

Г.Г. ШЕКЯН, А.П. ХАЛАТЯН, Э.П. ХАЛАТЯН, Р.П. ХАЛАТЯН

СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ РОТОРА НА ПОДШИПНИКАХ КАЧЕНИЯ

Рассмотрено вращение ротора на подшипниках качения при стационарных режимах. Показано, что при вращении вала на подшипниках качения возникают субгармонические колебания параметрического, комбинационного типа, зависящие от многочисленных факторов: скорости, нагрузки, геометрии дорожек качения, чистоты контактирующих поверхностей, радиального зазора в подшипнике, нелинейной жёсткости подшипника и т. д.

Ключевые слова: субгармоника, колебания, резонанс, частота, демпфирование, одночастотные слагаемые, дополнительные гармоники.

При вращении ротора на подшипниках качения возникают субгармонические колебания параметрического и комбинационного типа, обусловленные различными факторами: скоростью, нагрузкой, геометрией дорожек и тел качения, чистотой контактирующих поверхностей, радиальным зазором, нелинейной жёсткостью подшипника и т.д. Всё это вызывает значительные трудности в точном математическом описании движения ротора и приводит к необходимости упрощения задачи. В результате иногда имеем лишь приближённые решения, удовлетворяющие в той или иной степени требованиям, предъявляемым к ротору [1,2].

Нелинейная жёсткость шарикоподшипника, описываемого законом Герца, может быть представлена в виде аппроксимирующей функции $f(y) = ay + by^3$, при этом уравнение движения ротора по одной из координат запишется в виде

$$\ddot{y} + ay + by^3 = H\omega^2 \cos \omega t. \quad (1)$$

Уравнение (1) относится к классу уравнений Дуффинга. Теоретически и экспериментально доказано, что в нелинейных схемах, подчиняющихся уравнениям Дуффинга, существуют колебания, частота которых меньше частоты возмущающей силы в два или три раза. Такие колебания называются субгармоническими порядка $\frac{1}{2}$ или $\frac{1}{3}$ (в отличие от ультрагармонических, частота которых, наоборот, выше частоты возмущения) [3].

Субгармонические колебания появляются в нелинейной системе в виде субгармонического резонанса, когда частота возмущающей силы кратна собственной частоте линейной системы [3, 4]. Уравнения, описывающие движение ротора на подшипниках качения, существенно нелинейны, а податливость самих подшипников приводит к значительному снижению резонансных скоростей, поэтому субгармонические колебания валов на шарикоподшипниках с упругими опорами могут возникать в рабочем диапазоне скоростей [4]. Так как в (1) коэффициент при нелинейном члене того же порядка, что и при линейном, то для решения этого уравнения обычные асимптотические

методы, используемые при исследовании квазилинейных систем, здесь не применимы. Воспользуемся методом изображающей функции, изложенной в [1], который относится к частотным методам анализа и распространяет на нелинейные системы понятие передаточной функции, называемой в этом случае изображающей функцией.

Предположим наличие в системе вязкого линейного трения. Уравнение (1) после введения демпфирования примет вид [4]

$$\ddot{y} + \eta y' + ay + by^3 = H\omega^2 \cos \omega t. \quad (2)$$

Будем полагать, что в системе, описываемой уравнением (2), существуют субгармонические колебания порядка $\frac{1}{2}$. В этом случае решение (2) будем искать в виде

$$y = A \cos(\omega t - \varepsilon_1) + \beta \cos\left(\omega \frac{t}{2} - \varepsilon_2\right). \quad (3)$$

Подставляя (3) в левую часть уравнения (2) и обращаясь к методу изображающей функции, запишем

$$\begin{aligned} U = \ddot{y} + \eta y' + ay + by^3 = & -A\omega^2 \cos(\omega t - \varepsilon_1) - \\ & -\frac{B}{4}\omega^2 \cos\left(\omega \frac{t}{2} - \varepsilon_2\right) - \eta A\omega \sin(\omega t - \varepsilon_1) - \\ & -\eta \frac{B}{2}\omega \sin\left(\omega \frac{t}{2} - \varepsilon_2\right) + aA \cos(\omega t - \varepsilon_1) + \\ & + aB \cos\left(\omega \frac{t}{2} - \varepsilon_2\right) + b\frac{3}{4}B(2A^2 + B^2) \cos\left(\omega \frac{t}{2} - \varepsilon_2\right) + \\ & + b\frac{3}{4}A(A^2 + 2B^2) \cos(\omega t - \varepsilon_1) + \\ & + b\frac{3}{4}A^2B \cos\left(\frac{3}{2}\omega t - 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right) + \\ & + b\frac{B^2}{4} \cos\left(\frac{3}{2}\omega t - 3\varepsilon_2\right) + b\frac{3}{4}AB^2 \cos(2\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Согласно определению изображающей функции (3), допустимо применение комплексной записи для $Y(t)$ и $U(t)$:

$$\begin{aligned} Y(t) = y_1(t) + y_2(t) = & A \exp[i(\omega t - \varepsilon_1)] + \\ & + B \exp\left[i\left(\omega \frac{t}{2} - \varepsilon_2\right)\right], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
U(t) = & \ddot{y} + \eta y' + ay + \\
& + b \left[\frac{3}{4} B(2A^2 + B^2) \exp(-i\varepsilon_2) \right] \exp\left(i \frac{\omega}{2} t\right) + \\
& + b \left[\frac{3}{4} A(A^2 + 2B^2) \exp(-i\varepsilon_2) \right] \exp(i\omega t) + \\
& + b \left\{ \frac{3}{4} A^2 B \exp[-i(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2)] + \right. \\
& \left. + \frac{B^2}{4} \exp(-i3\varepsilon_2) \right\} \exp\left(i \frac{3}{2} \omega t\right) + \\
& + b \frac{3}{4} AB^2 \exp[-i(\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2)] + \dots
\end{aligned} \tag{6}$$

Перегруппировав одночастотные слагаемые, можно (6) разделить на 3 части:

$$\begin{aligned}
U(t) = & U_1(t) + U_2(t) + \Delta(t) = \ddot{y} + \eta y' + ay + b \left[\frac{3}{4} (A^2 + 2B^2) \right] y_1 + \\
& + \ddot{y}_2 + \eta_2 + ay_2 + b \left[\frac{3}{4} (2A^2 + B^2) \right] y_2 + \\
& + b \left\{ \frac{3}{4} A^2 \exp\left[i\left(\frac{3}{2}\omega t - 2\varepsilon_1\right)\right] + \frac{B^2}{4} \exp\left[i\left(\frac{3}{2}\omega t - 4\varepsilon_2\right)\right] + \right. \\
& \left. + \frac{3}{4} AB \exp[i(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)] \right\} B \exp(i\varepsilon_2).
\end{aligned} \tag{7}$$

В результате получим двухчастотную передаточную (изображающую) функцию:

$$E_1(\omega, A, B) = -\omega^2 + \left[a + b \frac{3}{4} (A^2 + 2B^2) \right] + i\omega\eta, \tag{8}$$

$$E_2\left(\frac{\omega}{2}, A, B\right) = -\frac{\omega^2}{4} + \left[a + b \frac{3}{4} (2A^2 + B^2) \right] + i \frac{\omega^2}{2} \eta. \tag{9}$$

При этом необходимо потребовать, чтобы $\Delta(t) = 0$, т. е.

$$3A^2 \exp\left[i\left(\frac{3}{2}\omega t - 2\varepsilon_1\right)\right] + B^2 \exp\left[i\left(\frac{3}{2}\omega t - 4\varepsilon_2\right)\right] + 3AB \exp[i(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)] = 0. \tag{10}$$

Представляя возмущающее усилие в виде $N\omega^2 \exp i\omega t$, получим два уравнения:

$$\begin{aligned} E_1(\omega, A, B) &= \frac{H\omega^2}{A} \exp(i\varepsilon_1), \\ E_2\left(\frac{\omega}{2}, A, B\right) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Приступая к определению неизвестных амплитуд и фазовых углов, разделим вещественную и мнимую части в первом уравнении системы (11):

$$\begin{aligned} \omega A \eta &= H\omega^2 \sin \varepsilon_1, \\ -\omega^2 A + A \left[a + b \frac{3}{4} (A^2 + 2B^2) \right] &= H\omega^2 \cos \varepsilon_1. \end{aligned} \quad (12)$$

Далее положим $\eta = 0$ и $\varepsilon_1 = 0, \pi$. Тогда из (12) найдём

$$A = \frac{4H\omega^2}{4(a - \omega^2) + 3b(A^2 + 2B^2)}. \quad (13)$$

При $b=0$ уравнение (13) даёт значение амплитуды A для линейной системы с собственной частотой $\omega_0 = \sqrt{a}$. Из второго уравнения системы (11) получим

$$A^2 = \frac{\omega^2 - 4a}{6b} - \frac{B^2}{2}. \quad (14)$$

Подставляя (14) в (13), получим

$$A = \frac{8H\omega^2}{4a - 7\omega^2 + 9B^2b}. \quad (15)$$

Дополнительное уравнение для определения соотношения между амплитудами A и B найдём из условия $\Delta(t) = 0$. Полагая $\varepsilon_1 = 0$, выделим вещественную часть из этого уравнения:

$$3A^2 \cos \frac{3}{2} \omega t + B^2 \cos \left(\frac{3}{2} \omega t - 4\varepsilon_2 \right) = -3AB \cos \varepsilon_2. \quad (16)$$

Разложим $\cos \left(\frac{3}{2} \omega t - 4\varepsilon_2 \right)$ и приравняем коэффициенты при $\sin \frac{3}{2} \omega t$. Тогда будем иметь $B^2 \sin 4\varepsilon_2 = 0$, откуда следует, что при некотором установившемся режиме $4\varepsilon_2 = \pi$. Предположим, что при $B > A$ будем иметь

$$A = \frac{\sqrt{2}}{3} B \cos \frac{3}{2} \omega t. \quad (17)$$

Смысл выражения (15) будет ясен, если учесть, что A – амплитуда колебаний ротора. Движение ротора в этом случае представляет собой круговую синхронную прецессию. Так как при субгармонических колебаниях на основные колебания накладываются ещё одни частоты, то прецессия ротора не будет круговой, и центр шипа ротора опишет три полных колебания около положения

статического равновесия за два оборота ротора, т. е. частота прецессии ротора равна $3\omega/2$.

Из полученных для амплитуд зависимостей видно, что характер движения ротора в подшипнике зависит от соотношения между жесткостными коэффициентами a и b , которые, в свою очередь, являются функциями от начальных условий и от области изменения координаты y . Решив уравнение (15) относительно B , получим

$$B^2 = \frac{8H\omega^2 + (7\omega^2 - 4a)A}{9bA}. \quad (18)$$

Отсюда вытекает условие возникновения и существования субгармонических колебаний порядка $1/2$ для рассматриваемой системы $H\omega^2 \geq \frac{A}{8}(4a - 7\omega^2)$.

Принимая $a = \omega_0^2$ (собственная частота линеаризованной системы ротор-подшипники) и вводя безразмерную частоту $\Omega = \omega/\omega_0$ и безразмерную амплитуду $\xi_1 = A/2\delta$, где 2δ - диаметральный зазор в подшипнике, получим уравнение, определяющее нижнюю границу возникновения субгармонических колебаний при жёсткой установке подшипников в корпусе:

$$\Omega^2 = \frac{4}{7 + 8h/\xi_1}. \quad (19)$$

На рисунке представлены границы возможного появления субгармонических колебаний порядка $\frac{1}{2}$ на плоскости параметров Ω и ξ для нескольких значений относительной неуровненности h .

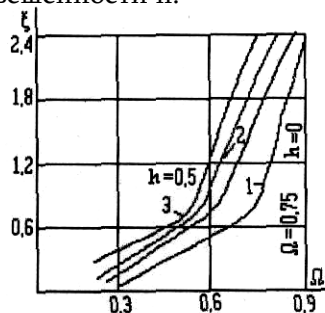


Рис. График возникновения субгармонических колебаний порядка $1/2$ для ротора с жёсткоустановленным шарикоподшипником

Как следует из (19), даже при идеальной балансировке ротора возможно появление субгармонических колебаний при $\Omega \geq 0,75$. Определение верхней границы для случая жёсткой установки подшипников не представляется возможным. Однако в системах с нелинейной жёсткостью, аппроксимируемых полиномом типа $f(y) = ay + by^3$, кроме колебаний порядка $1/2$, возможны и

колебания порядка 1/3. Следовательно, в системах с жёсткими подшипниками качения имеет место переход колебаний одного из указанных типов в другой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Блакер О.** Анализ нелинейных систем.– М.: Мир, 1969.- 400 с.
2. **Новиков Л.З.** Статика радиально-упорного шарикоподшипника // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение.– 1963. – N 5.- С. 17-28.
3. **Пановко Я.Г.** Основа прикладной теории упругих колебаний.– М.: Машиностроение, 1967.- 316 с.
4. **Шемян Г.Г.** Динамика роторных машин.– Ереван: Изд. НАН РА "Гитутюн", 2004. - 329 с.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 17.09.2004.

Հ.Գ. ՇԵԿՅԱՆ, Հ.Պ. ԽԱԼԱԹՅԱՆ, Է.Պ. ԽԱԼԱԹՅԱՆ, Ռ.Պ. ԽԱԼԱԹՅԱՆ

ԳԼՈՐՄԱՆ ԱՌԱՆՑՔԱԿԱԼՆԵՐՈՎ ՌՈՏՈՐԻ ՍՈՒԲՀԱՐՄՈՆԻԿ ՏՍՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Դիտարկված են գլորման առանցքակալների վրա պտտվող ռոտորի և ռոտորային մեքենայի տատանումները ստացվող ռեժիմում: Ցույց է տրված, որ գլորման առանցքակալներով լիսեռ պտտելիս առաջանում են պարամետրական համակցված սուբհարմոնիկ տատանումներ, որոնք կախված են բազմաթիվ գործոններից՝ արագությունից, բեռնվածությունից, գլորման առանցքակալի ակոսի երկրաչափությունից, կոնտակտային մակերևույթների մաքրությունից, շառավղային բացակից, գնդիկների ոչ գծային կոշտությունից և այլն:

Առանցքային բառեր. սուբհարմոնիկ, տատանումներ, ռեզոնանս, հաճախություն, դեպֆերացում, միահաճախանի բաղադրիչներ, լրացուցիչ հարմոնիկներ:

H.G. SHEKYAN, H.P. KHALATYAN, E.P. KHALATYAN, R.P. KHALATYAN

SUBHARMONIC OSCILLATIONS OF ROTOR ON ROLLING CONTACT BEARING

Rotation of the rotor on rolling contact bearings in stationary conditions is discussed. It is shown that rotating the shaft on rolling contact bearings subharmonic oscillations of parameter and combination types arise depending on numerous factors of speed, loading, geometry of rolling paths, frequency of contacting surfaces, radial bearing clearance, nonlinear bearing rigidity, etc.

Keywords: subharmonic, oscillations, resonance, frequency, damping, single-frequency components, supplementary harmonics.