

С.О. СИМОНЯН, Л.А. БАДАЛЯН

АНАЛОГИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕАВТОНОМНЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ НА ОСНОВЕ
МЕТОДА ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ ГРАММА-ШМИДТА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПУХОВА

Предложен численно-аналитический метод определения неавтономных псевдообратных матриц. Рассмотрен модельный пример.

Ключевые слова: неавтономная матрица, метод ортогонализации Грамма-Шмидта, дифференциальные преобразования Пухова, псевдообратная матрица.

Введение. Псевдообратные матрицы широко используются для решения различных научно-практических задач [1-4, 6-10, 14-19]. Существует множество методов определения автономных псевдообратных матриц, в частности, Гревилля [4], блочного разбиения матрицы [4], Мура-Пенроуза [14], метод на основе метода ортогонализации Грамма-Шмидта [14] и др. Однако применение этих методов для определения псевдообратных матриц, элементы которых в общем случае являются некоторыми функциями, обычно приводит к весьма громоздким с аналитической и к невыполнимым с практической точек зрения вычислениям даже при небольших размерах неавтономных матриц.

Поэтому появляется необходимость разработки таких методов определения неавтономных псевдообратных матриц, которые обладали бы простотой реализации и в то же время были бы наделены достаточной вычислительной эффективностью и точностью. Такими методами являются разработанные в последнее время вычислительные схемы, представленные в работах [11-13]. С этой же целью в настоящей работе предлагаются новые аналоги на основе метода ортогонализации Грамма-Шмидта, также базирующиеся на дифференциальных преобразованиях Г.Е. Пухова [5].

Математический аппарат. Дифференциальные преобразования задаются соотношениями [5]

$$X(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{\partial^K x(t)}{\partial t^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \Longleftrightarrow \quad x(t) = X(t, t_v, H, X(K)), \quad (1)$$

где $X(K)$ - изображение (дискрета) оригинала $x(t)$ - функция целочисленного аргумента $K = \overline{0, \infty}$; H - некоторая постоянная (масштабный коэффициент); t_v - центр аппроксимации, $\Longleftrightarrow$ - знак перехода из области изображений в область оригиналов и наоборот, а $X(\cdot)$ - некоторая функция, обуславливающая восстановление тейлоровского (ДТ-), падеевского (ДП-), чебышевского (ДЧ-), лежандровского (ДЛ-) и др. типов оригиналов.

Перед тем как представить соответствующие аналоги, остановимся на методе определения автономных псевдообратных матриц $A_{n \times m}^+$, изложенном в [14].

Шаг 1. Вычисляется матрица перестановок $P_{n \times n}$, с помощью которой столбцы матрицы $A_{m \times n}$ переставляются так, чтобы ее первые k столбцы были бы линейно независимы, а остальные столбцы были бы их линейными комбинациями, т.е.

$$A_{m \times n} \cdot P_{n \times n} = \left[T_{m \times k} \mid S_{m \times (n-k)} \right], \quad (2)$$

где $T_{m \times k}$ - матрица ранга k , состоящая из линейно независимых столбцов матрицы $A_{m \times n}$, а столбцы матрицы $S_{m \times (n-k)}$ есть линейные комбинации столбцов матрицы $T_{m \times k}$. Матрица перестановок $P_{n \times n}$ представляет собой квадратную матрицу, состоящую из нулей и единиц, где каждая строка и каждый столбец содержат лишь одну единицу.

Для вычисления матрицы P применяется метод ортогонализации Грамма-Шмидта к столбцам a_j , $j = \overline{1, n}$, матрицы A :

$$d_1 = a_1, \quad d_j = a_j - \sum_{i \in S_j} \frac{\langle a_j^*, d_i \rangle}{\|d_i\|^2} \cdot d_i, \quad (3)$$

где $j = \overline{1, n}$, $S_j = \{i : i \leq j-1, d_i \neq 0\}$, $\langle a_j^*, d_i \rangle$ - скалярное произведение векторов a_j^* и d_i ; “*” - знак комплексно-сопряженной матрицы; $\|d_i\|$ - норма вектора d_i .

Перенумеруем $d_1, \dots, d_n$ так, чтобы k ненулевых векторов были бы первыми. При соответствующей перенумерации и перестановке единичной матрицы размера n будет получена искомая матрица перестановок $P_{n \times n}$.

Шаг 2. Вычисляются матрицы $T_{m \times k}$ и $S_{m \times (n-k)}$ согласно соотношению (2).

Шаг 3. Составляются промежуточные матрицы

$$Q_{m \times k} = \left[\frac{t_1}{\|t_1\|} \mid \frac{t_2}{\|t_2\|} \mid \dots \mid \frac{t_k}{\|t_k\|} \right], \quad (4)$$

$$C_{m \times k} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \frac{t_1}{\|t_1\|^2} & \frac{t_2}{\|t_2\|^2} & \dots & \frac{t_k}{\|t_k\|^2} \end{array} \right], \quad (5)$$

где t_i , $i = \overline{1, k}$ — i -й столбец матрицы $T_{m \times k}$, а $\|t_i\|$ — норма вектора-столбца t_i .

Шаг 4. На основе матриц $T_{m \times k}$, $S_{m \times (n-k)}$ и $C_{m \times k}$ вычисляются элементы матриц $\gamma_{k \times k}$, $B_{k \times k}$ и $U_{k \times (n-k)}$:

$$\gamma_{ij} = - \sum_{r=1}^{j-1} \langle t_j^*, c_r \rangle \cdot \gamma_{ir}, \quad \text{если } i < j, \quad (6)$$

$$\gamma_{ij} = 0, \quad \text{если } i > j,$$

$$\gamma_{ij} = 1, \quad \text{если } i = j, \quad i, j = \overline{1, k};$$

$$b_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{\|t_j\|}, \quad i, j = \overline{1, k}; \quad (7)$$

$$u_{ij} = \sum_{r=1}^k \langle s_j^*, c_r \rangle \cdot \gamma_{ir}, \quad i = \overline{1, k}, \quad j = \overline{1, n-k}. \quad (8)$$

Шаг 5. Вычисляется псевдообратная матрица $T_{k \times m}^+$:

$$T_{k \times m}^+ = B_{k \times k} \cdot Q_{k \times m}^*. \quad (9)$$

Шаг 6. Составляется матрица

$$H_{n \times (n-k)} = \left[\begin{array}{c} U_{k \times (n-k)} \\ \hline I_{(n-k) \times (n-k)} \end{array} \right]. \quad (10)$$

Шаг 7. К матрице $H_{n \times (n-k)}$ применяется метод ортогонализации Грамма-Шмидта согласно (3), с той лишь разницей, что полученный очередной вектор нормируется согласно формуле

$$\bar{c}_j = \frac{c_j}{\|c_j\|}, \quad j = \overline{1, n-k}. \quad (11)$$

В результате этого матрица $H_{n \times (n-k)}$ преобразуется в матрицу ортонормированных векторов вида

$$V_{n \times (n-k)} = \begin{bmatrix} V_{1 \times k \times (n-k)} \\ V_{2 \times (n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix}.$$

Шаг 8. Вычисляется обратная матрица

$$G_{k \times k} = (I_{k \times k} + U_{k \times (n-k)} \cdot U_{(n-k) \times k}^*)^{-1} = I_{k \times k} - V_{1 \times k \times (n-k)} \cdot V_{1 \times (n-k) \times k}^*. \quad (12)$$

Шаг 9. Вычисляется псевдообратная матрица $A_{n \times m}^+$:

$$A_{n \times m}^+ = P_{n \times n} \cdot \begin{bmatrix} I_{k \times k} & U_{k \times (n-k)} \end{bmatrix}^* \cdot \begin{bmatrix} I_{k \times k} + U_{k \times (n-k)} \cdot U_{(n-k) \times k}^* \end{bmatrix}^{-1} \cdot T_{k \times m}^+. \quad (13)$$

Теперь допустим, что дана матрица $A(t)$, элементы которой обладают непрерывными частными производными бесконечного порядка по переменной t в центре аппроксимации $t_v \in [t_0, t_1]$. Представим аналогичные шаги вычислительной схемы в области дифференциальных преобразований.

Шаг 1. Вычисляются матрица перестановок $P_{n \times n}$ и ранг матрицы $A(t) - k$, причем метод ортогонализации Грамма-Шмидта применяется к столбцам начальной матричной дискреты $A(0)$ матрицы $A(t)$.

Шаг 2. Матричные дискреты $A(K)$, $K = \overline{0, \infty}$ умножаются на матрицу перестановок $P_{n \times n}$. В результате этих операций получаются матричные дискреты $T_{m \times k}(K)$ и $S_{m \times (n-k)}(K)$:

$$[T(K) \mid S(K)] = P \cdot A(K), \quad K = \overline{0, \infty}. \quad (14)$$

Шаг 3. Вычисляются матричные дискреты $C_{m \times k}(K)$ и $Q_{m \times k}(K)$, $K = \overline{0, \infty}$, с элементами

$$c_j(K) = \frac{t_j(K) - \sum_{\ell=0}^{K-1} c_j(\ell) \cdot z_j(K-\ell)}{z_j(0)}, \quad j = \overline{1, k}, \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (15)$$

$$q_j(K) = \frac{t_j(K) - \sum_{\ell=0}^{K-1} q_j(\ell) \cdot y_j(K-\ell)}{y_j(0)}, \quad j = \overline{1, k}, \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (16)$$

где $c_j(K)$, $q_j(K)$ и $t_j(K)$ - j -е столбцы K -ых матричных дискрет соответственно $C(K)$, $Q(K)$ и $T(K)$; $z_j(K)$ - K -я дискрета функции $z_j = \|t_j\|^2$, т.е. дискрета квадрата нормы j -го столбца матричной дискреты $T(K)$, определяемая в виде

$$z_j(K) = \sum_{\ell=0}^K \sum_{i=1}^m t_{ij}(\ell) \cdot t_{ij}(K-\ell), \quad j = \overline{1, k}, \quad K = \overline{0, \infty}; \quad (17)$$

$y_j(K)$ - K -я дискрета функции $y_j = \|t_j\|$, т.е. дискрета нормы j -го столбца матричной дискреты $T(K)$, определяемая в виде

$$y_j(K) = \frac{z_j(K) - \sum_{\ell=1}^{K-1} y_j(\ell) \cdot y_j(K-\ell)}{2 \cdot y_j(0)}, \quad j = \overline{1, k}, \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (18)$$

где $y_j(0) = \sqrt{z_j(0)}$.

Шаг 4. Вычисляются элементы $\gamma_{ij}(K)$ матричных дискрет $\gamma_{k \times k}(K)$:

$$\gamma_{ij}(K) = - \sum_{\ell=0}^K \sum_{r=i}^{j-1} p1_{jr}(\ell) \cdot \gamma_{ir}(K-\ell), \quad i < j, \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (19)$$

$$\gamma_{ij}(K) = 0, \quad \text{если } i > j, \quad K = \overline{0, \infty},$$

$$\gamma_{ij}(K) = 0, \quad \text{если } i < j, \quad K = \overline{0, \infty},$$

$$\gamma_{ij}(0) = 1, \quad \text{если } i = j, \quad i, j = \overline{1, k},$$

где $p1_{jr}(\ell)$ - ℓ -я дискрета скалярного произведения $\langle t_j^*, c_r \rangle$, определяемая в виде

$$p1(\ell)_{jr} = \sum_{\ell_1=0}^{\ell} t_j^*(\ell_1) \cdot c_r(\ell - \ell_1), \quad i, j = \overline{1, k}, \quad r = \overline{i, j-1}, \quad \ell = \overline{0, K}, \quad (20)$$

а также элементы $b_{ij}(K)$ и $u_{ij}(K)$ матричных дискрет $B_{k \times k}(K)$ и $U_{k \times (n-k)}(K)$:

$$b_{ij}(K) = \frac{\gamma_{ij}(K) - \sum_{h=0}^{K-1} \gamma_{ij}(h) \cdot y_j(K-h)}{y_j(0)}, \quad i, j = \overline{1, k}, \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (21)$$

$$u_{ij}(K) = - \sum_{\ell=0}^K \sum_{r=i}^{j-1} p_{2_{jr}}(\ell) \cdot \gamma_{ir}(K-\ell), \quad i, j = \overline{1, k}, \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (22)$$

где $p_{2_{jr}}(\ell)$ - ℓ -я дискрета скалярного произведения $\langle s_j^*, c_r \rangle$, определяемая в виде

$$p_{2_{jr}}(\ell) = \sum_{\ell_1=0}^{\ell} s_j^*(\ell_1) \cdot c_r(\ell - \ell_1), \quad i, j = \overline{1, k}, \quad r = \overline{i, j-1}, \quad \ell = \overline{0, K}. \quad (23)$$

Шаг 5. Вычисляются матричные дискреты псевдообратной матрицы $T_{k \times m}^+(t)$:

$$T_{k \times m}^+(K) = \sum_{\ell=0}^K B_{k \times k}(\ell) \cdot Q_{k \times m}^*(K-\ell), \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (24)$$

где $Q_{k \times m}^*(K)$, $K = \overline{0, \infty}$ - дискреты комплексно-сопряженной матрицы $Q_{k \times m}(t)$.

Шаг 6. Составляются матричные дискреты $H_{n \times (n-k)}(K)$:

$$H(K) = \left[\frac{U_{k \times (n-k)}(K)}{I_{(n-k) \times (n-k)}(K)} \right], \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (25)$$

где $I_{(n-k) \times (n-k)}(K)$ - K -я дискрета единичной матрицы размера $(n-k)$, причем $I_{(n-k) \times (n-k)}(K) = 0$, $K = \overline{1, \infty}$.

Шаг 7. Вычисляются матричные дискреты ортонормированной матрицы $V_{n \times (n-k)}(t)$ [11]:

$$V_{n \times (n-k)}(K) = \left[\frac{V_{1 \times k \times (n-k)}(K)}{V_{2 \times (n-k) \times (n-k)}(K)} \right], \quad K = \overline{0, \infty}. \quad (26)$$

Шаг 8. Вычисляются матричные дискреты

$$G_{k \times k}(K) = I_{k \times k}(K) - \sum_{\ell=0}^K V_{1 \times k \times (n-k)}(K) \cdot V_{1 \times k \times (n-k)}^*(K-\ell), \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (27)$$

где $I_{k \times k}(K)$ - K -я дискрета единичной матрицы размера k , причем $I_{k \times k}(K) = 0$, $K = \overline{1, \infty}$.

Шаг 9. Составляются матричные дискреты $R_{n \times k}(K)$:

$$R_{n \times k}(K) = [I_{k \times k}(K) \mid U_{k \times (n-k)}(K)]^*, \quad K = \overline{0, \infty}. \quad (28)$$

Шаг 10. Вычисляются матричные дискреты $Z_{k \times (n-k)}(K)$:

$$Z_{n \times k}(K) = \sum_{\ell=0}^K R_{n \times k}(\ell) \cdot G_{k \times k}(K - \ell), \quad K = \overline{0, \infty}. \quad (29)$$

Шаг 11. Вычисляются матричные дискреты псевдообратной матрицы $A_{n \times m}^+(t)$:

$$A_{n \times m}^+(K) = \sum_{\ell=0}^K Z_{n \times k}(K) \cdot T_{k \times m}^+(\ell - K), \quad K = \overline{0, \infty}. \quad (30)$$

Шаг 12. Определив необходимое количество матричных дискрет $A_{n \times m}^+(K)$, восстанавливаются оригиналы в соответствии с (1).

Таким образом, алгоритм предложенной схемы можно представить последовательностью следующих операций:

1. Сначала определяются матричные дискреты $A(K)$, $K = \overline{0, N}$, неавтономной матрицы $A(t)$ в некоторой точке $t = t_v$ согласно левой части (1). При этом число дискрет N и центр аппроксимации t_v выбираются из некоторых практических соображений.
2. С помощью некоторого известного метода для определения автономных псевдообратных матриц вычисляются матричные дискреты $A^+(K)$, $K = \overline{0, N}$, псевдообратной матрицы $A^+(t)$.
3. Имея матричные дискреты $A^+(K)$, $K = \overline{0, N}$, восстанавливаются элементы $a_{ij}^{(+)}(t)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, псевдообратной матрицы $A^+(t)$ согласно правой части (1) (в настоящей работе для нижеизложенного модельного примера элементы $a_{ij}^{(+)}(t)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$,

восстанавливаются с помощью обратных дифференциальных преобразований Тейлора или Паде, что никак не умаляет общность рассуждений и для других обратных преобразований; верхние скобки $()$ в элементах $a_{ij}^{(+)}(t)$ указывают на то, что $a_{ij}^{(+)}(t)$ не является элементом обратной или псевдообратной элемента $a_{ij}(t)$ матрицы $A(t)$, а лишь элементом псевдообратной матрицы $A^+(t)$.

Рассмотрим модельный пример.

Пример. Пусть дана матрица [12]:

$$A(t) = \begin{bmatrix} t & t^2 - 2 & 3t - t^2 & t^2 - 1 \\ -t & 2t & -3t & 1 \\ 0 & t^2 + 2t - 2 & -t^2 & t^2 \end{bmatrix}.$$

Принимая, в частности, $t_v = -1$, $K = \overline{0,7}$ и $H = 1$, имеем следующие матричные дискреты:

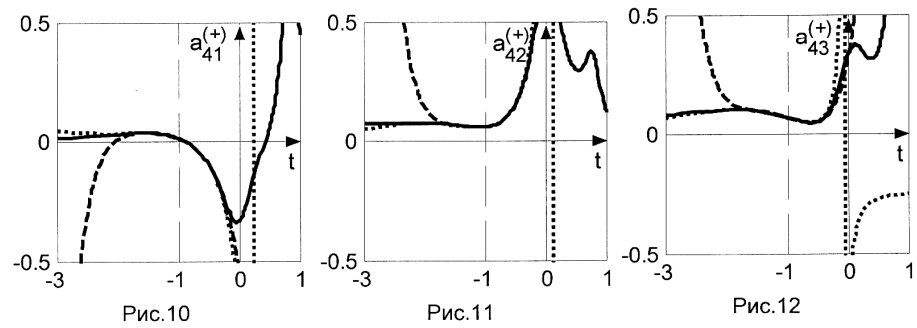
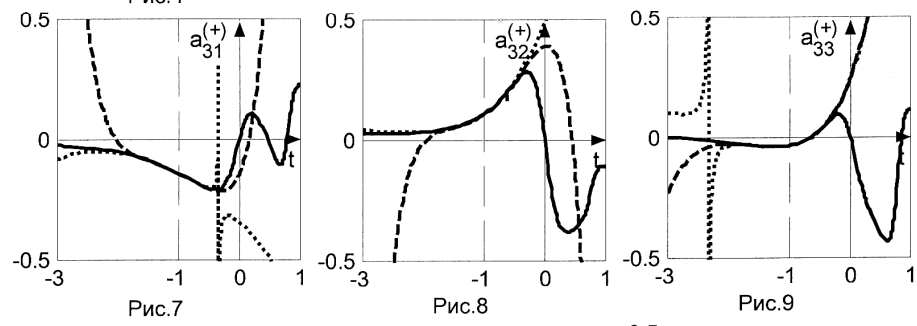
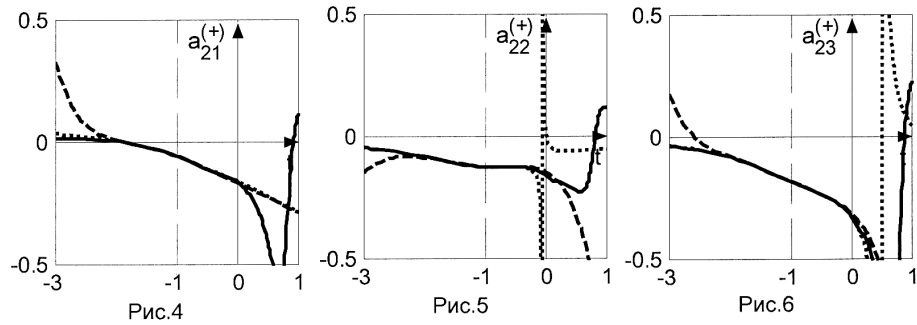
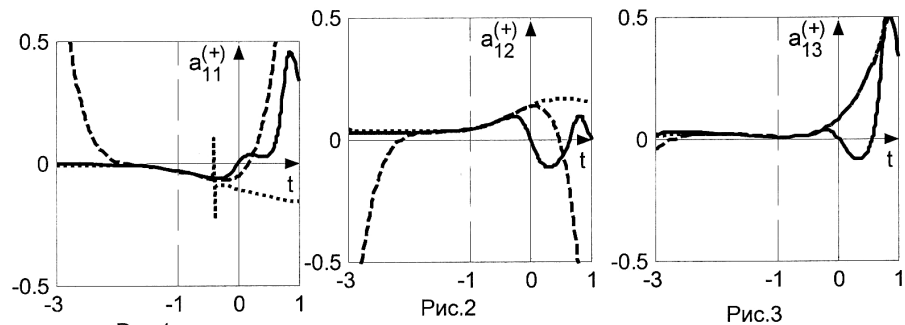
$$A(0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

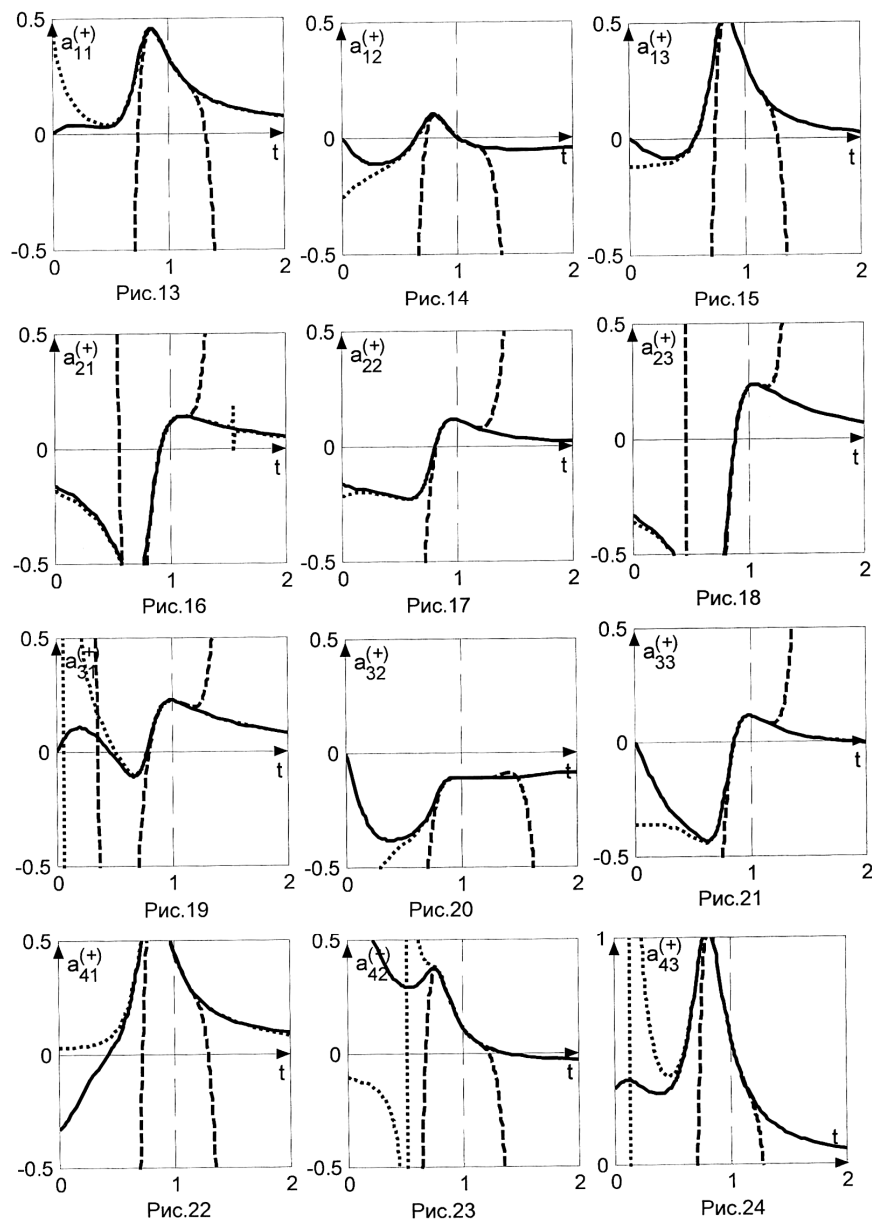
$$A(1) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A(K) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, K \geq 3.$$

Не вдаваясь в подробности, представим полученные результаты: на рис. 1-12 представлены графики элементов псевдообратной матрицы $A^+(t)$ при $t_v = -1$, $K = \overline{0,7}$ и $H = 1$, а на рис. 13-24 - аналогичные графики при $t_v = 1$, $K = \overline{0,7}$ и $H = 1$. На всех рисунках сплошные — линии соответствуют аналитическому решению, пунктирные - - - ДТ-аналогу, точечные - ДП-аналогу.





СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.** Математическая теория конструирования систем управления.-М.: Высшая школа, 1998.-574 с.
2. **Брайсон А., Хо Ю-Ши.** Прикладная теория оптимального управления.-М.: Мир, 1972.-544 с.
3. **Беклемишев Д.В.** Дополнительные главы линейной алгебры.-М.: Наука,1983.-336с.
4. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц.-М.: Наука, 1967.-575 с.
5. **Пухов Г. Е.** Дифференциальные спектры и модели.-Киев: Наукова думка, 1990. – 184 с.
6. **Симонян С. О.** К упрощению вычислительных процедур расщепления линейных динамических систем на основе дифференциально-тейлоровских преобразований // Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН.-2000.-Т.53, N3.- С. 189-193.
7. **Симонян С. О., Аветисян А. Г.** Прямой метод решения линейных многоточечных краевых задач //Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. -2002. -Т.55, N1- С. 95-103.
8. **Симонян С. О., Аветисян А. Г., Варданян Г. А.** К решению функциональных матричных уравнений операторным методом дифференциальных преобразований // Моделирование, оптимизация, управление: Сб. научн. тр. ГИУА.-2003.-Вып. 6, N2. - С.8 -15.
9. **Симонян С. О., Аветисян А. Г., Кюрегян А. Л.** Дифференциально-падеевская локальная модель непрерывных задач математического программирования // Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН.-2001.-Т.54, N1.- С. 95-103.
10. **Симонян С. О., Аветисян А. Г., Меликян А. В.** Дифференциально-тейлоровский аналог метода Жирара-Виета // Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН.-2004.-Т.57, N3.-С. 480-494.
11. **Симонян С.О., Бадалян Л.А.** Метод сингулярного разложения неавтономных матриц на основе дифференциальных преобразований // Вестник ГИУА. Сер. Моделирование, оптимизация, управление. – 2005. - Вып.8, том 2. -С.120-133.
12. **Симонян С.О., Бадалян Л.А.** Дифференциально-тейлоровский аналог метода блочного разбиения для определения неавтономных псевдообратных матриц// Вестник Инженерной академии Армении (ВИАА).- 2005.-Т.2, N1.- С.109-116.
13. **Симонян С.О., Бадалян Л.А.** Дифференциально-тейлоровский аналог метода Гревилля для неавтономных матриц // Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН.-2005.-Т.58, N2.-С.340-353.
14. **Тертычный-Даури В. Ю.** Адаптивная механика.-М.: Наука, 1998.-480с.
15. **Xiaoping Yu** General Influence Coefficient Algorithm in Balancing of Rotating Machinery // International Journal of Rotating Machinery, 10: 85–90, 2004.
16. **Simonyan S. O., Avetisyan A. G.** The Method of Linear Non-Autonomus Finite Equation Set Solution on the Basis of Differential Taylor Transforms //Engineering Simulation. – 1998. - Vol. 15.- P. 407-421.
17. <http://www.mat.univie.ac.at/~nuhag/papers/1991/fei0791.html>
18. <http://www.rf.unn.ru/rus/sci/books/03/>
19. <http://www.cs.ru.nl/~ths/rt2/col/h5/5restoratieENG.html>

ГИУА. Материал поступил в редакцию 20.02.2006.

Ս. Հ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ, Լ. Ա. ԲԱԴԱԼՅԱՆ

ՈՉ ԱԿՏՈՆՈՍ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ԿԵՂԾ ՀԱԿԱԴԱՐՁՆԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՆՄԱՆԱԿՆԵՐԸ՝
ՀԻՄՆՎԱԾ ԳՐԱՄՍ-ՇՄԻԴՏԻ ՕՐԹՈԳՈՆԱԼԱՑՄԱՆ ՄԵԹՈԴԻ ԵՎ ՊՈԽՈՎԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ
ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎՐԱ

Առաջարկված է ոչ ավտոնոմ կեղծ հակադարձ մատրիցների որոշման թվա-անալիտիկ եղանակ: Դիտարկված է մոդելային օրինակ:

Առանցքային բառեր. ոչ ավտոնոմ մատրից, Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման մեթոդ, Պուխովի դիֆերենցիալ ձևափոխություններ, կեղծ հակադարձ մատրից:

S. H. SIMONYAN, L. A. BADALYAN

ANALOGUES FOR DETERMINATION OF NONAUTONOMOUS PSEUDOINVERSE
MATRICES BASED ON THE GRAM-SCHMIDT ORTHOGONALIZATION METHOD AND
PUKHOV'S DIFFERENTIAL TRANSFORMS

A numeral-analytical method for the determination of nonautonomous matrices is suggested. A model example is considered.

Keywords: nonautonomous matrix, Gram-Schmidt orthogonalization method, Pukhov's differential transforms, pseudoinverse matrix.