

Б.С. БАЛАСАНЯН, Э.С. ХРИСТАФОРЯН, А.Б. БАЛАСАНЯН,
А.В. ГАРАЯН, М.Ж. ПЕТРОСЯН

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПОИСКУ ОПТИМУМА ДЛЯ ФУНКЦИЙ n ПЕРЕМЕННЫХ

Предпринята попытка определения глобального минимума или максимума функции n переменных путем повышения определенности n -мерной поверхности отклика минимизируемой функции относительно выбранной n -мерной системы координат.

Ключевые слова: метод оптимизации, математическое планирование экспериментов, поверхность отклика минимизируемой функции.

Как известно [1-2], методы прямого поиска минимума, в которых используются только значения функции, эффективны и применимы для решения ограниченного круга оптимизационных задач и приложений. Тщательное изучение известных методов поиска оптимума для функций n переменных, к числу которых относятся методы Хука-Дживса [3], Нелдера-Мида [4], Давидона-Флетчера-Пауэлла [5], симплексные методы Спендли, Хекста и Химсворота [6], градиентные методы и др. [7], показало, что все они теоретически эффективны в случаях единственного минимума функции и малоприспособны для определения глобального минимума многоэкстремальной функции. При этом быстрое и точное определение минимума зависит от правильного выбора базисной точки поиска. В случаях неудачного выбора этой точки поиск может пройти по ложному направлению n -мерного пространства.

Как показывает практика применения методов оптимизации, широко освещенных и опубликованных в многочисленных научных статьях и монографиях, во всех случаях минимизируемая функция является зависимостью некоторого выходного параметра от определенного числа n переменных, заданных в их натуральных значениях, которая в n -мерном пространстве представляет собой n -мерную поверхность отклика. Следует отметить, что даже в случаях экспериментального исследования многофакторного процесса, модели которых часто определяют методами математического планирования экспериментов и масштабным преобразованием переменных факторов, после реализации плана экспериментов полученную математическую модель преобразуют посредством известных формул в функцию, в которой переменные факторы снова входят в своих натуральных значениях. При таком представлении n -мерной поверхности отклика минимизируемой функции она, хотя и занимает в пространстве определенное положение относительно выбранной n -мерной системы координат, однако для исследователя в начале поиска оптимума остается неопределенным, что связано с отсутствием первоначальных сведений о минимизируемой функции, а это, естественно, затрудняет правильный выбор базисной точки для поиска минимума.

В настоящей работе предпринята попытка определения глобального минимума или максимума функции n переменных при наличии интервальных ограничений путем повышения определенности расположения n -мерной поверхности отклика минимизируемой функции относительно выбранной n -мерной системы координат, сущность которого заключается в следующем.

Поверхности отклика минимизируемой функции относительно выбранной n -мерной системы координат, как это показано на рис. 1а, очевидно, можно построить такими ее преобразованиями, при которых они располагаются вокруг начала новой системы координат (рис.1б). В таком случае в качестве базисной точки можно принять именно начало новой системы координат.

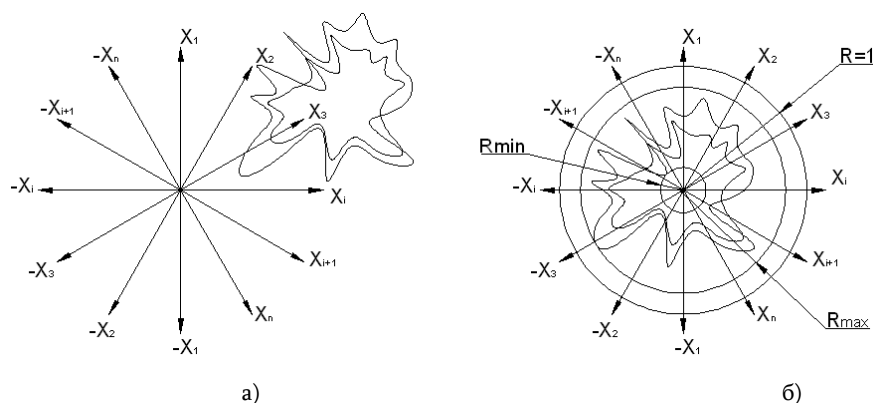


Рис.1. Положения поверхностей отклика минимизируемой функции относительно n -мерной системы координат:

а - в натуральных значениях X_i , б - в преобразованных значениях X_i

Возникает вопрос: как это сделать? Оказывается, довольно просто, если применить известные формулы преобразования переменных параметров, используемые в методах математического планирования экспериментов.

Рассмотрим функцию $Y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n)$ при наличии следующих интервальных ограничений: $x_i \in [a_i, b_i]$, где x_i - i -й переменный фактор минимизируемой функции; a_i b_i - соответственно нижнее и верхнее ограничения i -го переменного фактора минимизируемой функции. Произведем масштабное преобразование переменных факторов применением известной формулы преобразования [8] $X_i = (x_i - x_{i0}) / \Delta x_i$, где X_i , $x_{i0} = 0,5(a_i + b_i)$ и $\Delta x_i = 0,5(b_i - a_i)$ - соответственно преобразованное значение, средний уровень и масштаб преобразования в натуральных значениях X_i -го переменного параметра. Такое преобразование переменных позволяет получить минимизируемую функцию в виде $Y = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_i, \dots, X_n)$, где верхние уровни переменных соответствуют +1, а нижние -1. В этом случае поверхность отклика преобразованной

минимизируемой функции располагается вокруг начала новой n -мерной системы координат, где переменные параметры изменяются в пределах $X_i \in [-1, +1]$ (рис.16).

Таким образом, если в качестве базовой точки поиска принять начало новой n -мерной системы координат, то при движении от отмеченной точки в любом направлении достаточно быстро можно достигнуть поверхности отклика. Очевидно, что в этом случае поверхности равного уровня (n -мерные поверхности, на которых значение минимизируемой функции константа) будут находиться на одном и том же удалении относительно начала n -мерной системы координат. В итоге поверхности равного уровня преобразуются в сферы равного уровня.

На основе вышеизложенного можно заключить:

- применение приведенных преобразований позволяет повысить определенность положения поверхности отклика минимизируемой функции относительно начала преобразованной системы координат, при этом поверхность отклика минимизируемой функции располагается вокруг начала преобразованной n -мерной системы координат, а переменные параметры изменяются в пределах $X_i \in [-1, +1]$;
- n -мерные поверхности равного уровня представляют собой сферическую поверхность;
- минимальные значения функции находятся на поверхности сферы наименьшего радиуса, которые равны радиусу сферы внутреннего касания поверхности отклика минимизируемой функции, а максимальные значения функции - на поверхности сферы наибольшего радиуса и равны радиусу сферы внешнего касания поверхности отклика минимизируемой функции.

Теперь вопрос поиска оптимума стоит как задача определения радиусов сферы внутреннего и внешнего касания поверхностей отклика минимизируемой функции. Очевидно, что эти радиусы можно определить применением известных методов поиска минимума [1-8], с той только разницей, что в качестве базовой точки поиска всегда можно принять начало n -мерной системы координат. Поставленная задача решена нами применением компьютерного численного моделирования, исходя из следующих соображений.

Обычный лист программы Microsoft Office Excel 2003 включает 65536 строк, что позволяет практически мгновенно вычислить значения минимизируемой функции от 4-х до 6-ти переменных в 65000 и более точках, а также получить графическое представление этой функции, включающей до 32000 точек. Таким числом точек наверняка можно создать достаточное хорошее представление о поверхности отклика минимизируемой функции с получением ее графической зависимости. Задача поиска минимального отклика минимизируемой функции в этом случае сводится к определению из рассчитанного массива откликов его минимального значения, а также определению величин переменных параметров, при которых получен этот минимум, что достаточно просто решается в среде Microsoft Office Excel.

Отметим, что в процессе практической реализации этого метода возникли вопросы. Как варьировать переменные параметры минимизируемой функции, чтобы получить равномерное распределение точек на ее поверхности отклика? С каким шагом их варьировать? Дальнейшее изучение этих вопросов показало, что наиболее удобным способом варьирования переменных параметров являются планы их назначения, используемые в методах математического планирования

экспериментов [8], число точек которых в зависимости от числа уровней переменных параметров можно определить по известной формуле [8] $N = p^k$, где N - число точек плана; p - число уровней варьирования переменных параметров; k - число переменных параметров. Заметим, что $p = 2/\Delta X + 1$, где ΔX - шаг варьирования переменных параметров в их преобразованных значениях. Это означает, что с уменьшением шага варьирования переменных параметров существенно увеличивается число точек плана построения поверхности отклика минимизируемой функции, в результате чего увеличивается объем программы для определения ее оптимума. С увеличением этого шага, с одной стороны, уменьшается N , а с другой - повышается риск того, что мы проскочим минимум на поверхности отклика минимизируемой функции.

Проведена апробация методики поиска оптимума с применением тестовой функции Розенброка: $f(X_1, X_2) = 100(X_2 - X_1^2)^2 + (1 - X_1)^2$; $X^* = (1; 1)$ и функции Пауэлла:

$$f(X_1, X_2, X_3, X_4) = (X_1 + 10X_2)^2 + 5(X_3 - X_4)^2 + (X_2 - 2X_3)^4 + 10(X_1 - X_4)^4; X^* = (0; 0; 0; 0). \quad \text{С}$$

учетом числа переменных факторов минимизируемой функции для функции Розенброка шаг варьирования переменных параметров принят $\Delta X = 0,02$, а функции Пауэлла $\Delta X = 0,2$. При этом общее число точек, в которых вычислено значение функции, для первого случая оказалось равным $N = 10201$, а для второго - $N = 14641$. На основе программ, разработанных в среде Microsoft Office Excel 2003, практически мгновенно определены величины известных оптимумов тестовых функций и построены их поверхности отклика в виде лепестковых диаграмм, приведенных на рис.2а и б.

Следует отметить, что столь удачное определение величин известных оптимумов тестовых функций связано в первую очередь с тем, что оптимальные величины переменных параметров являются целыми числами. То есть, даже при варьировании переменных параметров по трем уровням оптимумы были бы определены столь же удачно. В этой связи была принята некоторая минимизируемая функция с заранее известной точкой оптимума в виде выражения $f(X_1, X_2, X_3, X_4) = (X_1 - 0,245)^2 + (X_2 + 0,473)^2 + (X_3 - 0,871)^4 + (X_4 - 0,323)^4$, минимум которой, очевидно, находится в точке $X^* = (0,245; -0,473; 0,871; 0,323)$.

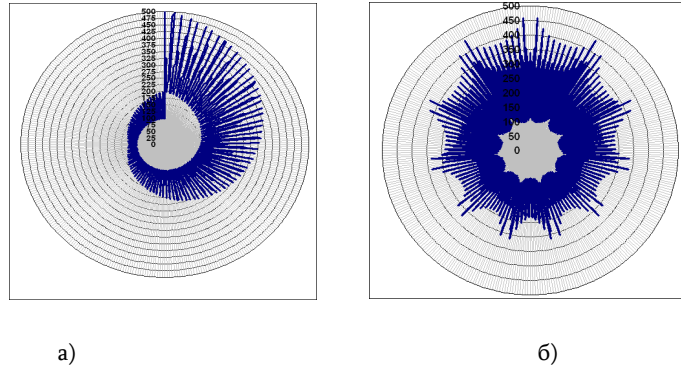


Рис.2. Лепестковая диаграмма поверхностей откликов тестовых функций:
а - Розенброка, б - Пауэлла

Разработанная программа, использованная при тестировании функцией Пауэлла, выдала первую точку $X^* = (0,2; -0,4; 0,8; 0,4)$, что, естественно, далеко от истинного оптимума, так как $f(0,2; -0,4; 0,8; 0,4) = 0,0287$.

Для его более точного установления в разработанную программу были включены дополнительные блоки таким образом, чтобы решение задачи продолжалось вокруг первой точки в пределах $\pm \Delta X_i / 2 = 0,1$. Шаг варьирования остается прежним. В этом случае поставленная задача решается в пределах $X_1 \in [0,1; 0,3]$, $X_2 \in [-0,5; -0,3]$, $X_3 \in [0,7; 0,9]$, $X_4 \in [0,3; 0,5]$ с новым шагом $\Delta X = 0,02$. На основе этого получена точка оптимума второго приближения $X^* = (0,24; -0,48; 0,88; 0,32)$. Третий дополнительный блок продолжает решение задачи в условиях $X_1 \in [0,23; 0,25]$, $X_2 \in [-0,49; -0,47]$, $X_3 \in [0,87; 0,89]$, $X_4 \in [0,31; 0,33]$ с шагом $\Delta X = 0,002$. Здесь получена точка оптимума третьего приближения $X^* = (0,244; -0,473; 0,871; 0,323)$, при которой $f(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0,000006$. Можно считать, что точка оптимума практически достигнута.

Теперь проверим возможность определения глобального минимума или максимума применением предлагаемой методики поиска. В качестве тестовой использована функция в виде

$$f(X_1, X_2) = 0,325 + \sin(0,7 - X_1 - 12X_1^2 + 5X_1^3 + 9X_1^4 - 2,5X_1^5 + 6X_1^6)^2 + \sin(0,7 - 2X_2 - 11X_2^2 + 3X_2^3 + 7X_2^4 - 5X_2^5 + 7X_2^6)^2, \quad (1)$$

в точке минимума которой, очевидно, $f(X^*) = 0,325$.

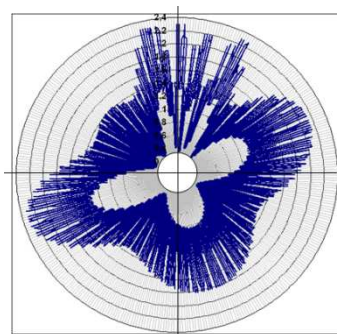


Рис.3. Характерная лепестковая диаграмма многоэкстремальной функции

Поверхность отклика минимизируемой функции (1) в виде лепестковой диаграммы приведена на рис.3, откуда видно, что она носит многоэкстремальный характер, оптимумы которой могут быть, по крайней мере, в девяти точках.

Посредством предлагаемой методики в первом приближении найдены эти девять точек, которые приведены в табл. 1.

Таблица 1
Оптимумы функции (1) в первом приближении

№	X1	X2	F(X1,X2)	№	X1	X2	F(X1,X2)
1	-0,28	-0,8	0,329233	6	0,22	0,18	0,325793
2	0,22	-0,8	0,329902	7	-0,28	0,64	0,326585
3	-0,28	-0,36	0,32537	8	0,22	0,64	0,327254
4	0,22	-0,36	0,326039	9	0,22	0,84	0,326708
5	-0,28	0,18	0,325125				

Во втором приближении получены намного близкие к оптимуму точки, величины откликов которых при значимости знаков до трех после запятой в наихудшем случае получены с точностью до пятого знака (табл.2). Теоретически можно полагать, что глобальный минимум находится в точке $X^* = (-0,28; 0,18)$, где $f(X^*) = 0,325000082$, который получен с точностью до седьмого знака после запятой.

Таблица 2
Оптимумы функции (1) во втором приближении

№	X1	X2	F(X1,X2)	№	X1	X2	F(X1,X2)
1	-0,2786	-0,7962	0,325001518	6	0,2148	0,1814	0,325000096
2	0,2148	-0,7962	0,325001533	7	0,2786	0,632	0,325000086
3	0,2786	-0,3634	0,325000085	8	0,2148	0,632	0,32500001
4	0,2148	-0,3634	0,32500001	9	0,2148	0,8358	0,325000015
5	0,2786	0,1814	0,325000082				

Заметим, что практически все девять точек можно принять в качестве глобального минимума, тем более, если учитывать, что обычно при установлении или выявлении минимизируемой функции имеют место определенные погрешности, особенно в случаях их экспериментального определения.

Таким образом, предлагаемая методика поиска оптимума пригодна и для выявления глобального минимума или максимума, которую следует проводить в следующей последовательности.

1. Заданную в натуральных значениях минимизируемую функцию $Y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n)$ преобразовывают в функцию вида $Y = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_i, \dots, X_n)$, где переменные параметры преобразованы и находятся в интервале $X_i \in [-1; 1]$.

2. Выбирают шаг ΔX_{i1} изменения преобразованных переменных параметров X_i и, основываясь на методах математического планирования экспериментов, строят план расчета величин преобразованной минимизируемой функции $Y = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_i, \dots, X_n)$.

3. Для предварительного представления о поверхности отклика функции $Y = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_i, \dots, X_n)$ вычисляют ее значения во всех точках плана, строят ее лепестковую диаграмму, определяют ориентировочное число минимумов или максимумов и их координаты.

4. Строят новый план расчета величин преобразованной минимизируемой функции $Y = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_i, \dots, X_n)$ вокруг полученных точек оптимума X_i^* при изменении их в пределах $\Delta X_{i2} = \pm \Delta X_{i1}/2$ и определяют уточненные значения точек минимума. Это повторяют до тех пор, пока величины оптимумов предыдущего и последующего этапов практически становятся одинаковыми, то есть отличаются друг от друга на величину погрешности выявления минимизируемой функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Банди Б.** Методы оптимизации. - М.: Радио и связь. 1988. - 128 с.
2. **Аттетков А.В., Галкин С.В., Зарубин В.С.** Методы оптимизации. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001. - 440 с.
3. **Hooke R., Jeeves T.A.** Direct search solution of numerical and statistical problems // J.Assn. Comp. Mach. - 1961. - P. 212 - 229.
4. **Nelder J.A., Miad R.A.** A simplex method for function minimization // The Comp. Journal. - 1965. - 7. - P. 308 - 313.
5. **Powell M.J.** An iterative method for finding stationary values of function of several variables // The Comp. Journal. - 1962. - 5. - P.147 - 151.
6. **Spendliey W., Hext G.R., Himswort F.R.** Sequential applications of simplex designs in optimization and evolutionary operation // Technometrics. - 1962. - 4. - P.441- 461.
7. **Черноруцкий И. Г.** Методы оптимизации в теории управления. - СПб.: Питер, 2004.-256 с.
8. **Кацев П.Г.** Статистические методы исследования режущего инструмента. - М.: Машиностроение, 1974. - 244с.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 20.10.2007.

Բ.Ս. ԲԱԼԱՍԱՆՅԱՆ, Է.Ս. ՔՐԻՍՏԱՖՈՐՅԱՆ, Ա.Բ. ԲԱԼԱՍԱՆՅԱՆ,
Ա.Վ. ՂԱՐԱՅԱՆ, Մ.Ժ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

n ՓՈՓԽԱԿԱՆՆԵՐՈՎ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՕՊՏԻՄՈՒՄԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՄԻ ՄՈՏԵՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Փորձ է արված որոշել n փոփոխականով ֆունկցիայի գլոբալ մինիմումը կամ մաքսիմումն ընտրված n չափանի կորդինատային համակարգի նկատմամբ՝ մինիմալացվող ֆունկցիայի n չափանի արձագանքման մակերևույթի որոշակիության բարձրացմամբ:

Առանցքային բառեր. օպտիմալացման եղանակ, փորձարկումների մաթեմատիկական պլանավորում, մինիմալացվող ֆունկցիայի արձագանքման մակերևույթ:

B.S. BALASANYAN, E.S. KRISTAPHORYAN, A.B. BALASANYAN,
A.V. GHARAYAN, M.G. PETROSYAN

**ON ONE APPROACH TO SEARCH THE OPTIMUM FOR
n VARIABLE FUNCTIONS**

An attempt to n -variable function's maximum and minimum in the existence of limitations by the increase of distinctness of n -dimensional minimized function surface response in regard to the chosen n -dimensional system of coordinates is made.

Keywords: optimization method, mathematical planning of the experiment, response surface of minimizing function.