

В.Г. ПЕТРОСЯН, Р.Р. ГЮЛБУДАГЯН

**ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЯДЕРНЫХ
РЕАКТОРОВ**

Рассматривается динамическая модель ядерного реактора, описываемая с помощью нелинейных дифференциальных уравнений с учетом обратных связей по мощности и температуре. Дифференциальные уравнения решены аналитически с применением теории Хопфа. Получены нелинейные колебательные функции мощности и температуры реактора в зависимости от реального времени. Построены графические образы решений, а также соответствующие предельные циклы. Вычислены периоды соответствующих нелинейных колебаний мощности и температуры.

Ключевые слова: динамика реакторов, бифуркация, автоколебания, предельный цикл.

Введение. В настоящее время исследования динамики реакторов проводятся по сложным математическим моделям, описываемым посредством большого количества обыкновенных или дифференциальных уравнений с частными производными. Однако не утратили своего значения и простые идеализированные модели динамики реакторов, характеризующиеся минимальным порядком. Это связано с тем, что детерминированная система-реактор при отсутствии в ней случайных внешних возмущений может генерировать стохастические колебания, т.е. порождать динамический хаос [1,2]. Кроме того, результаты анализа упрощенных моделей позволяют более осознанно и целенаправленно проводить последующие численные расчеты динамики ядерно-энергетических установок по сложным математическим моделям.

Среди количественных методов исследования реакторов большое значение имеет теория бифуркации, а именно, теория бифуркации рождения цикла Хопфа относительно возникновения автоколебаний из стационарных состояний [3].

В [4] для решения уравнений динамики реакторов применяются качественные и численные методы теории Хопфа. Однако для исследования реальных колебаний важное значение имеют аналитические решения уравнений динамики реакторов, основанные на теории бифуркации рождения цикла Хопфа.

Постановка задачи. Рассмотрим известную модель динамики реактора, пренебрегая запаздывающими нейтронами, в которой учтены мгновенная (мощностная) и инерционная (температурная) обратные связи, существующие в реакторе. Исходные уравнения динамики имеют следующий математический вид:

$$\frac{dN}{dt} = \rho(N, T), \quad M \frac{dT}{dt} = N - k(T - \bar{T}). \quad (1)$$

В модели приняты следующие обозначения: N – мощность реактора; T – температура; M – полная теплоемкость среды с температурой T ; t – время; N_0, T_0 – значения N и T в стационарном рабочем режиме; $k, \bar{T}$ – положительные постоянные.

Физический смысл величин $T, \bar{T}, k$ определяется механизмом отвода тепла. Так, если тепло отводится циркулирующим горючим, тогда T и $\bar{T}$ – температуры жидкого горючего на выходе и входе активной зоны соответственно, $k = Gg$, где G – расход массы горючего, g – его удельная теплоемкость.

Если тепло отводится теплоносителем и при этом тепловая инерция тепловыделяющего элемента (ТВЭЛ) мала, тогда T – температура жидкого теплоносителя, омывающего ТВЭЛ, $\bar{T}, k = Gg$ – соответствующие характеристики теплоносителя.

Если тепло передается от ТВЭЛ в среду с постоянной температурой $\bar{T}$, тогда T – температура ТВЭЛ, k – коэффициент теплопередачи от горючего к охлаждающей среде.

Функция $\rho(N, T)$ представляет собой отношение реактивности реактора к эффективному времени жизни нейтронов.

Реактивность $\rho(N, T)$ разложим в ряд в окрестности одного из стационарных режимов реактора следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho = & \left(\frac{\partial \rho}{\partial N} \right)_0 (N - N_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial N^2} \right)_0 (N - N_0)^2 + \\ & + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_0 (T - T_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial T^2} \right)_0 (T - T_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

В [3] не учитывается нелинейная зависимость реактивности от мощности, которая описывается в виде $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial N^2} \right)_0 (N - N_0)^2$ в выражении (2). Отметим, что индексом «0» обозначается значение соответствующей величины в выбранном стационарном режиме.

Подставив выражение (2) в систему уравнений (1), переходим в уравнениях (1) к новым переменным:

$$x = \frac{N - N_0}{N_0} \quad y = \frac{k(T - T_0)}{N_0}$$

и новому безразмерному времени: $\tau = kt / M$.

Введем также безразмерные параметры:

$$\begin{aligned} a = & \frac{N_0 M}{k} \left(\frac{\partial \rho}{\partial N} \right)_0, \quad b = \frac{N_0 M}{k^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_0, \\ c = & \frac{1}{2} \frac{M N_0^2}{k^3} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial T^2} \right)_0, \quad d = \frac{1}{2} \frac{N_0^2 M}{k} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial N^2} \right)_0. \end{aligned}$$

В результате этих преобразований уравнения (1) преобразуются к виду

$$\begin{cases} \dot{x} = (x+1)(ax + by + cy^2 + dx^2), \\ \dot{y} = x - y. \end{cases} \quad (3)$$

Описание алгоритма. Задача заключается в нахождении предельных циклов и соответствующих им периодических решений $x(\tau)$, $y(\tau)$ системы уравнений (3) с применением теории бифуркации рождения цикла Хопфа.

Из уравнений

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ (x+1)(ax + by + cy^2 + dx^2) = 0 \end{cases}$$

находим три состояния равновесия системы (3):

$$P_1 (0;0); \quad P_2 (-1;-1); \quad P_3 \left[-\frac{a+b}{c+d}; -\frac{a+b}{c+d} \right].$$

Первое состояние равновесия P_1 определяет стационарный режим по мощности $N_0 > 0$ при $T_0 > \bar{T}$. Второе состояние равновесия P_2 характеризует погашенный реактор (активное состояние - минимально контролируемая мощность). Третье состояние равновесия P_3 обусловлено нелинейной зависимостью реактивности от температуры.

Задача заключается в изучении стационарного режима по мощности и в исследовании состояния погашенного реактора по минимально контролируемой мощности. С этой целью зафиксируем неподвижные точки P_1 и P_2 , линеаризуем систему (3) в окрестности этих точек равновесия и составим характеристические уравнения линеаризованных систем.

Для точки равновесия $P_2 (-1;-1)$ характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + (a + b - c - d + 1) \lambda + a + b - c - d = 0. \quad (4)$$

Собственные числа матрицы Якоби $\lambda_1(c_c)$ и $\lambda_2(c_c)$ уравнений (3), которые являются решениями характеристического уравнения (4), не удовлетворяют условиям:

а) $\text{Re}(c_c) = 0$, если собственные числа $\lambda_1(c_c)$ и $\lambda_2(c_c)$ комплексно сопряжены ($\lambda_1(c_c) = \overline{\lambda_2(c_c)}$) при c из некоторого интервала c_c ;

б) $\text{Re } \lambda_1'(c_c) = \text{Re } \frac{d\lambda_1}{da} \neq 0$;

в) $\text{Im} \lambda_1(c_c) \neq 0$.

Следовательно, для точки равновесия $P_2 (-1;-1)$ не существует бифуркация рождения цикла по Хопфу. Иными словами, в погашенном реакторе предельных циклов не существует.

Для точки равновесия $P_1 (0; 0)$ характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + (1 - a) \lambda - (a + b) = 0. \quad (5)$$

Собственные числа матрицы Якоби уравнений (3), т.е. решения характеристического уравнения (5), удовлетворяют следующим условиям:

$$a) \operatorname{Re} \lambda_1 = \frac{a_c - 1}{2} = 0, \quad a_c = 1;$$

собственные числа $\lambda_1(a_c)$ и $\lambda_2(a_c)$ комплексно сопряжены:

$$\lambda_1(a_c) = \overline{\lambda_2(a_c)} = i\sqrt{1+b},$$

$$0 > b > -1, \quad a+b < 0, \quad 0 < a < 1, \quad |a| < |b|;$$

$$б) \operatorname{Re} \lambda_1'(a_c) = \operatorname{Re} \frac{d\lambda_1}{da} = \frac{1}{2} \neq 0;$$

$$в) \operatorname{Im} \lambda_1(a_c) = \sqrt{1+b} \neq 0.$$

При этих условиях имеет место бифуркация рождения цикла, т.е. существует предельный цикл для точки $P_1(0,0)$.

Приступим к нахождению периодических решений уравнений (3). Для этой цели вычислим коэффициенты бифуркации. Используя формулы коэффициентов бифуркации, предлагается следующий алгоритм решения уравнений (3):

$$\begin{cases} x = \operatorname{Re} z, \\ y = \frac{\operatorname{Re} z}{1 + \varpi_0^2} + \frac{\varpi_0 \operatorname{Im} z}{1 + \varpi_0^2}. \end{cases} \quad (6)$$

В (6) сделаны следующие обозначения: $\varpi_0 = \sqrt{1+b}$, $-1 < b < 0$.

Для комплексных промежуточных решений реальные и мнимые части имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z = & \varepsilon \cos \frac{2\pi\tau}{T} - \frac{\varepsilon^2}{6\varpi_0} \varpi_1 \cos \frac{4\pi\tau}{T} + \frac{\varepsilon^2}{6\varpi_0} \varpi \sin \frac{4\pi\tau}{T} + \frac{\varepsilon^2}{2\varpi_0} \Delta_1 \cos \frac{4\pi\tau}{T} + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2\varpi_0} \Delta \sin \frac{4\pi\tau}{T} - \frac{\varepsilon^2}{\varpi_0} \gamma_1, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} z = & \varepsilon \sin \frac{2\pi\tau}{T} + \frac{\varepsilon^2 \omega}{6\varpi_0} \cos \frac{4\pi\tau}{T} + \frac{\varepsilon^2}{6\varpi_0} \varpi_1 \sin \frac{4\pi\tau}{T} - \frac{\varepsilon^2}{2\varpi_0} \Delta \cos \frac{4\pi\tau}{T} + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2\varpi_0} \Delta_1 \sin \frac{4\pi\tau}{T} + \frac{\varepsilon^2}{\varpi_0} \gamma. \end{aligned} \quad (8)$$

В выражениях (7) и (8) сделаны следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\varpi &= \frac{1}{2} \frac{c}{(1+\varpi_0^2)^2} + \frac{d}{2} - \frac{c\varpi_0^2}{(1+\varpi_0^2)^2} - \frac{1}{2} + \frac{c}{(1+\varpi_0^2)^2}, \\
\varpi_1 &= -\frac{c}{2\varpi_0(1+\varpi_0^2)^2} - \frac{d}{2\varpi_0} - \frac{\varpi_0}{2} + \frac{3}{2} \frac{c\varpi_0}{(1+\varpi_0^2)^2}, \\
\Delta &= \frac{c}{2(1+\varpi_0^2)^2} + \frac{d}{2} - \frac{c\varpi_0^2}{2(1+\varpi_0^2)^2} + \frac{1}{2} - \frac{c}{(1+\varpi_0^2)^2}, \\
\Delta_1 &= -\frac{c}{2\varpi_0(1+\varpi_0^2)^2} - \frac{d}{2\varpi_0} + \frac{\varpi_0}{2} - \frac{c\varpi_0}{2(1+\varpi_0^2)^2}, \\
\gamma &= \frac{c}{2(1+\varpi_0^2)^2} + \frac{d}{2} + \frac{c\varpi_0^2}{2(1+\varpi_0^2)^2}, \\
\gamma_1 &= -\frac{c}{2\varpi_0(1+\varpi_0^2)^2} - \frac{d}{2\varpi_0} - \frac{c\varpi_0}{2(1+\varpi_0^2)^2}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Величина ε^2 определяется следующим образом:

$$\varepsilon^2 = \frac{a}{\mu_2} + \dots \quad 0 < a < 1. \tag{10}$$

Масштабированное время имеет вид

$$\tau = kt / M. \tag{11}$$

Период автоколебаний имеет вид

$$T = \frac{2\pi}{\varpi_0} (1 + \tau_2 \varepsilon^2). \tag{12}$$

Коэффициенты бифуркации τ_2 , μ_2 определяются следующими выражениями:

$$\tau_2 = -\frac{1}{\varpi_0} \left\{ \frac{1}{32\varpi_0} AC - \frac{1}{32\varpi_0} BD - \frac{1}{16\varpi_0} (E+F) - \frac{1}{96\varpi_0} (G+L) + \frac{1}{16} N + \mu_2 \varpi'(0) \right\}, \tag{13}$$

$$\mu_2 = -\frac{1}{64\varpi_0} AD - \frac{1}{64} BC + \frac{1}{32} M. \tag{14}$$

В выражениях (13) и (14) сделаны следующие обозначения:

$$\varpi'(0) = \frac{2}{\sqrt{4b+6}},$$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{2c}{(1+\varpi_0^2)^2} + 2d - \frac{2c\varpi_0^2}{(1+\varpi_0^2)^2} + 2 - \frac{4c}{(1+\varpi_0^2)^2}, \\
B &= -\frac{2c}{\varpi_0(1+\varpi_0^2)^2} - \frac{2d}{\varpi_0} + 2\varpi_0 - \frac{2c\varpi_0}{(1+\varpi_0^2)^2}, \\
C &= \frac{2c}{(1+\varpi_0^2)^2} + 2d + \frac{2c\varpi_0^2}{(1+\varpi_0^2)^2}, \\
D &= \frac{-2c}{\varpi_0(1+\varpi_0^2)^2} - \frac{2d}{\varpi_0} - \frac{2c\varpi_0}{(1+\varpi_0^2)^2}, \\
E &= \left[\frac{2c}{(1+\varpi_0^2)^2} + 2d + \frac{2c\varpi_0^2}{(1+\varpi_0^2)^2} \right]^2, \\
F &= \left[\frac{2c}{\varpi_0(1+\varpi_0^2)^2} + \frac{2d}{\varpi_0} + \frac{2c\varpi_0}{(1+\varpi_0^2)^2} \right]^2, \\
G &= \left[\frac{2c}{(1+\varpi_0^2)^2} + 2d - \frac{2c\varpi_0^2}{(1+\varpi_0^2)^2} - 2 + \frac{4c}{(1+\varpi_0^2)^2} \right]^2, \\
L &= \left[-\frac{2c}{\varpi_0(1+\varpi_0^2)^2} - \frac{2d}{\varpi_0} - 2\varpi_0 + \frac{6c\varpi_0}{(1+\varpi_0^2)^2} \right]^2, \\
M &= \frac{6c}{(1+\varpi_0^2)^2} + 6d + \frac{2c\varpi_0^2}{(1+\varpi_0^2)^2} - \frac{4c}{(1+\varpi_0^2)^2}, \\
N &= -\frac{6c}{\varpi_0(1+\varpi_0^2)^2} - \frac{6d}{\varpi_0} - \frac{2\varpi_0}{(1+\varpi_0^2)^2} - \frac{4c\varpi_0}{(1+\varpi_0^2)^2}.
\end{aligned} \tag{15}$$

На основании формул (3) – (15) реализована программа с применением пакета «Математика». На рис. 1-3 показаны графики решений уравнений (3) и соответствующие предельные циклы, полученные по предлагаемой программе.

На рис.1 приведены соответствующие графики при значениях коэффициентов: $a = 0,4$; $b = -0,6$; $c = 0,5$; $d = 0,6$. Вычисленный период колебаний равен $T = 37,5786$. На рис.2 - соответствующие графики для коэффициентов: $a=0,4$; $b=-0,6$; $c=0,5$; $d=0$. Вычисленный период равен $T= 45,7646$. Значение коэффициента $d = 0$ на рис.2 указывает на то, что нелинейная зависимость реактивности по мощности не учитывается. На рис.3 приведены решения уравнений и предельный цикл при следующих значениях коэффициентов:

$a = 0,5$; $b = -0,8$; $c = 0$; $d = 0,2$. Период равен $T = 52,2107$. Значение коэффициента $c=0$ на рис.3 означает, что не учитывается нелинейная зависимость реактивности от температуры при учете нелинейной зависимости реактивности от мощности.

Как видно, предельный цикл состоит из двух периодов. Вторым периодом можно вычислить графическим способом.

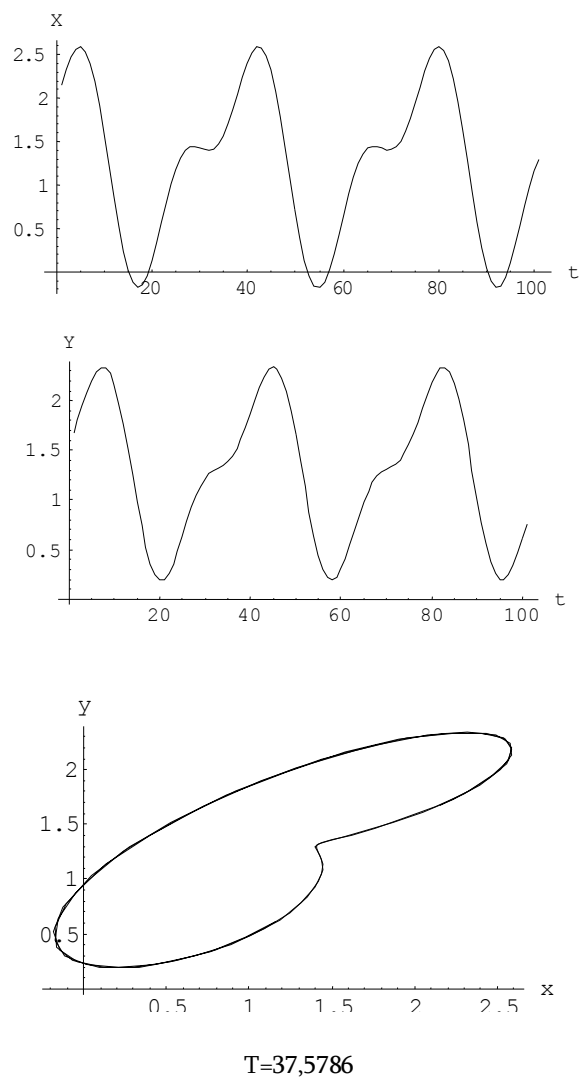
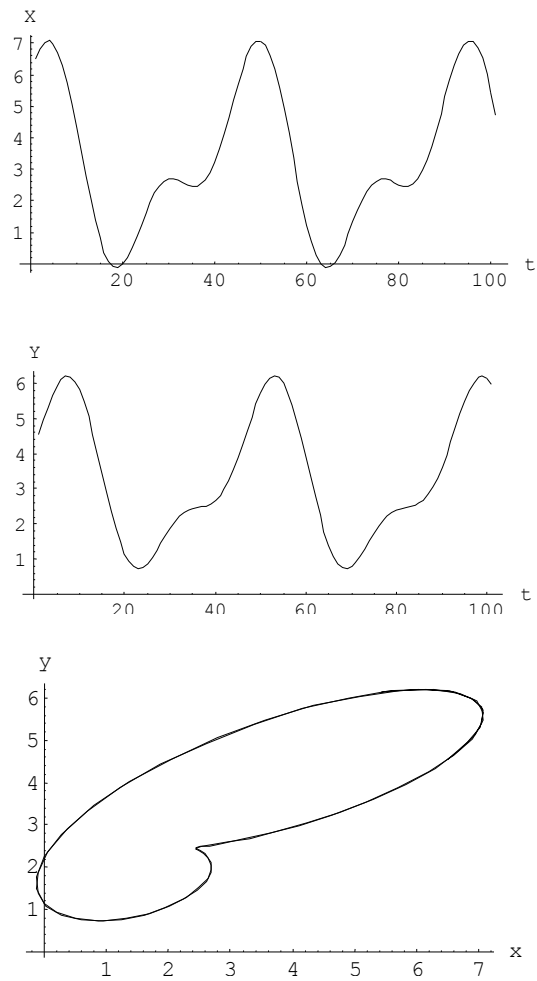


Рис. 1. Решение уравнений и соответствующий предельный цикл при коэффициентах: $a=0,4$; $b=-0,6$; $c=0,5$; $d=0,6$



$$T=45,7646$$

Рис. 2. Решение уравнений и соответствующий предельный цикл при коэффициентах: $a=0,4$; $b=-0,6$; $c=0,5$; $d=0$

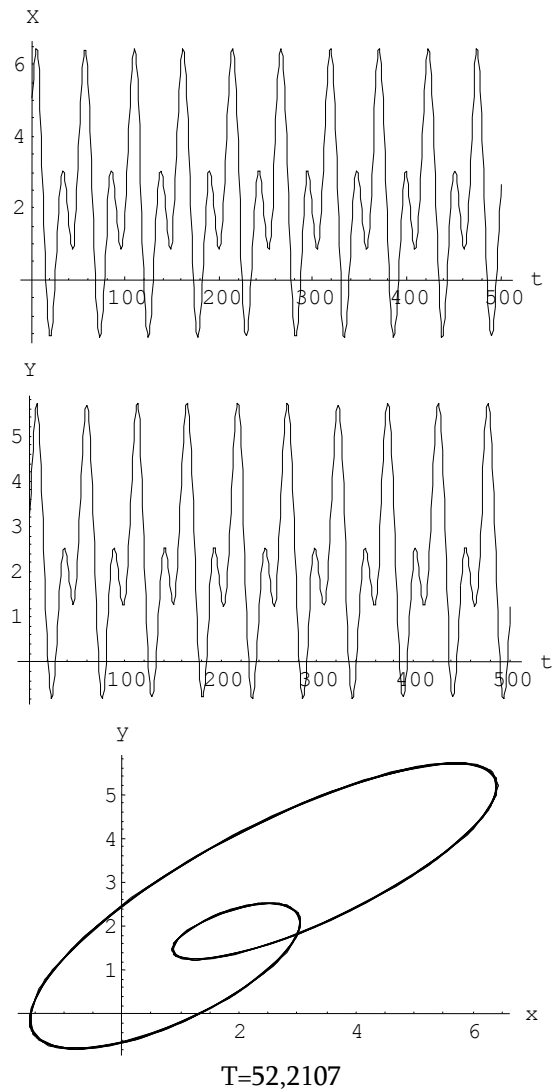


Рис. 3. Решение уравнений и соответствующий предельный цикл при коэффициентах: $a=0,5$; $b=-0,8$; $c=0,0$; $d=0,2$.

Отметим, что двойной предельный цикл обнаруживается также в двух первых приближениях в зависимости от реактивности при подходящем выборе коэффициентов.

Таким образом, применение теории бифуркации Хопфа позволяет получить количественные оценки нелинейных колебаний относительной мощности и температуры с учетом мгновенных и инерционных обратных связей в реакторе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Постников Н.С. Простейшая модель реактора со стохастическим поведением // Атомная энергия. – 1997. – Т.82, вып.1 – С.10-18.
2. Постников Н.С. Условия существования хаотических колебаний в ядерных реакторах // Атомная энергия. – 2000. – Т.99, вып.6 – С. 432-438.
3. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн Н. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. – М.: Мир, 1985.- 280 с.
4. Горяченко В.Д. Качественные методы в динамике ядерных реакторов. Физика ядерных реакторов. Вып. 23.- М.: Энергоатомиздат, 1983–87 с.

НИИ «Арматом», РА. Материал поступил в редакцию 06.11.2006.

Վ.Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ, Ռ. Ռ. ԳՅՈՒԼԲՈՒԴԱԴՅԱՆ

ՄԻՋՈՒԿԱՑԻՆ ՌԵԱԿՏՈՐՆԵՐԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՏՍՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՄՈՂԵԼ

Դիտարկված է միջուկային ռեակտորի դինամիկական մոդելը, որը նկարագրվում է ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումներով, որտեղ հաշվի են առնվում հետադարձ կապերն ըստ հզորության և ջերմաստիճանի: Դիֆերենցիալ հավասարումները լուծված են անալիտիկորեն՝ Հոպֆի տեսության կիրառմամբ: Ստացված են ռեակտորի հզորության և ջերմաստիճանի ոչ գծային, տատանողական ֆունկցիաները, կախված ռեալ ժամանակից: Կառուցված են լուծումների գրաֆիկական տեսքերը, ինչպես նաև համապատասխան սահմանային ցիկլերը: Հաշվարկված են հզորության և ջերմաստիճանի ոչ գծային տատանումների պարբերությունները:

Առանցքային բառեր. ռեակտորների դինամիկա, բիֆուրկացիա, ինքնատատանում, սահմանային ցիկլ:

V.G. PETROSYAN, R.R. GJULBUDAGHYAN

DYNAMIC MODEL OF THE NUCLEAR REACTOR'S NONLINEAR OSCILLATION

The dynamic model of a nuclear reactor is considered by means of the nonlinear differential equations where the feedbacks by power and temperature were taken into account. Analytical solutions of equations are achieved applying Hopf's theory. Nonlinear oscillatory functions of power and temperature of the reactor for real time are obtained. Solutions of function graphs with corresponding maximum cycles are constructed. The periods of nonlinear fluctuations of power and temperature are calculated as well.

Keywords: reactors dynamics, bifurcation, self-oscillation, limit cycle.