ISSN 0002-306X. Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2007. Т. LX, № 3.

УДК 681.326

АВТОМАТИЗАЦИЯ И
СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

А.А. ТЕРЗЯН, Г.С. СУКИАСЯН, А.Е. ПАРОНИКЯН

ОБ УГЛАХ ТРЕУГОЛЬНОЙ СЕТКИ ДЛЯ РАСЧЕТА МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Исследована зависимость сходимости процесса последовательных приближений от геометрических параметров дискретизационной сетки при решении нелинейных полевых задач методом конечных элементов. Даны оценки критических значений параметров, при превышении которых задача расходится.

Ключевые слова: электромагнитное поле, метод конечных элементов, критические значения геометрических параметров расчетной сетки.

Введение. Точность вычислительного алгоритма и сходимость процесса последовательных приближений при решении нелинейных полевых задач методом конечных элементов в значительной степени зависят от конфигурации расчетной сетки, дискретизирующей исследуемую непрерывную область. В этой связи в последние годы появился ряд работ, посвященных методам построения расчетных сеток [1-5]. Задача построения оптимальной сетки становится особенно актуальной при адаптивной сетке, когда осуществляется автоматическая динамическая декомпозиция элементов дискретизации в процессе решения краевой задачи (см. [6]).

Накопленный опыт свидетельствует, что при численном решении краевых задач наличие в расчетной сетке тупоугольных треугольников отрицательно сказывается на сходимости процесса решения. В настоящей работе дано строгое математическое обоснование этого явления и приведены оценки критического значения угла, при превышении которого задача расходится.

Численный расчет магнитного поля методом конечных элементов. Постоянное магнитное поле, созданное электрическим током, подчиняется уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial A}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial A}{\partial y}\right)=\delta,$$

где A – векторный магнитный потенциал; δ - плотность тока; ν - величина, обратная магнитной проницаемости.

Численный расчет двумерного магнитного поля методом конечных элементов сводится к решению системы уравнений

$$\sum_e\left(\nu_e\sum_{i=1}^{K}A_i\beta_{ij}^e-\frac{\delta_e\Delta_e}{3}\right)=0,\quad j=1,2,...,N, \qquad (1)$$

где A_i - значение потенциала A в узле i; ν_e - значение ν внутри элемента e; δ_e - значение δ внутри e; Δ_e - площадь треугольника e; β_{ij}^e - коэффициент взаимодействия вершин i и j в элементе e; N – число некраевых узлов.

В (1) внешнее суммирование осуществляется по всем элементам e, содержащим узел j, а внутреннее суммирование – по всем узлам i, содержащимся в элементе e (K - число таких узлов).

В случае сетки из плоских треугольных элементов коэффициент β_{ij} по вершинам i,j,m треугольника *e* имеет следующий вид (здесь K=3):

$$\begin{cases} \beta_{ii}^e = \dfrac{1}{4\Delta_e}\left[\left(y_j - y_m\right)^2 + \left(x_j - x_m\right)^2\right], \\ \beta_{ij}^e = \dfrac{1}{4\Delta_e}\left[\left(y_j - y_m\right)\left(y_m - y_i\right) + \left(x_j - x_m\right)\left(x_m - x_i\right)\right], \end{cases} \tag{2}$$

где (x_i,y_i), (x_j,y_j), (x_m,y_m)- декартовы координаты узлов i,j,m соответственно.

Заметим, что для каждого узла j в (1) принимают участие только непосредственные соседи узла j. Таким образом, получается система уравнений с неизвестными A_i, причем количество уравнений равно количеству неизвестных и количеству некраевых узлов.

Принцип доминирования диагонали. Рассмотрим систему линейных уравнений относительно неизвестных $A_1,\ldots, A_N$ с матрицей коэффициентов (c_{ij}):

$$\sum_{i=1}^{N} c_{ij} A_i = d_j, \quad j = 1,2,\ldots,N. \tag{3}$$

Хорошо известен (см. [7], стр. 494) достаточный признак сходимости итерационного процесса решения системы (3), называемый принципом доминирования диагонали: если диагональные элементы c_{jj} существенно превосходят недиагональные, то итерационный процесс решения системы (3) сходится. Рассмотрим разности

$$g_j = \left|c_{jj}\right| - \sum_{i \neq j}^{N} \left|c_{ij}\right|, \quad j = 1,2,\ldots,N.$$

В соответствии с принципом доминирования диагонали, если для всех j величины g_j положительны, то итерационный процесс решения системы линейных уравнений (3) обязательно сходится при любом начальном приближении. В качестве критерия сходимости обычно используется понятие невязки.

Под невязкой понимается максимальная разность двух последовательных приближений к решению. Если невязка стремится к нулю,

то процесс решения системы линейных уравнений сходится; если невязка стремится к бесконечности, то процесс решения расходится; если же невязка не имеет предела, то процесс колеблется. Если величины g_j равны нулю или отрицательны, то в зависимости от начального приближения могут иметь место все три случая (сходимость, расходимость, колебательный процесс). При этом чем меньше величины g_j, тем сходимость менее вероятна. И, наконец, при очень малых диагональных элементах процесс расходится.

Можно сформулировать следующий признак расходимости: если для всех j существует номер i такой, что

$$\left|c_{jj}\right| < \left|c_{ij}\right|, \quad \mathrm{j}=1,2,...,\mathrm{N},$$

то итерационный процесс решения системы (3) расходится.

Основные результаты. Путем несложных преобразований коэффициентов (2) получаем

$$\beta_{jj}^{e} = \frac{1}{4\Delta_e}\mathrm{b}^2, \quad \beta_{ij}^{e} = -\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\,\beta_m, \tag{4}$$

где b - длина стороны с вершинами i,m; β_{m} - угол при вершине m (рис. 1). Но длина отрезка, величина угла и площадь треугольника не зависят от выбора декартовой системы координат. Отсюда следует, что система уравнений, получающаяся при численном расчете двумерного магнитного поля (1) методом конечных элементов, не зависит от выбора декартовой системы координат.

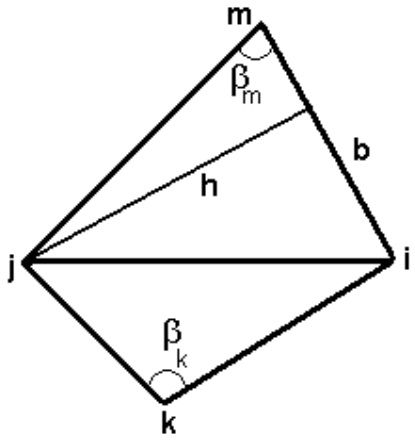


Рис. 1

Заметим, что данное утверждение неочевидно, так как коэффициенты (2) формально зависят от координат (x,y) вершин треугольника, а те, в свою очередь, от положения начала координат и направления осей.

Теперь вычислим коэффициенты получающейся матрицы (c_{ij}). Из (1), (3) и (4) получаем

$$c_{jj} = \sum_e \nu_e \beta_{jj}^e = \sum_e \nu_e \frac{b_e^{\,2}}{4\Delta_e},$$

где суммирование осуществляется по всем элементам e, содержащим узел j; b_e – длина стороны треугольника e, лежащей против вершины j; Δ_e - площадь треугольника e.

Рассмотрим два произвольных соседних узла j и i сетки. Пусть их соединяющий отрезок лежит на границе элементов e'=(j,i,m) и e''=(j,i,k). Из (1), (3) и (4) следует

$$c_{ij} = \nu_{e'} \beta_{ij}^{e'} + \nu_{e''} \beta_{ij}^{e''} = -\frac{1}{2}\left(\nu_{e'} \operatorname{ctg}\beta_m + \nu_{e''} \operatorname{ctg}\beta_k\right). \qquad (5)$$

С помощью элементарных тригонометрических преобразований получаем

$$\operatorname{ctg}\beta_m + \operatorname{ctg}\beta_k = \frac{b_e^{\,2}}{2\Delta_e}.$$

В силу (5) отсюда следует, что для любой конфигурации треугольной сетки и любом распределении магнитной проницаемости имеет место

$$\sum_{i=1}^{N} c_{ij} = 0, \quad j = 1,2,\ldots,N.$$

Следовательно, на каждой строке матрицы диагональный элемент равен сумме недиагональных элементов данной строки, взятых с противоположным знаком, т.е.

$$c_{jj} = -\sum_{i \neq j}^{N} c_{ij}, \quad j = 1,2,\ldots,N. \qquad (6)$$

Если в треугольной сетке нет ни одного тупоугольного треугольника, то в (5) все котангенсы будут неотрицательными. Следовательно, все недиагональные элементы отрицательны (или равны нулю). Для слагаемых, имеющих одинаковый знак, имеет место тождество

(7)

$$\left|\sum_{i\neq j}^{N} c_{ij}\right| = \sum_{i\neq j}^{N} \left|c_{ij}\right|, \quad \mathrm{j}=1,2,...,\mathrm{N}.$$

Отсюда в силу (6) следует, что все g_j равны нулю. Следовательно, если в треугольной сетке, используемой при численном расчете двумерного магнитного поля (1) методом конечных элементов, нет ни одного тупоугольного треугольника, то все величины g_j равны нулю, то есть при подходящем выборе начального приближения итерационный процесс сходится.

Совсем иная картина получается в случае наличия тупоугольных треугольников. Если узел j является вершиной острого угла тупоугольного треугольника, т.е. в (5) угол β_m тупой, то $\mathrm{ctg}\,\beta_m<0$, и соответствующий недиагональный элемент может стать положительным, тогда как основная масса недиагональных элементов неположительна. Однако для слагаемых, имеющих разные знаки, тождество (7) заменяется неравенством

$$\left|\sum_{i\neq j}^{N} \mathrm{c}_{ij}\right| < \sum_{i\neq j}^{N} \left|\mathrm{c}_{ij}\right|, \quad \mathrm{j}=1,2,...,\mathrm{N}.$$

Следовательно, для таких узлов j имеем $g_j<0$ и доминирования диагонали не происходит. Оценим, при каких углах происходит доминирование недиагональных элементов и задача обязательно расходится, т.е. когда имеет место $\left|\mathrm{c}_{jj}\right| < \left|\mathrm{c}_{ij}\right|$. Пренебрегая влиянием магнитной проницаемости, т.е. считая значение ν вокруг узла j приблизительно одинаковым, получим условие

$$\mathrm{c}_{jj} = \sum_{e} \frac{\mathrm{b}_e^{\,2}}{4\Delta_e} < \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\,\beta.$$

Обозначим через h_e высоту, проведенную к стороне b_e треугольника e (рис. 1). Тогда $2\Delta_e = h_e/b_e$, и условие доминирования недиагональных элементов примет вид

$$\mathrm{ctg}\,\beta > \sum_{e} \frac{\mathrm{b}_e}{2\mathrm{h}_e}.$$

Последнюю сумму можно оценить как периметр окружности, описанной вокруг узла, деленный на ее диагональ, т.е. числом π. Следовательно, задача расходится, когда $ctg\beta > \pi$ или $\beta < 12^o$. Такие углы обязательно появятся, если в сетке присутствует треугольник с тупым углом большим, чем 156°.

Следовательно, если в треугольной сетке, используемой при численном расчете двумерного магнитного поля (1) методом конечных элементов, есть треугольники с тупым углом большим, чем 156°, то, независимо от начального приближения, итерационный процесс расходится.

Заметим, что полученные результаты относятся к системе уравнений с постоянными коэффициентами. Вместе с тем при численном решении полевой нелинейной задачи методом конечных элементов возникает система уравнений с переменными коэффициентами, зависящими от магнитной проницаемости. Данное обстоятельство также влияет на процесс сходимости решения. Вышеприведенные оценки получены без учета влияния пересчета ν после каждой итерации.

Численный эксперимент. Полученные результаты опробованы на задаче численного определения магнитного поля в области, представленной на рис. 2.

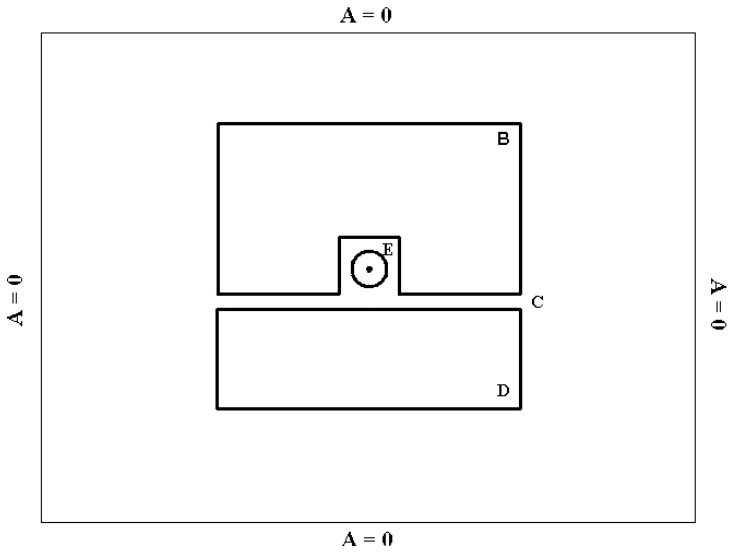
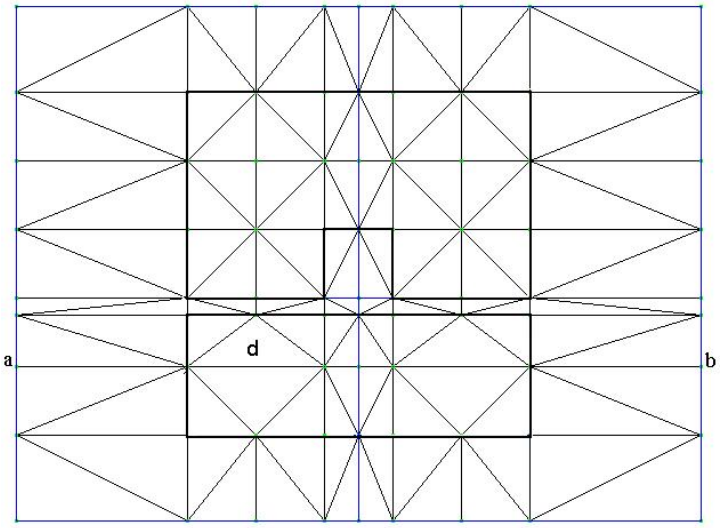


Рис. 2

На рисунке показано электромагнитное устройство с ферромагнитными участками B и D, разделенными воздушным зазором C. Устройство содержит обмотку E, обтекаемую током. Для решения задачи рассмотрена конечная область, на границах которой приняты нулевые значения потенциалов (A=0).

На рис. 3а представлена расчетная сетка, где отсутствуют тупоугольные треугольники. Как видно из рис 3б, процесс решения задачи сходится достаточно успешно.

а)



б)

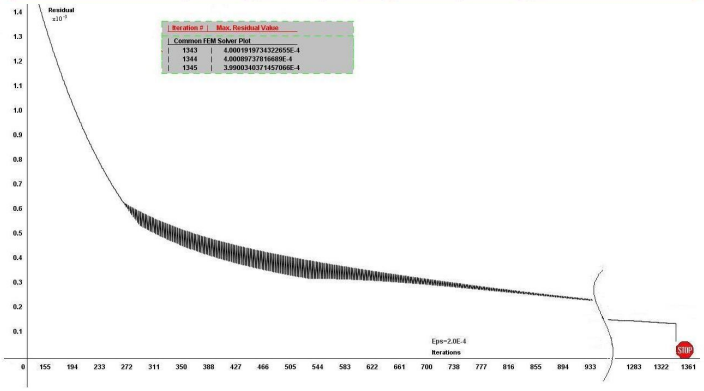
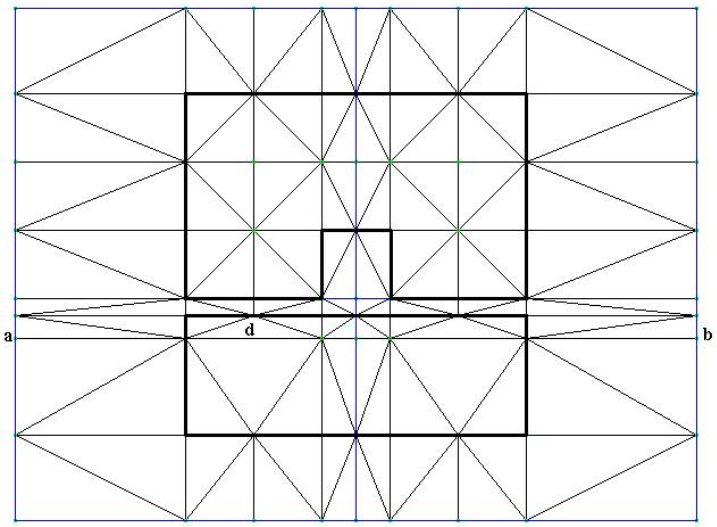


Рис. 3

С изменением положения линии ab (рис. 4а) в расчетной сетке образуются два симметричных тупоугольных треугольника d с тупым углом, равным 148°. Это обстоятельство приводит к заметному осложнению процесса сходимости. Если в случае расчетной сетки, представленной на рис. 3 а, процесс решения сходится за 1345 итераций, то во втором случае (рис. 4а) количество итерации возрастает до 2998 (рис. 4б).

а)



б)

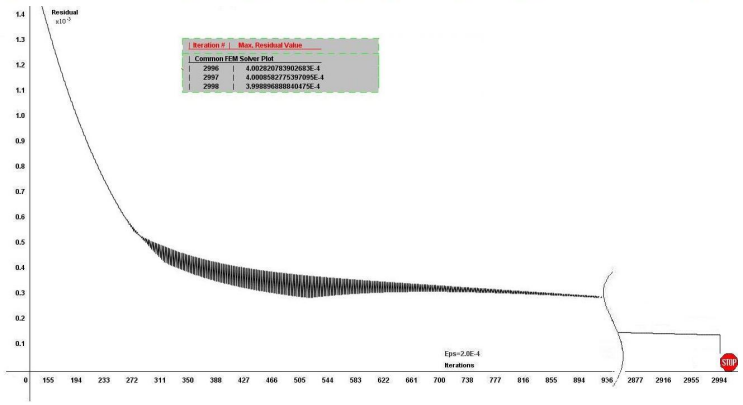
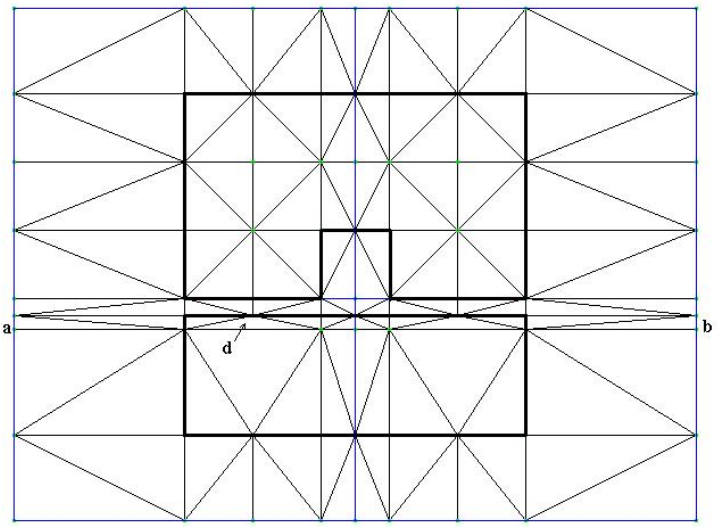


Рис. 4

С появлением же в расчетной сетке тупоугольного треугольника (двух симметричных тупоугольных треугольников d) с критическим углом 156° (рис. 5а) процесс решения задачи расходится (рис. 5б).

а)



б)

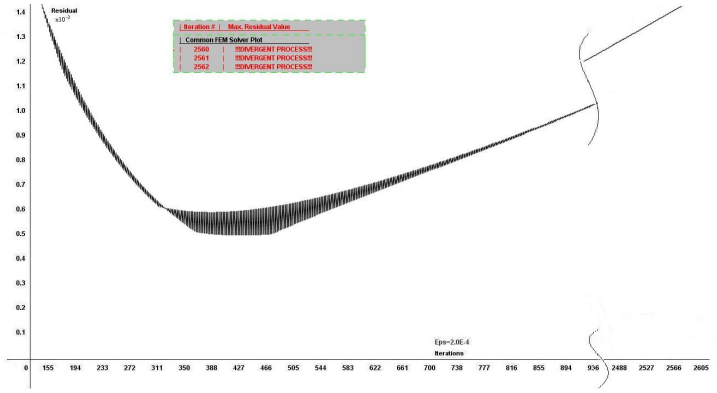


Рис. 5

На рис. 3б, 4б, 5б затемненные участки процесса изменения невязки отражают колебательный процесс, связанный с пересчетом магнитной проницаемости ν (в зоне чувствительных изменений)ν после каждой итерации.

Таким образом, полученные результаты численного эксперимента подтверждают вывод о том, что в треугольной сетке, используемой при численном расчете двумерного магнитного поля методом конечных элементов, наибольший угол в треугольных элементах не должен превышать критического значения 156°.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ruppert J.** A Delaunay Refinement Algorithm for Quality 2-Dimensional Mesh Generation. NASA Ames Research Center //Submission to Journal of Algorithms.- 1994.
2. **Иваненко С.А.** Адаптивные криволинейные сетки в методе конечных элементов //Ж. вычисл. матем. и матем. физ.- 1995.- Т. 35, № 11.- С. 1334 – 1355.
3. **Лисейкин В.Д.** Обзор методов построения адаптивных сеток //Ж. вычисл. матем. и матем. физ.- 1996.- Т. 36, № 1.- С. 3 – 41.
4. **Скворцов А.В.** Триангуляция Делоне и ее применение. – Томск: Издательство ТУ, 2002. – 128 с.
5. **Терзян А.А, Сукиасян Г.С., Пароникян А.Е.** О расчете магнитных полей методом конечных элементов с динамической композицией элементов дискретизации //Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2005. - Т. 58, № 2. – С. 332-339.
6. **Терзян А.А, Сукиасян Г.С., Пароникян А.Е.** Об оптимизации сетки для расчета магнитных полей методом конечных элементов //Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2005. - Т. 58, № 3. – С. 570-578.
7. **Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.** Справочник по математике.- М.: Наука, 1986.- 544с.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 19.05.2007.

Հ.Ա. ԹԵՐԶՅԱՆ, Հ.Ս ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ, Ա. Ե. ՊԱՐՈՆԻԿՅԱՆ

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՏԱՐՐԵՐԻ ՄԵԹՈԴՈՎ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿԻ ՀԱՄԱՐ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՅԻՆ ՑԱՆՑԻ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Վերջավոր տարրերի մեթոդով ոչ գծային դաշտային խնդիրների լուծման դեպքում հետազոտված է հաջորդական մոտեցումների գործընթացի զուգամիտման կախվածությունը ընդհատավորման ցանցի երկրաչափական պարամետրերից: Տրված են պարամետրերի կրիտիկական արժեքների գնահատականները, որոնց գերազանցելու դեպքում խնդիրը չի զուգամիտում:

Առանցքային բառեր. էլեկտրամագնիսական դաշտ, վերջավոր տարրերի մեթոդ, հաշվարկային ցանցի երկրաչափական պարամետրերի կրիտիկական արժեքներ:

H.A. TERZYAN, H.S. SOUKIASYAN, A.E. ƤARONIKYAN

ON TRIANGULAR MESH ANGLES BUILT FOR FINITE-ELEMENT SOLUTION OF MAGNETIC FIELD ƤROBLEMS

Convergence dependence of consecutive approach process on geometrical parametres of a finite-element mesh is investigated. Estimations of critical parametres values at which the excess of the problem disperses at the solution of nonlinear field problems by the finite-element method are given.

Keywords: electromagnetic field, finite-element method, critical values of geometrical parametres, finite of the element mesh.