ISSN 0002-306X. Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2007. Т. LX, № 3.

УДК 519.8+65.018.2+658.264 АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Н.С. КАНАЯН

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ЗАДАЧИ РЮКЗАКА

Рассматриваются вопросы математического определения типа задачи рюкзака, обладающего свойством подобности типов предметов, размещаемых в нем. Предложен метод решения такого типа задач, который позволяет сократить вычислительное время пропорционально числу взаимно подобных типов предметов.

Ключевые слова: распределение ресурсов задача рюкзака, эффективные алгоритмы, вычислительная сложность.

Введение. В [1-3] предложена модель оптимального распределения ресурсов для крупных социально-экономических инвестиционных программ в области теплоснабжения, основанная на использовании задачи рюкзака. Поскольку проблема относится к *np-complete* классу сложности, известные подходы ее решения обычно нацелены на разработку эффективных решений для отдельных типов задач с различными свойствами [4,5].

В процессе изучения задачи оптимизации распределения ресурсов для программы теплоснабжения в контексте модели рюкзака были обнаружены некоторые свойства типов предметов рюкзака, которые, насколько нам известно, до настоящего времени не были обсуждены в специальной литературе. Эти свойства использованы для определения понятия *подобности* между типами предметов рюкзака.

1. Формулировка задачи. Математическая формулировка рассматриваемой задачи сводится к следующим соотношениям:

- критерий оптимальности: $Q_{opt} = \max\limits_{x_i} \sum\limits_i x_i w_i$;

- ограничения:

$$\sum_i x_i v_i \le V \; ; \tag{1}$$

- область допустимых решений: $x_i = \{0,1,2,...\}$,

где $i = \overline{1,N}$ - число типов проектов, требующих финансирования (ресурсов); v_i, w_i - стоимость и доходность i- го типа проектов соответственно; V- общее количество доступного инвестиционного ресурса (размер рюкзака);

x_i - число проектов i - го типа, отобранных для финансирования (число предметов, размещенных в рюкзаке).

В [4] обсуждается эффективность различных алгоритмов решения сформулированной выше задачи относительно двух показателей вычислительной сложности – времени и объема памяти, используемых при решении. Показано, что при полиномиальной аппроксимации алгоритма динамического программирования полиномиальное время решения полностью может быть гарантировано. Относительно высокая эффективность может быть также достигнута использованием генетических алгоритмов, однако решение не всегда может быть получено в разумно ограниченном интервале времени.

В [5] предложен подход, позволяющий исключить зависимость времени вычислений от размера рюкзака. Однако разработанный подход обеспечивает хорошие результаты лишь при достаточно больших значениях размеров рюкзака. В настоящей работе из [5] заимствованы ряд положений, определений и понятий, а именно:

Определение 1. Любое решение задачи рюкзака, удовлетворяющее ограничению на размер, согласно соотношениям, определяется как *возможное решение*. Любая задача имеет, по крайней мере, одно возможное решение.

Определение 2. Оптимальными являются те возможные решения, которые обеспечивают максимальное значение критерия оптимальности в (1).

Определение 3. Два типа предметов называются идентичными, если для них верны следующие соотношения: $v_i = v_k, w_i = w_k, i, k \in \overline{1,n}$.

Определение 4. Плотность некоторого типа $i, \forall i \in \overline{1,N}$ предметов определяется как $d_i = w_i / v_i$.

Определение 5. Наилучший тип предметов определяется как тип с наилучшей плотностью, так что i-й тип лучше k-го типа, если $d_i > d_k$, или $d_i = d_k, w_i < w_k$, или $d_i = d_k, w_i = w_k, i < k$.

Определение 6. Наилучшая плотность есть плотность наилучшего типа предметов.

Определение 7. Размерность задачи определяется числом N типов предметов, заданных в задаче.

Определение 8. Перед исполнением какого-либо алгоритма все типы предметов сортируются относительно плотности в нисходящем порядке.

Детальное изучение инвестиционных заявок на предоставление ресурсов в контексте модели рюкзака показывает, что некоторые из них имеют одинаковую плотность, но разные стоимости и доходности. Такие заявки не могут быть рассмотрены как идентичные относительно вышеприведенного определения 3. Это свойство типа задачи рюкзака мы определяем как *подобность* предметов, что математически может быть сформулировано следующим образом: два предмета задачи рюкзака считаются подобными, если и только если их плотности равны. В рамках этого определения идентичные предметы, определенные в [5], являются также и подобными. Ясно, что плотности являются действительными числами и их равенство должно быть установлено в пределах предварительно определенной точности представления чисел (знаков после запятой, отделяющей целую и дробную части числа).

В вышеприведенных наблюдениях не было бы ничего необычного, если бы не появившаяся идея исследовать возможность сокращения размерности задачи путем объединения типов предметов с равными плотностями. В настоящей работе сделана попытка разработать теоретическую основу для сокращения размерности задачи рюкзака и, следовательно, вычислительной сложности типа задачи, характеризующейся наличием подобных предметов. Насколько нам известно, такой подход на сегодняшний день не обсуждался в специальной литературе.

1. Сокращение размерности: Виртуальная и агентская задачи. Для задачи (1) определим *единичный тип* со следующими свойствами:

$$v_i^s = v_i / s_i, \; w_i^s = w_i / s_i, \; \forall i = \overline{1, N}, \tag{2}$$

где $\{s_i\}, i = \overline{1, N}$ - некоторые исключительные параметры каждого предмета.

Для рассматриваемой предметной области (программа теплоснабжения [1-3]) это может быть общая площадь, охватываемая системой теплоснабжения, предлагаемой конкретным проектным предложением. Такое преобразование исходной задачи (1) определяет новую задачу, которая далее именуется *виртуальной:*

$$\begin{aligned} & Q_{opt}^s = \max_{x_i^s} \sum_{i=1}^{N} x_i^s w_i^s, \\ & \sum_{i=1}^{N} x_i^s v_i^s \le V^s, \\ & x_i^s = \{0,1,2,\ldots\}, i = \overline{1, N}, \end{aligned} \tag{3}$$

где V^s - сокращенный размер рюкзака, $V^s * K = V$, $K = \text{average}\{s_i\} = \sum s_i / N^2$.

---

[1] Такое преобразование, очевидно, является своего рода приближением, влияющим на точность получения оптимального решения. Количественная оценка такого приближения, однако, выходит за рамки настоящей статьи.

В результате преобразования (2) подобные типы предметов преобразуются в идентичные в рамках виртуальной проблемы (3), т.е. для каждой пары предметов, принадлежащих разным типам, $i \neq j$, так что $d_i^s = d_j^s$, соответствующие параметры также будут равны: $v_i^s = v_j^s, w_i^s = w_j^s$. Согласно определению, идентичные предметы должны принадлежать одному и тому же типу. Следовательно, такие два типа предмета i и j могут быть объединены в один тип. Очевидно, это приведет к сокращению размерности задачи с N в N^s, а фактическая мера такого сокращения будет равна числу взаимно подобных типов предметов. Назовем тип предмета, сформированный в результате объединения двух (или более) подобных типов предметов, типом *агент,* а соответствующую преобразованную задачу – *агентской задачей.* Последняя может быть описана теми же выражениями (3), лишь с тем отличием, что N должно быть заменено на N^s.

Необходимо отметить, что агентская задача остается в том же классе вычислительной сложности, как и исходная задача. Однако для агентской задачи решение будет найдено быстрее – настолько, насколько будет сокращена размерность, т.е. время решения будет зависеть от числа подобных типов предметов в исходной задаче.

1. Решение задачи. Таким образом, исходная задача теперь преобразована в агентскую задачу, которая может быть решена за меньшее время. Решение агентской задачи затем должно быть преобразовано в решение исходной задачи.

Решение агентской задачи само по себе предоставит больше информации для построения решения исходной задачи в виде значений компонент решения агентской задачи. А именно, значение каждой компоненты $x_i^s, \forall i \in \overline{1, N^s}$ решения агентской задачи определит соответствующую часть размера (вместимости) рюкзака как в агентской, так и в исходной задачах. Кроме этого, значения $x_i^s, \forall i \in \overline{1, N^s}$ определят сумму значений соответствующих компонент решения исходной задачи, принадлежащих подобным типам предметов. Таким образом, обратное преобразование решения агентской задачи в решение исходной задачи не будет однозначным, так как каждый агентский тип предметов представляет один или более типов предметов исходной задачи. Отсюда и предложенное название агентской задачи.

Покажем, что существует прозрачный и быстрый алгоритм для такого обратного преобразования решения агентской задачи. Для этого исследуем свойства решения агентской задачи. Рассмотрим следующие случаи:

(a) $N^s = N$. Это означает, что исходная задача не содержит подобные типы предметов. Это приводит к одноразовой работе используемого алгоритма для преобразованной агентской задачи, что, очевидно, не приведет к выигрышу во времени, так как размерность задачи не будет сокращена. Более того, ряд дополнительных процедур будет задействован для выполнения обратного преобразования решения агентской задачи в решение исходной задачи. Однако это не будет отражено на вычислительной сложности, так как эти дополнительные процедуры, как будет далее показано, находятся в линейной зависимости от N.

(b) $N^s = 1$. Это означает, что все типы предметов исходной задачи подобны друг другу. Решение агентской проблемы в этом случае потребует постоянного времени:

$$x_1^s = \frac{V^s}{v_1^s} = k\,, \tag{4}$$

где v_1^s - стоимость предметов наилучшего типа.

Значение критерия оптимальности будет $Q^s(x_1^s) = kw_1^s$, которое, согласно определению 4, представляет его максимальное значение.

Таким образом, нами установлено, что решение исходной задачи должно содержать точно k ненулевых компонент. Однако неизвестно, какие именно типы предметов должны быть включены в окончательное решение, чтобы было удовлетворено ограничение на размер (вместимость) рюкзака. Вместе с тем ясно, что число возможных комбинаций типов предметов $C_k^N = \frac{N!}{k!(N-k)!}$, среди которых искомая комбинация должна быть выявлена, достаточно велико для полного перебора.

В таблице представлен процесс поиска оптимального решения.

Таблица

Множество возможных ненулевых компонент оптимального решения

N/k	1	2	.	i-1	i	i+1	.	N-1	N
1	v_1	v_2		v_{i-1}	v_i	v_{i+1}		v_{n-1}	v_n
2	$2v_1$	$2v_2$		$2v_{i-1}$	$2v_i$	$2v_{i+1}$		$2v_{n-1}$	$2v_n$
.									
j	jv_1	jv_2		jv_{i-1}	jv_i	jv_{i+1}		jv_{n-1}	jv_n
k	kv_1	kv_2		kv_{i-1}	kv_i	kv_{i+1}		kv_{n-1}	kv_n

Как видно из таблицы, в ней содержатся всевозможные ненулевые компоненты оптимального решения. Прямой путь к поиску оптимального решения путем полного перебора всех вариантов, как было отмечено выше, весьма обременителен в смысле требуемого времени, не будет способствовать качеству предложенного метода и поэтому далее не рассматривается.

Необходимо также отметить, что какой бы алгоритм поиска ни использовался, первым шагом будет нахождение ячейки таблицы, значение которой удовлетворяет условию ограничения на размер рюкзака.

Пусть первым шагом проверяется значение нижней левой ячейки таблицы. По существу, необходимо убедиться в том, что ее значение представляет собой допустимое (возможное) решение исходной задачи. Если это так, то очевидно, что это значение является также оптимальным, так как:

а) первый тип предметов одновременно есть наилучший по определению (поскольку типы предметов отсортированы в убывающем порядке относительно их плотностей);

б) решение не может содержать больше чем k ненулевых компонент.

Далее рассмотрим случай, когда размер рюкзака таков, что только $j < k$ предметов наилучшего типа могут быть размещены в рюкзаке. Можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. На первом шаге процесса обратного выбора возможное субрешение (т.е. компонента решения) x_1 проблемы (1), содержащее j предметов наилучшего типа, $j < k$, представляет собой оптимальное субрешение, т.е. наполняет соответствующую часть рюкзака так, что не существует какой-либо иной комбинации типов предметов, обеспечивающих большее значение критерия оптимальности.

Интуитивно эта констатация следует из *принципа оптимальности* и имеет важные последствия при построении алгоритма реализации для процесса обратного выбора.

Для доказательства теоремы допустим, что существует субрешение, которое наполнит часть рюкзака лучше, чем j предметов лучшего типа. При этом ясно, что число ненулевых компонент превысит j (up to k), а значение критерия оптимальности будет больше, чем определенное j предметами наилучшего типа. Необходимо проанализировать два возможных исхода.

Вариант 1. Существует тип предмета i, отличный от лучшего типа, m предметов которого ($m \le k$) могут наполнить часть рюкзака, наполненного j предметами лучшего типа, лучше, т.е. обеспечивая большее значение критерия оптимальности. При этом следующие соотношения должны быть одновременно верны:

$$mv_i < jv_1, \quad mw_i > jw_1, \quad v_i < v_1, \quad m > j, \quad \forall i \in \overline{1,N}. \tag{5}$$

Из этих соотношений следует

$$\frac{v_1}{v_i} > \frac{m}{j} > \frac{w_1}{w_i} = \frac{\frac{w_1 * v_1}{v_1}}{\frac{w_i * v_i}{v_i}} = \frac{d_1}{d_i} * \frac{v_1}{v_2}, \tag{6}$$

что противоречит вышеприведенным определениям какого бы ни было значения m, так как $d_1 > d_i$ и $v_1 > v_i$ из (5), что доказывает теорему 1.

Вариант 2. Существует линейная комбинация других типов предметов, число которых не превышает k $(\sum \alpha \le k)$, которая может наполнить часть рюкзака, наполненного j предметами наилучшего типа, лучше, т.е. обеспечивая большее значение критерия оптимальности. Тогда следующие соотношения должны выполняться одновременно:

$$\begin{gathered}
\alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_n v_n < j v_1, \\
\alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 + \cdots + \alpha_n w_n > j w_1, \\
\sum_{i=2}^{n} \alpha_i \le k, \\
\sum_{i=2}^{n} \alpha_i > j, \\
i = \overline{2, n}.
\end{gathered} \tag{7}$$

Преобразуем второе неравенство следующим образом:

$$\begin{gathered}
\alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n = \alpha_2 w_2 \frac{v_2}{v_2} + \cdots + \alpha_n w_n \frac{v_n}{v_n} = \\
= \alpha_2 d_2 v_2 + \cdots + \alpha_n d_n v_n > j d_1 v_1
\end{gathered} \tag{8}$$

или

$$\alpha_2 v_2 \frac{d_2}{d_1} + \alpha_3 v_2 \frac{d_3}{d_1} + \cdots + \alpha_n v_n \frac{d_n}{d_1} > j v_1. \tag{9}$$

Согласно определению, $d_1 > d_2 > \cdots > d_n$. Следовательно, значение каждой суммируемой левой части неравенства (9) меньше значения соответствующей суммируемой левой части первого неравенства (7), в то время как правые части этих неравенств одинаковы. Это представляет собой противоречие, что доказывает теорему 1.

Полученные выше результаты легко могут быть распространены на свойство компоненты решения, полученной на любом другом шаге процесса решения. В частности, можно утверждать следующее.

Теорема 2. На каждом $i, i \in \overline{1,N}$ шаге процесса обратного выбора возможное субрешение $x_i < k, i = \overline{1,N}$ задачи (1) представляет собой оптимальное субрешение, т.е. наполняет соответствующую часть рюкзака таким образом, что не существует иной комбинации типов предметов, обеспечивающей большее значение критерия оптимальности.

(c) $N^s \neq 1$. Это наиболее общий случай, означающий, что исходная задача содержит некоторое число подобных типов предметов. Рассуждения для построения быстрого алгоритма поиска оптимального решения для этого случая аналогичны вышеприведенным рассуждениям и могут быть опущены, не влияя на общность.

Вышеприведенный анализ позволяет произвести построение алгоритма обратного выбора, который выполняется не более чем за N шагов, т.е. обеспечивая линейное по N время исполнения.

Заключение. В работе предложен метод, основанный на идее замены прямого решения исходной задачи решением агентской задачи с меньшей размерностью и последующим решением нескольких задач обратного выбора, время исполнения которых линейно от N. Такой подход позволяет улучшить показатели качества процесса решения для задач рюкзака, характеризующихся свойством подобности типов предметов. Показатели качества алгоритма решения могут быть улучшены, если исходная задача содержит, по меньшей мере, два подобных типа предметов, и будут неуклонно улучшаться по мере роста числа подобных типов предметов.

Важным аспектом исследований является изучение того, как влияет на конечный результат вопрос приближенного преобразования размера рюкзака исходной задачи в размер рюкзака агентской задачи. Метод исследований этих вопросов будет основан на разработке и использовании системы моделирования поведения предложенного метода и основанного на нем алгоритма при различных размерностях задачи и вместимости рюкзака, а также используемых алгоритмов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kanayan N., Simonyan S., Kanayan S.** 'Interactive Transparency in Resource Sharing, Reproduction and Optimization of Public Investment Programs // Proceedings of International Conference on Politics and Information Systems: Technologies and Applications. Orlando, Florida, USA, July, 2004.
2. **Канаян Н.С.** Задача оптимального распределения ресурсов для городского теплоснабжения (I) // Вестник Инженерной академии Армении. -2005. -Т.2, № 2. – С.302-307.
3. **Канаян Н.С.** Задача оптимального распределения ресурсов для городского теплоснабжения (II) // Вестник Инженерной академии Армении. -2005. -Т.2, № 3. – С. 417-421.

4. **Kerr W.** Investigation into Knapsack Department of Computer Science, University of Wyoming, 2001.
5. **Landa L.** Sage Algorithms for Knapsack Problem, UCSD Technical Report, CS 2004-0794, June 2004.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 07.03.2007.

Ն.Ս. ԿԱՆԱՅԱՆ

ՊԱՅՈՒՍԱԿԻ ԽՆԴՐԻ ՈՐՈՇԱԿԻ ՏԻՊԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԻ ՄՈՏԵՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Քննարկվում է առարկաների նման դասեր ընդգրկող ուսապարկի խնդրի մի տեսակ: Ներմուծված է նման դասերի գաղափարը, առաջարկված է լուծման մեթոդ, որը թույլ է տալիս լուծման ժամանակի նվազեցում՝ փոխադարձաբար նման դասերի թվին համեմատական:

Առանցքային բառեր. ռեսուրսների բաշխում, ուսապարկի խնդիր, արդյունավետ ալգորիթմներ, հաշվողական բարդություն:

N.S. KANAYAN

AN APPROACH TO SOLVE SOME TYPES OF KNAPSACK PROBLEM

The mathematical definition of the knapsack problem that incorporates similar item types is discussed. The notion of similar item types is introduced and a method of solution has been proposed for problems with such properties, which enable a reduction in the calculation time of the problem proportionally to the number of mutually similar item types.

Keywords: resource allocation, sharing, knapsack problem, effective algorithms, computational complexity.