

Г. А. КАРДАШЯН, А. Г. КАРДАШЯН

АНАЛИЗ НАМАГНИЧИВАЮЩИХ ЦЕПЕЙ ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ НАМАГНИЧИВАНИИ ДВУХ ТОРОИДАЛЬНЫХ ОБРАЗЦОВ

Рассмотрены цепи при одновременном намагничивании двух тороидальных образцов. Получены нелинейные интегро-дифференциальные уравнения цепей и выражения магнитных индукций $B_1 = B_1(t)$ и $B_2 = B_2(t)$ во взаимодействующих электрических цепях при одновременном намагничивании двух тороидальных образцов.

Ключевые слова: намагничивающие цепи, тороидальные образцы, индукция, нелинейные интегро-дифференциальные уравнения, аппроксимация.

Как известно, теория взаимодействия электрических цепей при намагничивании двух или нескольких тороидальных образцов из ферромагнитного материала ввиду сложности исследования весьма слабо освещена в соответствующей литературе [1-4]. Попробуем изложить некоторые положения этой теории, используя математический аппарат аналитической имитации [5].

Допустим, что при намагничивании тороидальных образцов взаимодействуют между собой две электрические цепи (рис. 1).

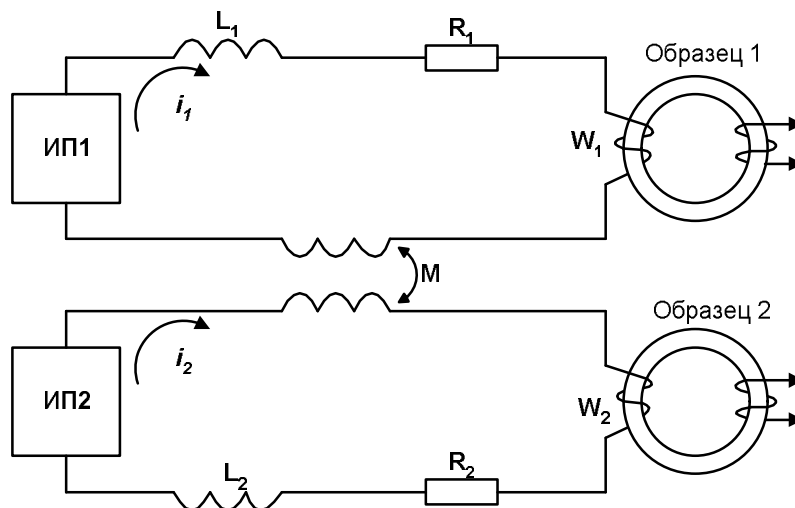


Рис. 1

При индуктивной связи цепей запишем дифференциальные уравнения для процесса взаимодействия:

$$\begin{aligned} L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + M \frac{di_2}{dt} + W_1 S_1 \frac{dB_1}{dt} &= u_1, \\ L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + M \frac{di_1}{dt} + W_2 S_2 \frac{dB_2}{dt} &= u_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где L_1, R_1 - индуктивность и активное сопротивление первой цепи, включающие в себя параметры токовых цепей измерительных приборов и намагничивающей обмотки без образца; L_2, R_2 - индуктивность и активное сопротивление второй цепи, включающие в себя параметры токовых цепей измерительных приборов и намагничивающей обмотки без сердечника; W_1, W_2, S_1, S_2 - число витков и сечения образцов, соответственно, первой и второй цепей; M - коэффициент взаимной индукции; $i_1, i_2, B_1, B_2, u_1, u_2$ - намагничивающие токи, магнитные индукции и напряжения источников питания, соответственно, для первой и второй цепей.

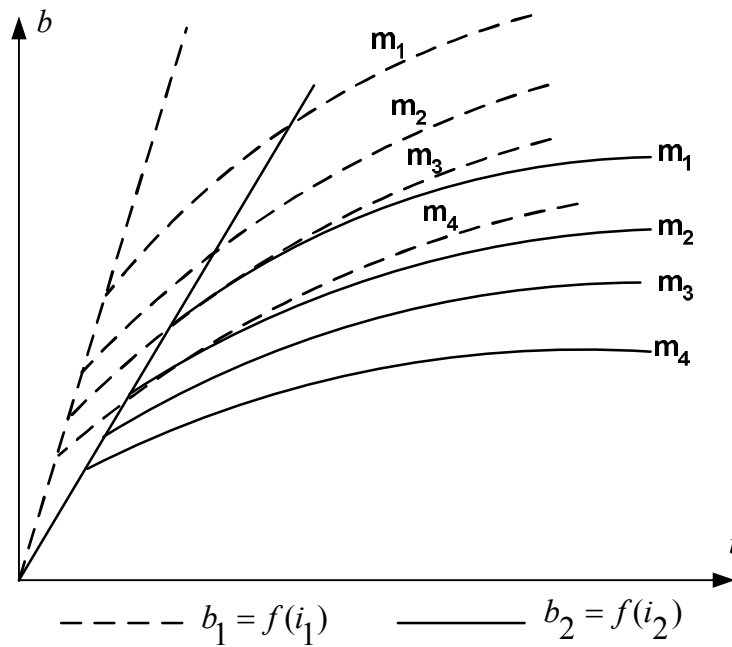


Рис. 2

В свою очередь, дифференциальные уравнения (1) приведем к двум переменным, положив для некоторых участков кривых намагничивания (рис.2) линейные зависимости:

$$i_1 = \alpha_1 \frac{db_1}{dt} + \beta_1 b_1, \quad i_2 = \alpha_2 \frac{db_2}{dt} + \beta_2 b_2, \quad (2)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ - постоянные и положительные коэффициенты аппроксимации.

С учетом (2) и замены $B_1 = b_1$, $B_2 = b_2$ для (1) имеем

$$\begin{aligned} L_1 \alpha_1 \frac{d^2 b_1}{dt^2} + M \alpha_2 \frac{d^2 b_2}{dt^2} + (L_1 \beta_1 + R_1 \alpha_1 + W_1 S_1) \frac{db_1}{dt} + \\ + M \beta_2 \frac{db_2}{dt} + R_1 \beta_1 b_1 = u_1, \\ L_2 \alpha_2 \frac{d^2 b_2}{dt^2} + M \alpha_1 \frac{d^2 b_1}{dt^2} + (L_2 \beta_2 + R_2 \alpha_2 + W_2 S_2) \frac{db_2}{dt} + \\ + M \beta_1 \frac{db_1}{dt} + R_2 \beta_2 b_2 = u_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Дифференциальные уравнения (3), будучи линейными, не отражают, однако, всех особенностей динамического процесса, имеющего место при намагничивании тороидальных образцов, то есть нелинейного рассеяния магнитной энергии.

Введем преобразования:

$$B_1 = \exp(-h_1 \int_0^t B_1^{2m_1}(\tau) d\tau \cdot b_1), \quad B_2 = \exp(-h_2 \int_0^t B_2^{2m_2}(\tau) d\tau \cdot b_2), \quad (4)$$

где $B_1 = B_1(t)$, $B_2 = B_2(t)$ - величины магнитной индукции в электрических цепях, отвечающие смыслу уравнений (1); $\exp(-h_1 \int_0^t B_1^{2m_1}(\tau) d\tau \cdot b_1)$, $\exp(-h_2 \int_0^t B_2^{2m_2}(\tau) d\tau \cdot b_2)$ - безразмерные множители при положительных константах преобразования h_1 , h_2 и любых натуральных числах; m_1 и m_2 - суть безразмерные множители, учитывающие нелинейное рассеяние магнитной энергии (весьма малое в окрестностях $B_1 = 0$, $B_2 = 0$ и достаточно большое при всех конечных значениях B_1 и B_2).

Согласно структуре формул (4), нелинейное рассеяние магнитной энергии распространяется и на напряжение источников питания. С целью компенсации этого влияния выражения для u_1 и u_2 запишем в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= U_{1m} \cdot e^{g_1 t} \sin \omega_1 t, \\ u_2 &= U_{2m} \cdot e^{g_2 t} \sin \omega_2 t, \end{aligned} \quad (5)$$

где U_{1m} , U_{2m} - амплитудные значения напряжений источников питания; ω_1 , ω_2 - частоты источников питания; $e^{g_1 t}$, $e^{g_2 t}$ - безразмерные множители при постоянных и положительных значениях g_1 и g_2 , аппроксимирующие желаемую компенсацию.

Нетрудно убедиться в том, что подстановка выражений (4) и (5) в (3) сводит последние к нелинейным интегро-дифференциальным уравнениям вида

$$\begin{aligned} & \left\{ L_1 \alpha_1 \left[\frac{d^2 B_1}{dt^2} + 2(m_1 + 1) h_1 B_1^{2m_1} \frac{dB_1}{dt} + h_1^2 B_1^{4m_1} + 1 \right] + (L_1 \beta_1 + R_1 \alpha_1 + W_1 S_1) \times \right. \\ & \times \left(\frac{dB_1}{dt} + h_1 B_1^{2m_1 + 1} \right) + R_1 \beta_1 B_1 \left. \right\} \exp(-h_2 \int_0^t B_2^{2m_2}(\tau) d\tau) + \left\{ M \alpha_2 \left[\frac{d^2 B_2}{dt^2} + 2(m_2 + 1) h_2 \times \right. \right. \\ & \times B_2^{2m_2} \frac{dB_2}{dt} + h_2^2 B_2^{4m_2} + 1 \left. \right] + M \beta_2 \left(\frac{dB_2}{dt} + h_2 B_2^{2m_2 + 1} \right) \left. \right\} \exp(-h_1 \int_0^t B_1^{2m_1}(\tau) d\tau) = \\ & = U_{1m} \exp(-\int_0^t [h_1 B_1^{2m_1}(\tau) + h_2 B_2^{2m_2}(\tau) - g_1] d\tau) \cdot \sin \omega_1 t, \\ & \left\{ M \alpha_1 \left[\frac{d^2 B_1}{dt^2} + 2(m_1 + 1) h_1 B_1^{2m_1} \frac{dB_1}{dt} + h_1^2 B_1^{4m_1} + 1 \right] + M \beta_1 \left(\frac{dB_1}{dt} + h_1 B_1^{2m_1 + 1} \right) \right\} \times \\ & \times \exp(-h_2 \int_0^t B_2^{2m_2}(\tau) d\tau) + \left\{ L_2 \alpha_2 \left[\frac{d^2 B_2}{dt^2} + 2(m_2 + 1) h_2 B_2^{2m_2} \frac{dB_2}{dt} + h_2^2 B_2^{4m_2} + 1 \right] + \right. \\ & + (L_2 \beta_2 + R_2 \alpha_2 + W_2 S_2) \left(\frac{dB_2}{dt} + h_2 B_2^{2m_2 + 1} \right) + R_2 \beta_2 B_2 \left. \right\} \times \\ & \times \exp(-h_1 \int_0^t B_1^{2m_1}(\tau) d\tau) = U_{2m} \exp(-\int_0^t [h_1 B_1^{2m_1}(\tau) + h_2 B_2^{2m_2}(\tau) - g_2] d\tau) \cdot \sin \omega_2 t. \end{aligned} \quad (6)$$

Левые части уравнений (6) характеризуют нелинейную диссипативную систему с общим характером динамических связей, правые же части содержат в своем составе синусоидальные напряжения источников питания $U_{1m} \sin \omega_1 t$, $U_{2m} \sin \omega_2 t$ и безразмерные множители

$$\exp\left(-\int_0^t [h_1 B_1^{2m_1}(\tau) + h_2 B_2^{2m_2}(\tau) - g_1] d\tau\right),$$

$$\exp\left(-\int_0^t [h_1 B_1^{2m_1}(\tau) + h_2 B_2^{2m_2}(\tau) - g_2] d\tau\right),$$

которые учитывают на этот раз обратное влияние нелинейной диссипативной системы на напряжение источников питания в процессе взаимодействия электрических цепей [6].

Поскольку нелинейные интегро-дифференциальные уравнения (6) выводятся непосредственно из выражений (3) и (4), то полное исследование (6) может быть заменено исследованием исходных выражений.

Найдем сначала общее решение для линейных дифференциальных уравнений (3), полагая для величин u_1 и u_2 принятые ранее представления (5):

$$\begin{aligned} b_1 = & C_{11}e^{-p_1 t} + C_{12}e^{-p_2 t} + C_{13}e^{-p_3 t} + C_{14}e^{-p_4 t} + D_{11}e^{g_1 t} \times \\ & \times \cos(\omega_1 t - \gamma_{11}) + D_{12}e^{g_2 t} \cos(\omega_2 t - \gamma_{12}), \\ b_2 = & C_{21}e^{-p_1 t} + C_{22}e^{-p_2 t} + C_{23}e^{-p_3 t} + C_{24}e^{-p_4 t} + D_{21}e^{g_1 t} \times \\ & \times \cos(\omega_1 t - \gamma_{21}) + D_{22}e^{g_2 t} \cos(\omega_2 t - \gamma_{22}), \end{aligned} \quad (7)$$

где $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}$ - постоянные интегрирования; $C_{21}, C_{22}, C_{23}, C_{24}$ - постоянные, зависящие от предыдущих постоянных; P_1, P_2, P_3, P_4 - положительные константы, зависящие только от параметров диссипативной системы; $D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}, \gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}$ - положительные константы, зависящие от параметров как диссипативной системы, так и взаимодействующих с этой системой источников питания.

Согласно (4), общее решение (7) примет вид

$$\begin{aligned} B_1 \exp h_1 \int_0^t B_1^{2m_1}(\tau) d\tau = & C_{11}e^{-p_1 t} + C_{12}e^{-p_2 t} + C_{13}e^{-p_3 t} + C_{14}e^{-p_4 t} + \\ & + D_{11}e^{g_1 t} \cos(\omega_1 t - \gamma_{11}) + D_{12}e^{g_2 t} \cos(\omega_2 t - \gamma_{12}), \\ B_2 \exp h_2 \int_0^t B_2^{2m_2}(\tau) d\tau = & C_{21}e^{-p_1 t} + C_{22}e^{-p_2 t} + C_{23}e^{-p_3 t} + C_{24}e^{-p_4 t} + \\ & + D_{21}e^{g_1 t} \cos(\omega_1 t - \gamma_{21}) + D_{22}e^{g_2 t} \cos(\omega_2 t - \gamma_{22}). \end{aligned} \quad (8)$$

Последнее выражение имеет форму интегральных уравнений, разрешимых относительно величин $B_1 = B_1(t)$ и $B_2 = B_2(t)$.

Действительно, если левые и правые части (8) сначала возвести в степени $2m_1$, $2m_2$, а затем умножить на значения $2m_1 h_1$, $2m_2 h_2$, то получим

$$2m_1 h_1 B_1^{2m_1} \exp 2m_1 h_1 \int_0^t B_1^{2m_1}(\tau) d\tau = 2m_1 h_1 \left[C_{11} e^{-p_1 t} + C_{12} e^{-p_2 t} + C_{13} e^{-p_3 t} + \right. \\ \left. + C_{14} e^{-p_4 t} + D_{11} e^{g_1 t} \cos(\omega_1 t - \gamma_{11}) + D_{12} e^{g_2 t} \cos(\omega_2 t - \gamma_{12}) \right]^{2m_1}, \quad (9)$$

$$2m_2 h_2 B_2^{2m_2} \exp 2m_2 h_2 \int_0^t B_2^{2m_2}(\tau) d\tau = 2m_2 h_2 \left[C_{21} e^{-p_1 t} + C_{22} e^{-p_2 t} + C_{23} e^{-p_3 t} + \right. \\ \left. + C_{24} e^{-p_4 t} + D_{21} e^{g_1 t} \cos(\omega_1 t - \gamma_{21}) + D_{22} e^{g_2 t} \cos(\omega_2 t - \gamma_{22}) \right]^{2m_2}.$$

Левые части (9) - это точные производные по времени:

$$2m_1 h_1 B_1^{2m_1} \exp 2m_1 h_1 \int_0^t B_1^{2m_1}(\tau) d\tau = \frac{d}{dt} \exp 2m_1 h_1 \int_0^t B_1^{2m_1}(\tau) d\tau, \\ 2m_2 h_2 B_2^{2m_2} \exp 2m_2 h_2 \int_0^t B_2^{2m_2}(\tau) d\tau = \frac{d}{dt} \exp 2m_2 h_2 \int_0^t B_2^{2m_2}(\tau) d\tau. \quad (10)$$

Следовательно, интегрирование уравнений (9) даст

$$\exp 2m_1 h_1 \int_0^t B_1^{2m_1}(\tau) d\tau = 2m_1 h_1 \int_0^t \left[C_{11} e^{-p_1 t} + C_{12} e^{-p_2 t} + C_{13} e^{-p_3 t} + C_{14} \times \right. \\ \left. \times e^{-p_4 t} + D_{11} e^{g_1 t} \cos(\omega_1 t - \gamma_{11}) + D_{12} e^{g_2 t} \cos(\omega_2 t - \gamma_{12}) \right]^{-2m_1} dt + C_{10}, \\ \exp 2m_2 h_2 \int_0^t B_2^{2m_2}(\tau) d\tau = \\ = 2m_2 h_2 \int_0^t \left[C_{21} e^{-p_1 t} + C_{22} e^{-p_2 t} + C_{23} e^{-p_3 t} + C_{24} \times \right. \\ \left. \times e^{-p_4 t} + D_{21} e^{g_1 t} \cos(\omega_1 t - \gamma_{21}) + D_{22} e^{g_2 t} \cos(\omega_2 t - \gamma_{22}) \right]^{-2m_2} dt + C_{20}, \quad (11)$$

где C_{10} , C_{20} - постоянные интегрирования.

Если далее сравнить между собою выражения (9) и (11), то окончательно получим

$$B_1 = (C_{11}e^{-p_1 t} + C_{12}e^{-p_2 t} + C_{13}e^{-p_3 t} + C_{14}e^{-p_4 t} + D_{11}e^{g_1 t} \cos(\omega_1 t - \gamma_{11}) + D_{12}e^{g_2 t} \cos(\omega_2 t - \gamma_{12})) \times A_1^{-1}, \quad (12)$$

где

$$A_1 = (2m_1 h_1 \int_0^t [C_{11}e^{-p_1 t} + C_{12}e^{-p_2 t} + C_{13}e^{-p_3 t} + C_{14}e^{-p_4 t} + D_{11}e^{g_1 t} \cos(\omega_1 t - \gamma_{11}) + D_{12}e^{g_2 t} \cos(\omega_2 t - \gamma_{12})]^{-2m_1} dt + C_{10})^{\frac{1}{2m_1}}$$

$$B_2 = (C_{21}e^{-p_1 t} + C_{22}e^{-p_2 t} + C_{23}e^{-p_3 t} + C_{24}e^{-p_4 t} + D_{21}e^{g_1 t} \cos(\omega_1 t - \gamma_{21}) + D_{22}e^{g_2 t} \cos(\omega_2 t - \gamma_{22})) \times A_2^{-1}, \quad (13)$$

где

$$A_2 = (2m_2 h_2 \int_0^t (C_{21}e^{-p_1 t} + C_{22}e^{-p_2 t} + C_{23}e^{-p_3 t} + C_{24}e^{-p_4 t} + D_{21}e^{g_1 t} \cos(\omega_1 t - \gamma_{11}) + D_{22}e^{g_2 t} \cos(\omega_2 t - \gamma_{12}))^{-2m_2} dt + C_{20})^{\frac{1}{2m_2}}.$$

Выражения (12) и (13) исчерпывающим образом определяют поведение магнитных индукций $B_1 = B_1(t)$ и $B_2 = B_2(t)$ во взаимодействующих электрических цепях при одновременном намагничивании двух тороидальных образцов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Филиппов Е.** Нелинейная электротехника. -М.:Энергия, 1976.- 496 с.
2. **Бессонов Л.А.** Переходные процессы в нелинейных электрических цепях со сталью.-М.: Госэнергоиздат, 1951.- 163 с.
3. **Филиппов Е.С.** и др. Теория нелинейных электрических цепей.- Л.,1990. -230 с.
4. **Филиппов В.В.** Магнитомягкие ферриты для радиоэлектронной аппаратуры: Справочник.-М.: Энергия, 1983.-386 с.
5. **Горяченко В.Д.** Элементы теории колебаний: Учебное пособие.- М.: Высшая школа, 2001.- 463 с.
6. **Сафронов В.И.** Теоретическое и экспериментальное исследование некоторых внешних воздействий на автоколебательные системы: Дис...канд. тех. наук / МВТУ им.Н.Э. Баумана.-М.,1970.-260 с.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 10.05.2006.

Գ.Ա. ԿԱՐԴԱՇՅԱՆ, Ա.Գ. ԿԱՐԴԱՇՅԱՆ

**ՓՈԽՆԴՈՒԿՏԻՎ ԿԱՂՈՎ ԵՐԿՈՒ ՏՈՐՈՒԴԱԼ ՆՄՈՒՇՆԵՐԻ ՄԻԱԺԱՄԱՆԱԿՅԱ
ՄԱԳՆԻՍԱՑՈՒՄՈՎ ՇՂԹԱՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ**

Դիտարկված են փոխինդուկտիվ կապով երկու տորոիդալ նմուշների միաժամանակյա մագնիսացումով շղթաներ, ստացվել են այդ շղթաների համար ոչ գծային ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումներ, որոնց վերլուծությամբ բացահայտվել են մագնիսական ինդուկցիաների վարքը՝ կախված ժամանակից՝ փոխինդուկտիվ կապով կապված երկու տորոիդալ նմուշներում նրանց միաժամանակյա մագնիսացման դեպքում:

Առանցքային բառեր. մագնիսացումով շղթա, տորոիդալ նմուշներ, ինդուկցիա, ոչ գծային ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումներ, մոտարկում:

G. A. KARDASHYAN, A. G. KARDASHYAN

**ANALYSIS OF MAGNETIZING CIRCUITS AT SIMULTANEOUS MAGNETIZATION OF TWO
TOROIDAL SPECIMENS**

Circuits are examined at simultaneous magnetization of two toroidal specimens, nonlinear integral-differential equations of circuits are considered. As a result of the analysis the expression of magnetic inductions $B_1 = B_1(t)$ and $B_2 = B_2(t)$ are obtained in the interacting electrical circuits at simultaneous magnetization of two toroidal specimens.

Keywords: magnetizing circuits, toroidal specimens, induction, nonlinear integral-differential equations, approximation.