выражения (14) в произвольной точке  $z = x + iA$ . Обозначим  $V_2 = x/2B$  и  $\tau = iA/B$ . В результате получим

$$\begin{aligned}\theta_2(V) &= \theta_2\left(\frac{x+iA}{2B}\right) = \theta_2\left(V_2 + \frac{\tau}{2}\right) = B(V_2)\theta_3(V_2), \\ B(V_2) &= e^{-i\pi(V_2 + \tau/4)}, \\ \theta_3(V) &= \theta_3\left(V_2 + \frac{\tau}{2}\right) = B(V_2)\theta_2(V_2), \\ \theta_1\left(\frac{x+iA-i\ell}{2B}\right) &= \theta_1\left(V_2 + \frac{\tau}{2} - \frac{i\ell}{2B}\right) = iB\left(V_2 - \frac{i\ell}{2B}\right)\theta_4\left(V_2 - \frac{i\ell}{2B}\right), \\ \theta_4\left(\frac{x+iA-i\alpha-i\ell}{2B}\right) &= \theta_4\left(V_2 + \frac{\tau}{2} - \frac{i\alpha+i\ell}{2B}\right) = iB\left(V_2 - \frac{i\alpha+i\ell}{2B}\right)\theta_4\left(V_2 - \frac{i\alpha+i\ell}{2B}\right), \\ \theta_1\left(\frac{x+iA+i\ell}{2B}\right) &= iB\left(V_2 + \frac{i\ell}{2B}\right)\theta_4\left(V_2 + \frac{i\ell}{2B}\right), \\ \theta_4\left(\frac{x+iA+i\ell+i\alpha}{2B}\right) &= iB\left(V_2 + \frac{i\ell+i\alpha}{2B}\right)\theta_4\left(V_2 + \frac{i\ell+i\alpha}{2B}\right).\end{aligned}$$

Подставив полученные значения в (15), получим

$$E = C \frac{\theta_3(V_2)\theta_2(V_2)}{\sqrt{\theta_4\left(V_2 - \frac{i\alpha+i\ell}{2B}\right)\theta_4\left(V_2 - \frac{i\ell}{2B}\right)\theta_4\left(V_2 + \frac{i\ell}{2B}\right)\theta_4\left(V_2 + \frac{i\ell+i\alpha}{2B}\right)}}. \quad (16)$$

Числитель в (16) – действительное число, поскольку аргумент  $V_2$  действительный.

Рассмотрим знаменатель  $\overline{V_2 - \frac{i\ell}{2B}} = V_2 + \frac{i\ell}{2B}$  и, следовательно,

$$\overline{\theta_4\left(V_2 - \frac{i\ell}{2B}\right)} = \theta_4\left(V_2 + \frac{i\ell}{2B}\right). \text{ Аналогично, } \overline{\theta_4\left(V_2 - \frac{i\alpha+i\ell}{2B}\right)} = \theta_4\left(V_2 + \frac{i\ell+i\alpha}{2B}\right).$$

Произведение сопряженных чисел положительно. Поэтому знаменатель в (16) действительный.

Учитывая, что  $C$  – чисто мнимый, получаем, что поле  $E$  – чисто мнимое, т.е. перпендикулярно горизонтальному участку экрана.

Заряд провода вычисляется по скачку поля E:

$$Q = \left| \int_{\ell}^{\ell+\alpha} f(z) dz \right|. \quad (17)$$

Разность потенциалов между проводами равна

$$\Phi = \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\ell}^{\ell} f(z) dz \right| = \frac{2}{\varepsilon} \left| \int_0^{\ell} f(z) dz \right|. \quad (18)$$

Тогда рабочую емкость цепи двухпарного экранированного кабеля с плоскими токопроводящими жилами можно определить по формуле

$$C = \frac{Q}{\Phi} \quad (19)$$

или

$$C = \frac{\varepsilon}{36\pi} \left[ \frac{\left| \int_{\ell}^{\ell+\alpha} f(z) dz \right|}{\left| \int_0^{\ell} f(z) dz \right|} \right] \times 10^3 \left[ \frac{n\Phi}{\text{km}} \right]. \quad (20)$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Берс Л., Джон Ф., Шахтер М.** Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965.
2. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Методы теории функции комплексного переменного – М.: Наука, 1972. – 736 с.
3. **Тамм И.Е.** Основы теории электричества. 3-е изд. – М.: ОГИЗ, 1946.
4. **Бейтман Г., Эрдейн А.** Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1966. – 295 с.
5. **Тозони О.В.** Метод вторичных источников в электротехнике. – М.: Энергия, 1975. – 295 с.
6. **Корн Г., Корн Г.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1978. – 331 с.
7. **Иоссель Ю.Я.** Расчет электрической емкости. – М.: Энергоиздат, 1997. – 240 с.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 12.07.2007.



Ժ.Մ. ՄԻՐԶԱԲԵԿՅԱՆ

ԺԱՊԱՎԵՆԱՅԻՆ ՀՈՍԱՆՔԱՀԱՂՈՐԴԻՉ ԲԱՐՁՐԱՀԱՃԱԽԱԿԱՆ ՄԱԼՈՒԽՆԵՐԻ  
ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ՀԱՇՎԱՐԿ

Դիտարկում են հարթ հոսանքահաղորդիչ ջղերով մալուխի էլեկտրաունակության և ինդուկտիվության հաշվարկի մեթոդները: Տրվում է այդ հաշվարկների վերլուծությունը՝  $\theta$  ֆունկցիայի կիրառմամբ: 1,13 մմ<sup>2</sup> հատույթով հարթ ջղերի համար հաշվարկվում են ակտիվ դիմադրությունը և ունակությունը՝ 20 կՀց հաճախության դեպքում:

**Առանցքային բառեր.** հարթ մալուխ, թետա-ֆունկցիա, ինդուկտիվություն, էկրանի նկատմամբ սիմետրիկ դաշտ:

Zh.M. MIRZABEKYAN

ELECTRIC CABLE PARAMETERS WITH CONDUCTING THREAD

Calculation methods of electric capacity and cable induction with plane conducting threads are considered. The analysis of these calculations using theta functions is given. An active resistance and capacity at 20 kHz frequency are calculated for plane threads with cross-section 1,13 mm.

**Keywords:** plane cable, theta function, capacity, induction, symmetric field relative to the screen, two-field periodical function.