

В.С. ХАЧАТРЯН, А.Г. АКОПЯН

# РЕАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗВИТИЯ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ ДЕКОМПОЗИЦИИ ДАНЦИГА-ВУЛФА

Предлагается метод реализации математической модели оптимального развития электроэнергетической системы (ЭЭС) с применением теории декомпозиции Данцига-Вулфа.

**Ключевые слова:** модель, теория, электроэнергетическая система, матрица, целевая функция, критерий оптимальности, программа.

Методы декомпозиции вообще и метод декомпозиции Данцига-Вулфа в частности положили начало реализации нелинейных и линейных математических моделей больших размерностей [1-17]. Для понимания сущности метода Данцига-Вулфа рассмотрим следующую задачу линейного программирования, представленную в матричной форме: найти минимум линейной формы

$$F = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n \quad (1)$$

при следующих ограничениях:

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + \dots + A_n X_n = B_0, \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} D_1 X_1 \\ D_2 X_2 \\ \vdots \\ D_n X_n \end{array} \right\} = \begin{array}{l} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{array} \quad (3)$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, \dots, X_n \geq 0. \quad (4)$$

Приведенная математическая модель называется блочно-диагональной и состоит из серии блочно-диагональных подматричных уравнений, связанных группой ограничений общего вида. Действительно, если в (3) содержатся отдельные блочные уравнения, то уравнение (2) объединяет все переменные данной математической модели.

В большинстве случаев подматрицы вышеуказанной блочно-диагональной математической модели в обобщенной форме представляются в виде

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_n \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Математическую модель (1)-(4) можно представить также в компактной форме

$$\min F = \min \sum_{i=1}^n C_i X_i, \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^n A_i X_i = B_0 \quad (m_0 \text{ строк}), \quad (7)$$

$$D_i X_i = B_i \quad (m_i \text{ строк}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

$$X_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

или в матричной форме:

$$\begin{cases} \min F = \min (CX), \\ AX = B_0, \\ DX = B, \\ X \geq 0. \end{cases} \quad (10)$$

Следует отметить, что (8) содержит  $n$  независимых ограничений, которые не пересекаются. Эти  $n$  ограничения объединяются только с помощью общих ограничений (7). При отсутствии общих ограничений (7) ограничения (8) можно рассматривать как совершенно не зависящие друг от друга. Несмотря на то, что, на первый взгляд, математическая модель (6)-(9) или (10) имеет простую форму, однако это в действительности не так. Поэтому есть необходимость ввести дополнительные объяснения относительно указанной математической модели.

Действительно, вектор  $X_i$  в (6) определяется с помощью компонентов

$$X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i}), \quad (11)$$

каждый из которых имеет число переменных соответственно  $n_1, n_2, \dots, n_n$ , так что  $n_1 + n_2 + \dots + n_n = n$ . Условие (7) включает все типы переменных и состоит из  $m_0$  строк, следовательно, матрица  $A$  имеет порядок  $m_0 \times n$ . В условия (8) входят переменные, фигурирующие соответственно в отдельных слагаемых целевой функции (6), и каждый блок имеет число строк соответственно  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Поэтому матрицы  $D_1, D_2, \dots, D_n$  будут иметь порядок  $m_1 \times n_1; m_2 \times n_2; \dots; m_n \times n_n$  соответственно. Таким образом, число переменных определяется соотношением  $n = \sum_{i=1}^n n_i$ , а число условий

связи без учета условия неотрицательности - соотношением  $m_0 + \sum_{i=1}^n m_i$ .

Следует отметить, что каждое условие из (8) с соответствующим условием неотрицательности, с геометрической точки зрения, образует выпуклый многогранник, характеризующий область допустимых решений.

Предположим,  $W_1$  представляет собой выпуклый многогранник, образуемый следующей формой:

$$D_i X_i = b_i, X_i \geq 0, \quad (12)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ , т.е. принимает все индексы условия связи (8), называется  $i$ -й задачей и является ограничением основной задачи (6), (7).

Решение любой частной  $i$ -й задачи находится в вершинах соответствующего выпуклого многогранника, которые называются крайними или экстремальными точками. Любую точку, принадлежащую данному выпуклому многограннику, можно представить в виде выпуклой линейной комбинации его крайних или экстремальных точек:

$$X_i = \sum_{j=1}^r \lambda_j^i X_j^i \quad (13)$$

И

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^j = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

$$\lambda_j^i \geq 0, j = 1, 2, \dots, r_i, \quad (15)$$

где  $X_i^j (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, r_i)$  - вершины, т.е. крайние точки или экстремальные точки множества  $W_i$ .

Для большей ясности условия (13)-(15) представим в развернутой форме:

$$\begin{aligned} X_1 &= \sum_{j=1}^{r_1} \lambda_1^j X_1^j, \sum_{j=1}^{r_1} \lambda_1^j = 1, \lambda_1^j \geq 0, \\ X_2 &= \sum_{j=1}^{r_2} \lambda_2^j X_2^j, \sum_{j=1}^{r_2} \lambda_2^j = 1, \lambda_2^j \geq 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$X_n = \sum_{j=1}^{r_n} \lambda_n^j X_n^j, \sum_{j=1}^{r_n} \lambda_n^j = 1, \lambda_n^j \geq 0.$$

Подставив (16) в выражение целевой функции (1), получим

$$F = \sum_{j=1}^{r_1} C_1 X_1^j \lambda_1^j + \sum_{j=1}^{r_2} C_2 X_2^j \lambda_2^j + \dots + \sum_{j=1}^{r_n} C_n X_n^j \lambda_n^j. \quad (17)$$

Подставив (16) в (2), получим

$$\sum_{j=1}^i A_1 X_1^j \lambda_1^j + \sum_{j=1}^i A_2 X_2^j \lambda_2^j + \dots + \sum_{j=1}^i A_n X_n^j \lambda_n^j = B_0. \quad (18)$$

На основании (17), (18) и (14), (15) можно написать следующую математическую модель линейного программирования для задач большой размерности: минимизировать

$$F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{r_i} (C_i X_i^j) \lambda_i^j \quad (19)$$

при

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{r_i} (A_i X_i^j) \lambda_i^j &= B_0, \\ \sum_{j=1}^{r_i} \lambda_i^j &= 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \lambda_i^j &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, r_i. \end{aligned} \quad (20)$$

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} d_i^j &= C_i X_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, r_i; \\ a_i^j &= A_i X_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, r_i, \end{aligned} \quad (21)$$

то получим окончательную форму математической модели: минимизировать

$$\begin{aligned} F &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{r_i} d_i^j \lambda_i^j, \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{r_i} a_i^j \lambda_i^j &= B_0, \\ \sum_{j=1}^{r_i} \lambda_i^j &= 1, \\ \lambda_i^j &\geq 0, \\ i &= 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, r_i, \end{aligned} \quad (22)$$

которая называется эквивалентной или координирующей задачей.

Можно заметить, что если в исходной задаче число ограничений составляет  $m_0 + \sum_{i=1}^n m_i$ , то в координирующей задаче их число составляет всего  $m_0 + n$ . Однако число новых переменных  $\lambda_i^j$  ( $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, r_i$ ) превосходит число основных переменных  $X_i$  исходной задачи и характеризуется числом вершин множества  $W_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Рассматривается следующая численная математическая модель оптимизации развития:

$$F = 56x_1 + 28x_2 + 63x_3 + 31x_4 + 70x_5 + 34x_6,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 2500,$$

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 = 6000.$$

$$x_1 + x_2 \leq 800,$$

$$x_3 + x_4 \leq 1000,$$

$$x_5 + x_6 \leq 1200,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0.$$

Представим рассматриваемую математическую модель (23) в матричной форме:

$$\min F = \min \left( [56 \ 28] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [63 \ 31] \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + [70 \ 34] \cdot \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \right),$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2500 \\ 6000 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq [800],$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \leq [1000],$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \leq [1200],$$

$$\overline{x_1, x_6} \geq 0.$$

Нетрудно заметить, что математическая модель (24) имеет структуру классической математической модели (1)-(4). Согласно (24), выпуклое многогранное множество  $W$  состоит из трех многогранных подмножеств -  $W_1, W_2, W_3$ , геометрическое изображение которых приведено на рисунке.

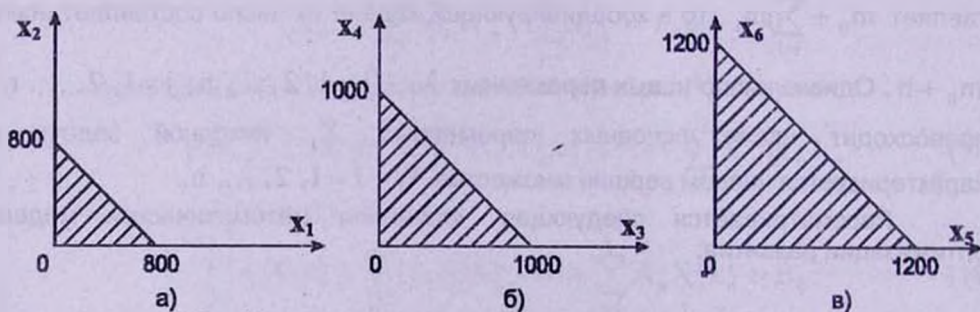


Рис. Множество выпуклых треугольников допустимых решений: а -  $W_1$ , б -  $W_2$ , в -  $W_3$

Имеем три крайние точки, т.е. крайними точками многогранника  $W$  будут различные комбинации крайних точек многогранников  $W_1, W_2, W_3$ .

В качестве исходного допустимого базисного решения возьмем следующие три крайние точки множества  $W$ :

$$X^1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$X^2 = (800, 0, 1000, 0, 1200, 0),$$

$$X^3 = (0, 800, 0, 1000, 0, 1200).$$

(В качестве исходного допустимого базиса может быть принят любой другой набор векторов).

Построим координирующую задачу: минимизировать

$$F = (C_1 X^1) \lambda_1 + (C_2 X^2) \lambda_2 + (C_3 X^3) \lambda_3;$$

$$(A_1 X^1) \lambda_1 + (A_2 X^2) \lambda_2 + (A_3 X^3) \lambda_3 = b_0; \quad (25)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1;$$

$$\lambda_1 \geq 0;$$

$$\lambda_2 \geq 0;$$

$$\lambda_3 \geq 0.$$

Численная математическая модель координирующей задачи принимает вид

$$F = 191800 \lambda_2 + 94200 \lambda_3;$$

$$3000 \lambda_2 + 3000 \lambda_3 = 2500;$$

$$9000 \lambda_2 + 3000 \lambda_3 = 6000; \quad (26)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1;$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0.$$

Для определения базисного решения задачи (26) используем модифицированный симплекс-метод:

$$\begin{array}{c} -\lambda_1 \quad -\lambda_2 \quad -\lambda_3 \quad 1 \\ 0 = \begin{array}{|cc|c|c|} \hline 0 & 3000 & 3000 & 2500 \\ 0 & 9000 & 3000 & 6000 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \lambda_3 = \begin{array}{|cc|c|} \hline 0 & 1 & \frac{5}{6} \\ 0 & 6000 & 3500 \\ 1 & 0 & \frac{1}{6} \\ \hline \end{array} \rightarrow \\ \begin{array}{c} -\lambda_2 \quad 1 \quad 1 \\ \lambda_3 = \begin{array}{|cc|} \hline 1 & \frac{5}{6} \\ 6000 & 3500 \\ 0 & \frac{1}{6} \\ \hline \end{array} \quad \lambda_3 = \begin{array}{|c|} \hline \frac{3}{12} \\ \frac{7}{12} \\ \frac{1}{6} \\ \hline \end{array} \\ \rightarrow 0 = \begin{array}{|cc|} \hline 6000 & 3500 \\ 0 & \frac{1}{6} \\ \hline \end{array} \quad \lambda_2 = \begin{array}{|c|} \hline \frac{7}{12} \\ \frac{1}{6} \\ \hline \end{array} \\ \lambda_1 = \begin{array}{|cc|} \hline 1 & \frac{5}{6} \\ 6000 & 3500 \\ 0 & \frac{1}{6} \\ \hline \end{array} \quad \lambda_1 = \begin{array}{|c|} \hline \frac{3}{12} \\ \frac{7}{12} \\ \frac{1}{6} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Базисным решением координирующей задачи (26) будет

$$\lambda_1 = \frac{1}{6}, \quad \lambda_2 = \frac{7}{12}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{4}.$$

В соответствии с обычной процедурой симплекс-метода для определения переменной  $\lambda_s$ , вводимой в базис, необходимо определить

$$\min \bar{f}_j = f_j - \pi_1 a_j - \pi_0, \quad (27)$$

где  $f_j = CX^j$ ,  $a_j = AX^j$ .

Если  $\min \bar{f}_j \geq 0$ , то решение задачи (26) оптимально, в противном случае - определяется переменная  $\lambda_s$ , которая должна быть введена в базис.

Выполнение условия (27) эквивалентно решению подзадачи типа: минимизировать

$$Z = (C_i - \pi_1 A_i) X_i \quad (28)$$

при ограничениях

$$B_i X_i = b_i, \quad X_i \geq 0.$$

Для составления данной подзадачи, которая называется вспомогательной задачей, необходимо определить вектор оценки  $\pi$ :

$$\pi = C_\varepsilon \cdot \varepsilon^{-1}, \quad (29)$$

где  $C_\varepsilon = (0 \ 191800 \ 94200)$  - соответствующие базису  $\varepsilon$  коэффициенты минимизируемой функции задачи (26):

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 3000 & 3000 \\ 0 & 9000 & 3000 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

что является исходным базисом задачи (26).

Вычислим матрицу  $\varepsilon^{-1}$ :

$$\varepsilon^{-1} = \begin{pmatrix} -3000 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{6000} & \frac{1}{6000} & 0 \\ \frac{1}{2000} & -\frac{1}{2000} & 0 \end{pmatrix}$$

и определим  $\pi$ :

$\pi = (15.13; 16.26; 0)$ , причем  $\pi = (\pi_1, \pi_0)$ , т.е.  $\pi_1 = (15.13, 16.26)$  и  $\pi_0 = 0$ .

Вектор оценок  $\pi$  можно определить непосредственно из симплекс-таблицы при определении базисного решения задачи (26). Для этого применим симплекс-метод с составлением "малой таблицы" с единичной матрицей коэффициентов.

Составляем исходную таблицу задачи (26):

|      | $-\lambda_1$ | $-\lambda_2$ | $-\lambda_3$ | 1    |
|------|--------------|--------------|--------------|------|
| 0 =  | 0            | 3000         | 3000         | 2500 |
| 0 =  | 0            | 9000         | 3000         | 6000 |
| 0 =  | 1            | 1            | 1            | 1    |
| -F = | 0            | 191800       | 94200        | 0    |

и "малую" таблицу с единичной матрицей и столбцом свободных членов (без последнего столбца).

|      | $-\lambda_1$ | $-\lambda_2$ | $-\lambda_3$ | -F | 1    | $-\lambda_3$ |
|------|--------------|--------------|--------------|----|------|--------------|
| 0 =  | 1            | 0            | 0            | 0  | 2500 | 3000         |
| 0 =  | 0            | 1            | 0            | 0  | 6000 | 3000         |
| 0 =  | 0            | 0            | 1            | 0  | 1    | 1            |
| -F = | 0            | 0            | 0            | 1  | 0    | 94200        |

Действительно, на каждом шаге определяем коэффициенты некоторой 0-строки, которые можно получить как произведение исключаемой 0-строки малой таблицы на столбцы исходной таблицы, при этом не следует брать столбцы, над которыми стоят нули в малой таблице.

Отыскав таким путем нужный положительный коэффициент, определяем разрешающий столбец, умножаем матрицу малой таблицы (без столбца свободных членов) на разрешающий столбец исходной таблицы, затем полученный новый столбец присоединяем справа к малой таблице и производим шаг модифицированным симплекс-методом:

|               | $-\lambda_1$      | $-\lambda_2$ | 0 | -F | 1             | $-\lambda_1$ |
|---------------|-------------------|--------------|---|----|---------------|--------------|
| $\lambda_3 =$ | $\frac{1}{3000}$  | 0            | 0 | 0  | $\frac{5}{6}$ | 0            |
| 0 =           | -1                | 1            | 0 | 0  | 3500          | 0            |
| 0 =           | $-\frac{1}{3000}$ | 0            | 1 | 0  | $\frac{1}{6}$ | 1            |
| -F =          | -31.4             | 0            | 0 | 1  | -78500        | 0            |

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3000} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3000} & 0 & 1 & 0 \\ -31.4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

|               | 0                 | $-\lambda_2$ | 0 | $-F$ | 1             | $-\lambda_2$ |
|---------------|-------------------|--------------|---|------|---------------|--------------|
| $\lambda_3 =$ | $\frac{1}{3000}$  | 0            | 0 | 0    | $\frac{5}{6}$ | 1            |
| 0 =           | -1                | 1            | 0 | 0    | 3500          | 6000         |
| $\lambda_1 =$ | $-\frac{1}{3000}$ | 0            | 1 | 0    | $\frac{1}{6}$ | 0            |
| $-F =$        | -31.4             | 0            | 0 | 1    | -78500        | 97600        |

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3000} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3000} & 0 & 1 & 0 \\ -31.4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3000 \\ 9000 \\ 1 \\ 191800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6000 \\ 0 \\ 97600 \end{pmatrix}$$

|               | 0                 | 0                | 0 | $-F$ | 1              |
|---------------|-------------------|------------------|---|------|----------------|
| $\lambda_3 =$ | $\frac{1}{2000}$  | $\frac{1}{6000}$ | 0 | 0    | $\frac{3}{12}$ |
| $\lambda_2 =$ | $\frac{1}{6000}$  | $\frac{1}{6000}$ | 0 | 0    | $\frac{7}{12}$ |
| $\lambda_1 =$ | $-\frac{1}{3000}$ | 0                | 1 | 0    | $\frac{1}{6}$  |
| $-F =$        | -15.14            | -16.26           | 0 | 1    | -135433        |

Из последней таблицы следует, что совместно с базисным решением координирующей задачи (26) в  $F$ -строке получаем вектор цен  $\pi$ :

$$\pi = (15.14, 16.26, 0); \quad \pi_1 = (15.14, 16.26); \quad \pi_0 = 0.$$

Теперь, имея вектор цен  $\pi$ , можно построить вспомогательную задачу: минимизировать

$$Z = -7.9x_1 - 3.4x_2 - 0.9x_3 - 0.4x_4 + 6.1x_5 + 2.6x_6$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 \leq 800,$$

$$x_3 + x_4 \leq 1000,$$

$$x_5 + x_6 \leq 1200,$$

$$\overline{x_1, x_5} \geq 0.$$

Перепишем ограничения (30) в виде

(30)

$$y_1 = -x_1 - x_2 + 800 \geq 0,$$

$$y_1 = -x_3 - x_4 + 1000 \geq 0,$$

$$y_1 = -x_5 - x_6 + 1200 \geq 0$$

и составим симплекс-таблицу:

|         | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ | $-x_5$ | $-x_6$ | 1    |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|------|
| $y_1 =$ | 1      | 1      | 0      | 0      | 0      | 0      | 800  |
| $y_2 =$ | 0      | 0      | 1      | 1      | 0      | 0      | 1000 |
| $y_3 =$ | 0      | 0      | 0      | 0      | 1      | 1      | 1200 |
| $Z =$   | 7.9    | 3.4    | 0.9    | 0.4    | -6.1   | -2.6   | 0    |

Эту задачу решаем модифицированным симплекс-методом. Поскольку все свободные члены положительны, сразу переходим к отысканию оптимального решения.

Как известно, признаком оптимальности является отсутствие положительных коэффициентов в  $Z$  – строке. Следовательно, разрешающий элемент берется в столбце над положительным коэффициентом  $Z$  – строки. Произведя шаги модифицированного симплекс-метода, получим следующие таблицы:

|         | $-y_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ | $-x_5$ | $-x_6$ | 1     |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|
| $x_1 =$ | 1      | 1      | 0      | 0      | 0      | 0      | 800   |
| $y_2 =$ | 0      | 0      | 1      | 1      | 0      | 0      | 1000  |
| $y_3 =$ | 0      | 0      | 0      | 0      | 1      | 1      | 1200  |
| $Z =$   | 7.9    | -4.5   | 0.9    | 0.4    | -6.1   | -2.6   | -6320 |

|         | $-y_1$ | $-x_2$ | $-y_2$ | $-x_4$ | $-x_5$ | $-x_6$ | 1     |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|
| $x_1 =$ | 1      | 1      | 0      | 0      | 0      | 0      | 800   |
| $x_3 =$ | 0      | 0      | 1      | 1      | 0      | 0      | 1000  |
| $y_3 =$ | 0      | 0      | 0      | 0      | 1      | 1      | 1200  |
| $Z =$   | -7.9   | -4.5   | -0.9   | -0.5   | -6.1   | -2.6   | -7220 |

Так как в  $Z$ -строке последней таблицы нет положительных коэффициентов, то получено оптимальное решение вспомогательной задачи:  
- при

$$x_1 = 800, x_2 = 0, x_3 = 1000, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0 - Z = -7220.$$

Проверяем оптимальность координирующей задачи (26):

$$\min \bar{f} = z_1 - \pi_0 = -7220 - 0 < 0.$$

Поскольку  $\min \bar{f} < 0$ , то решение неоптимальное, и вычисления продолжаются.

Составляем новую координирующую задачу:

$$F = 191800\lambda_2 + 94200\lambda_3 + 107800\lambda_4,$$

при ограничениях

$$3000\lambda_2 + 3000\lambda_3 + 1800\lambda_4 = 2500, \quad (31)$$

$$9000\lambda_2 + 3000\lambda_3 + 5400\lambda_4 = 6000,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1,$$

$$\lambda_i \geq 0.$$

Решение производится аналогичным образом, в результате получаем

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{1}{3}, \lambda_3 = \frac{1}{4}, \lambda_4 = \frac{5}{12}.$$

Затем переходим к определению вектора оценки, при котором устанавливаем:  $\pi = (21.1; 16.26; -18200)$ ;  $\pi_1 = (21.1; 16.26)$ ;  $\pi_0 = -18200$ .

Далее строим последующую вспомогательную задачу:

$$Z = -14x_1 - 8.6x_2 - 7x_3 - 6.4x_4 + 0x_5 + 3.7x_6,$$

$$x_1 + x_2 \leq 800,$$

$$x_3 + x_4 \leq 1000, \quad (32)$$

$$x_5 + x_6 \leq 1200,$$

$$\overline{x_1, x_6} > 0.$$

Решая задачу (32), получаем следующие оптимальные значения:

$$x_1 = 800, x_2 = 0; x_3 = 1000, x_4 = 0; x_5 = 0, x_6 = 1200; Z = -23640.$$

Проверяем оптимальность координирующей задачи (31). В данном случае:

$$\min \bar{f} = F - \pi_0 = -23640 - (-18200) = -5440 < 0.$$

Поскольку  $\min \bar{f} < 0$ , то решение неоптимальное, и процесс решения продолжается.

Составляем последнюю координирующую задачу: минимизировать

$$Z = 94200\lambda_3 + 107800\lambda_4 + 148600\lambda_5 + 75800\lambda_6$$

при ограничениях:

$$3000\lambda_3 + 1800\lambda_4 + 3000\lambda_5 + 1800\lambda_6 = 2500,$$

$$3000\lambda_3 + 5400\lambda_4 + 6600\lambda_5 + 3400\lambda_6 = 6000,$$

$$\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 = 1, \quad (33)$$

$$\overline{\lambda_3, \lambda_6} \geq 0.$$

Данную задачу решаем аналогичным образом, и в результате получаем следующее базисное решение:

$$\lambda_3 = 0, \lambda_4 = \frac{11}{30}, \lambda_5 = \frac{7}{12}, \lambda_6 = \frac{1}{20},$$

а также векторы цен:

$$\pi = (18; 16; -11000), \pi_1 = (18; 16), \pi_0 = -11000.$$

На последнем этапе устанавливаем новую вспомогательную задачу, решение которой дает

$$Z = -3800, \text{ при } x_1 = 800, x_2 = 0, x_3 = 1000, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0.$$

Проверяем оптимальность координирующей задачи:

$$\bar{f} = z_1 - \pi_0 = -3800 + 11000 = 7200 > 0.$$

Поскольку  $\bar{f} > 0$ , то получено оптимальное решение.

Из координирующей задачи следует, что базисными переменными являются

$$\lambda_4 = \frac{11}{30}, \lambda_5 = \frac{7}{12}, \lambda_6 = \frac{1}{20}$$

и

$$X^4 = (800, 0, 1000, 0, 0, 0),$$

$$X^5 = (800, 0, 1000, 0, 0, 1200),$$

$$X^6 = (800, 0, 0, 1000, 0, 0)$$

Решением исходной задачи будет

$$\begin{aligned} X^0 &= \sum_j \lambda_j X^j = \lambda_4 X^4 + \lambda_5 X^5 + \lambda_6 X^6 = \frac{11}{30} (800, 0, 1000, 0, 0, 0) + \\ &+ \frac{7}{12} (800, 0, 1000, 0, 0, 1200) + \frac{1}{20} (800, 0, 0, 1000, 0, 0) = \\ &= (800, 0, 950, 50, 0, 700), \end{aligned}$$

т.е.  $x_1 = 800, x_2 = 0, x_3 = 950, x_4 = 50, x_5 = 0, x_6 = 700$ .

Значение целевой функции, соответствующее данному решению, будет равно

$$\begin{aligned} F &= C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 + C_4 x_4 + C_5 x_5 + C_6 x_6 = \\ &= 56 \cdot 800 + 28 \cdot 0 + 63 \cdot 950 + 31 \cdot 50 + 70 \cdot 0 + 34 \cdot 700 = 130000. \end{aligned}$$

Таким образом, оптимальное решение задачи будет

$$F(X^0) = 130000$$

при

$$x_1 = 800, x_2 = 0, x_3 = 950, x_4 = 50, x_5 = 0, x_6 = 700.$$

Анализ реализации численной задачи оптимизации развития показывает, что принципиальная схема алгоритма декомпозиции Данцига-Вулфа линейного

программирования включает три основных этапа:

1. Преобразование заданной исходной задачи в координирующую или эквивалентную задачу.

2. Формирование и решение вспомогательной задачи.

3. Проверка оптимальности координирующей задачи и ее завершение.

**Вывод.** Преимущество метода декомпозиции Данцига-Вулфа относительно классических методов решения задачи линейного программирования выявляется при реализации задач больших размерностей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dantzig G.B., Wolfe P.P. The decomposition algorithm for linear programs // *Econometrica*.- 1961.- 29, N 4.- P. 767-778.
  2. Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование.-М.: Наука, 1962.-460 с.
  3. Ху Т.С. Целочисленное программирование и потоки в сетях.-М.: Мир, 1974.-520 с.
  4. Мелентев Л.А. Оптимизация развития и управления больших систем энергетики.- М.: Высшая школа, 1976.-336 с.
  5. Хачатрян В.С., Темурджян А.В., Балабекян М.А., Казарян Ю.А., Демирчян Х.Г. К построению одной математической модели из области больших систем энергетики // *Изв. АН АрмССР*. - Сер. ТН.-1978.-N 3.- С. 19-24.
  6. Поделько Л.П. Математические модели оптимального планирования развития энергосистем.-Минск: Высшая школа, 1978.-255 с.
  7. Хачатрян В.С., Темурджян А.В. Применение метода декомпозиции к проблеме оптимального развития больших систем энергетики // *Тезисы докладов Всесоюзного семинара по методам синтеза и планирования развития структуры сложных систем*.-Звенигород, 1979.-С. 71-72.
  8. Саливан Р.А. Проектирование развития электроэнергетических систем.-М.: Энергоиздат, 1982.-360с.
  9. Мелентев Л.Л. Оптимизация развития и управления больших систем энергетики.- М.: Высшая школа, 1982.-319 с.
  10. Хачатрян В.С., Темурджян А.В. Оптимизация структуры объединенной электроэнергетической системы с применением метода декомпозиции // *Электричество*.-1983.-N 4.-С. 8-13.
  11. Муртаф Б.Б. Современное линейное программирование.-М.: Мир, 1984.-224 с.
  12. Хачатрян В.С. Модели оптимального развития электроэнергетических систем / ЕрПИ.-Ереван, 1985.-112 с.
  13. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах.-М.: Высшая школа, 1986.-320 с.
  14. Арзамасцев Д.А. Липес А.В., Мизин А.Л. Модели оптимизации развития энергосистем.-М.: Высшая школа, 1987.-272 с.
  15. Хачатрян В.С., Gladunich E.A., Mnaçakanyan M.A. Оптимизация режима большой электроэнергетической системы методом декомпозиции по активным мощностям электрических станций // *Вестник ИАА*.-2005.- Т. 2, №2.-С. 191-200.
  16. Хачатрян В.С., Акобян А. Г., Gladunich E.A., Mnaçakanyan M.A., Тохунц А.Р., Джаангирян В.В. Определение потерь мощностей в сетях большой электроэнергетической системы методом диакоптики // *Вестник ИАА*.-2005.- Т. 2, №4.-С. 492-498.
  17. Хачатрян К.В. Диакоптическая математическая модель коррекции установившегося режима объединенной ЭЭС // *Изв. вузов. Электроэнергетика*.- 2007.- № 2.-С. 79-81.
- ГИУА. Материал поступил в редакцию 10.10.2006.

Վ.Ս. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ, Ա.Գ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

ԷԼԵԿՏՐԱԵՆԵՐԳԵՏԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԼԱՎԱՐԿԱԾ ԶԱՐԳԱՑՄԱՆ  
ԹՎԱՅԻՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՄՈԴԵԼԻ ԻՐԱՑՈՒՄԸ ԴԱՆՑԻԳ-ՎՈԼԲԻՆԻ  
ՏՐՈՇՄԱՆ ՄԵԹՈԴՈՎ

Առաջարկվում է էլեկտրաէներգետիկական համակարգի լավարկված զարգացման մաթեմատիկական մոդելի իրացումը՝ Դանցիգ-Վոլբի տրոհման տեսության կիրառմամբ: Դիտարկվում է էլեկտրաէներգետիկական համակարգի թվային մաթեմատիկական մոդելի իրացումը վերը նշված մեթոդով:

**Առանցքային բառեր.** մոդել, տեսություն, էլեկտրաէներգետիկական համակարգ, մատրից, նպատակային ֆունկցիա, լավարկման չափանիշ, ծրագիր:

V.S. KHACHATRYAN, A.G. HAKOBYAN

REALIZATION OF NUMERICAL MATHEMATICAL MODEL OF OPTIMUM  
DEVELOPMENT ELECTROPOWER SYSTEM BY THE METHOD OF  
DANZIG – WOLF DECOMPOSITION

The method of mathematical model realization of optimum development in electropower system with application of the Danzig - Wolfe theory decomposition is offered. Realization by the above-stated method of one numerical mathematical model of optimum development electropower systems is considered.

**Keywords:** model, theory, electropower system, matrix, criterion function, criterion of an optimality, program.