Известия НАН Армении, Математика, том 57, н. 4, 2022, стр. 14 – 22.

О РЯДАХ ФУРЬЕ, ПОЧТИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ В КЛАССЕ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

М. Г. Григорян

https://doi.org/10.54503/0002-3043-2022.57.4-14-22

Ереванский государственный университет[1]
E-mail: *gmarting@ysu.am*

Аннотация. В работе построен такой универсальный тригонометрический ряд, что после умножения членов этого ряда на некоторую последовательность знаков $\{\delta_k = \pm 1\}_{k=0}^{\infty}$ его можно превратить в ряд Фурье некоторой интегрируемой функции.

MSC2020 number: 42C10; 43A15.

Ключевые слова: универсальный тригонометрический ряд; ряд Фурье; сходимость.

Существование функций и рядов, универсальных в том или ином смысле в различных классах функций, изучалось многими математиками, и публикации по этой тематике регулярно появляются в математической литературе. Понятие универсального ряда (как по классическим, так и по общим ортонормальным системам) восходит к работам Меньшова и Талаляна. Наиболее общие результаты были получены ими и их учениками.

Первой работой, где построены универсальные в обычном смысле тригонометрические ряды в классе всех измеримых функций в смысле сходимости почти всюду является работа [1] Меньшова.

Ряды по любой ортонормированной полной системе, универсальные в классе всех измеримых функций в смысле сходимости почти всюду, были построены в работе [2] Талаляном.

В [3] Гроссе - Эрдман доказал существование универсального ряда Тейлора в классе всех непрерывных на $[-1, 1]$ функций $f(x)$ с $f(0) = 0$.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21AG-1A066.

Замечание 1. Нетрудно видеть, что из известной теоремы Колмогорова [4] (ряд Фурье каждой интегрируемой функции по тригонометрической системе сходится в $L^p[-\pi,\pi]$, $p \in (0,1)$) следует, что не существует функции $U \in L^1[-\pi,\pi]$ ряд Фурье которой по тригонометрической системе (а также по системе Уолша) был бы универсальным в классе всех измеримых функций.

Значит в классе измеримых функций не существует универсального ряда Фурье (по тригонометрической системе), но тем не менее можно построить универсальный тригонометрический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$ такой, что после выбора подходящих знаков $\{\delta_k = \pm 1\}_{k=0}^{\infty}$ для его коэффициентов можно достичь того, что $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$ уже будет рядом Фурье некоторой интегрируемой функции (см. Теорему 1 и определение 3).

Возникает следующий вопрос ответ на который нам не известен.

Вопрос 1. Существует ли ограниченная ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}_{k=0}^{\infty}$ такая, что в классе измеримых функций можно было бы построить универсальный ряд Фурье по системе $\{\varphi_n(x)\}_{k=0}^{\infty}$?

Отметим, что в работах [6] – [13] были получены некоторые результаты, связанные с существованием и описанием структуры функций, ряды Фурье которых (по системе Уолша либо по тригонометрической системе) универсальны в том или ином смысле в различных функциональных классах.

Пусть $|E|$-мера Лебега измеримого множества $E \subseteq [-\pi,\pi]$ и $\mathbf{N}-$ совокупность натуральных чисел.

Пусть $C(E)-$класс непрерывных на $E \subseteq [0,1]$ функций и $M[-\pi,\pi]$ совокупность (не обязательно конечных) измеримых функций. Под сходимостью в $M[-\pi,\pi]$ мы будем подразумевать сходимость почти всюду, а под сходимостью в $C(E)$ -равномерную сходимость.

Пусть $c_k(U) := \int_a^b U(x)\varphi_k(x)dx$ – коэффициенты Фурье по заданной на $[a,b]$ ортонормированной системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ функции $U \in L^1[a,b]$ и пусть $b_k(U) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(x)\sin kxdx$, $a_k(U) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(x)\cos kxdx$, $k = 0,1,2...$ - последовательность коэффициентов Фурье по тригонометрической системе.

Спектр ряда $\sum := \sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$ будем обозначать через

$$\Lambda = \Lambda(\sum) := spec\left(\sum\right) = \{k \in \mathbf{N} \cup \{0\}; \quad c_k \neq 0\},$$

а через $\#(\omega)-$ число точек конечного множества $\omega \subset \mathbf{N}$.

Пусть метрическое пространство $S-$ какое-нибудь из пространств $M[a,b]$, $L^p[a,b]$, $p \geq 0, C(E)$ и пусть $f_k \in S$.

Определение 1. Пусть $\Omega \subset \Lambda \subseteq \mathbf{N} \cup \{0\}$

$$\rho(\Omega)_\Lambda := \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\#(\Omega \cap [0,n))}{\#(\Lambda \cap [0,n))} \tag{1}$$

$\rho(\Omega)_\Lambda-$ называется плотностью подмножества Ω относительно множества Λ.

Определение 2. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \tag{2}$$

называется универсальным в S, если для каждой функции $f \in S$ существует последовательность возрастающих натуральных чисел n_k такая, что последовательность частичных сумм ряда (2) с номерами n_k сходится к $f(x)$ в S.

Определение 3. Универсальный в S ряд

$$\sum := \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$$

называется

а) условно универсальным рядом Фурье, если после умножения коэффициентов этого ряда на последовательность знаков $\{\delta_k = \pm 1\}_{k=0}^{\infty}$ его можно превратить в ряд Фурье некоторой интегрируемой функции,

б) почти универсальным рядом Фурье по ортонормированной системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ в S, если существует последовательность знаков $\{\delta_k = \pm 1\}_{k=0}^{\infty}$ с $\rho(\Omega)_\Lambda = 1$ (здесь $\Omega = \{k \in \Lambda := spec(\sum);\ \ \delta_k = 1\}$) такая, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k c_k \varphi_k(x)$ был бы рядом Фурье некоторой интегрируемой функции.

Теорема 1. *Существуют тригонометрический ряд*

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx),$$

который является условно универсальным рядом Фурье в $M[-\pi, \pi]$.

Замечание 1. Теорема 1 окончательна в следующем смысле: нетрудно видеть, что из известной теоремы Колмогорова [4] (ряд Фурье каждой интегрируемой функции по тригонометрической системе сходится по мере на $[-\pi, \pi]$) следует, что не существует функции $U \in L^1[-\pi, \pi\ ]$ ряд Фурье которой по тригонометрической системе был бы универсальным в классе $M[-\pi, \pi\ ]$ (даже в случае, сходимости по мере).

Теорема 1 следует из следующей теоремы.

Теорема 2. *Существуют тригонометрический ряд*

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \tag{3}$$

и совокупность замкнутых множеств $\{ F_n\}_{n=1}^{\infty}$ *с* $F_1 \subset ... \subset F_n \subset F_{n+1} \subset ... \subset [-\pi,\pi]$ *и* $\lim_{n\to\infty} |F_n| = 2\pi$, *такие, что*

1. ряд (3) *универсален во всех* $C(F_k)$, $k \geq 1$, *более того, для каждой функции* $f \in C[-\pi,\pi]$ *найдется подпоследовательность натуральных чисел* $\{N_j\} \nearrow \infty$ *такая, что равномерно на каждом* F_k, $k \geq 1$,

2. ряд (3) *является* ***почти универсальным рядом Фурье*** *в* $M[-\pi,\pi]$.

Замечание 2. Нетрудно видеть, что Теорема 3 окончательна в следующем смысле:

1. в $C[-\pi,\pi\ ]$ не существует **условно универсального ряда Фурье** по тригонометрической системе

2. не существует функции $U \in L^1[-\pi,\pi\ ]$, ряд Фурье которой по тригонометрической системе был бы универсальным во всех $C(F_n)$, $n = 1, 2, ..$

Замечание 3. Теоремы 1 и 2 верны и для системы Уолша $\{W_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$: нетрудно убедится, что повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 2 и вместо ниже сформулированной леммы 1 применяя лемму 3 работы [6] для системы Уолша можно построить ряд по системе Уолша вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k W_k(x), \quad 0 < |d_{k+1}| < |d_k|, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

который является **почти универсальным рядом Фурье** по системе Уолша в $M[0,1]$ (во всех $C(F_n)$, $F_n \subset F_{n+1} \subset [0,1]$, $n = 1, 2, .$ и $\lim_{n\to\infty} |F_n| = 1$).

Иинтересно было бы выяснить ответ на следующий вопрос.

Вопрос 2. Существует ли **почти универсальный ряд Фурье** по тригонометрической системе с по модулю монотонно убывающими коэффициентами?

Замечание 4. Метод доказательства Теоремы 2 (см. также доказательство теоремы 4 работы [12]) позволяет получить новый подход для построения универсальных рядов: любую измеримую, почти всюду конечную функцию путем изменения ее значений на некотором множестве сколь угодно малой меры можно превратить в такую функцию, что после выбора соответствующих знаков для членов ряда Фурье (как по тригонометрической системе так и по системе Уолша) измененной функции можно достичь того, что полученный ряд уже будет универсальным рядом в $M[0,1]$.

При доказательстве теоремы 2 воспользуемся следующей леммой, доказанной в работе [9].

Лемма 1. *Пусть даны числа* $N_0 \in N, \varepsilon,\ \theta \in (0,1)$ *и ступенчатая функция* $f(x)$. *Тогда можно найти функцию* $g(x)$, *измеримое замкнутое множество* $E \subset [-\pi, \pi\,]$ *с мерой* $|E| > 2\pi - \theta$ *и полиномы по тригонометрической системе*

$$H(x) = \sum_{k=N_0}^{N} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad Q(x) = \sum_{k=N_0}^{N} \delta_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx),\ \delta_k = \pm 1,$$

удовлетворяющие следующим условиям:

$$\int_0^{2\pi} |g(x)|dx < 4\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx < \varepsilon, \qquad g(x) = f(x), \quad x \in E \qquad |E| > 2\pi - \theta$$

$$\int_0^{2\pi} |H(x)|dx < \varepsilon, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|dx < \varepsilon.$$

Из этой леммы вытекает

Лемма 2. *Пусть даны числа* $N_0 \in N, \varepsilon,\ \theta \in (0,1)$ *и тригонометрический полином* $f(x)$. *Тогда можно найти измеримое замкнутое множество* $E \subset [-\pi, \pi\,]$ *с мерой* $|E| > 2\pi - \theta$ *и полиномы по тригонометрической системе*

$$H(x) = \sum_{k=N_0}^{N} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad Q(x) = \sum_{k=N_0}^{N} \delta_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx),\ \delta_k = \pm 1,$$

удовлетворяющие следующим условиям:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |H(x)|dx < \varepsilon, \qquad \int_E |f(x) - Q(x)|dx < \varepsilon, \qquad |E| > 2\pi - \theta$$

Доказательство Теоремы 2. Пусть

$$F = \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \tag{4}$$

есть последовательность всех полиномов по тригонометрической системе с рациональными коэффициентами. Нетрудно видеть, что последовательно применив лемму 2, по индукции можем найти последовательности замкнутых множеств $\{E_n^{(j)}\}_{j=1}^{\lambda_n}$, и полиномов $\{P_n^{(j)}(x)\}_{j=1}^{\lambda_n}$; $\{Q_n^{(j)}(x)\}_{j=1}^{\lambda_n}$, $n \geq 1$ вида

$$P_n^{(j)}(x) = \sum_{k=l_n^{(j-1)}}^{l_n^{(j)}-1} \left(a_k^{(n,j)} \cos kx + b_k^{(n,j)} \sin kx\right), \quad l_1^{(0)} = 1\ , \tag{5}$$

$$Q_n^{(j)}(x) = \sum_{k=l_n^{(j-1)}}^{l_n^{(j)}-1} \delta_k^{(n,j)} (a_k^{(n,j)} \cos kx + b_k^{(n,j)} \sin kx), \quad \delta_k^{(n,j)} = \pm 1, \quad n = 1, 2, . \tag{6}$$

$$1 < l_1^{(1)} = l_2^{(0)} < l_2^{(1)} < l_2^{(2)} < l_{n-1}^{(\lambda_{n-1})} = l_n^{(0)} < l_n^{(1)} < .. < l_n^{(\lambda_n)} = l_{n+1}^{(0)} < l_{n+1}^{(1)} \dots, \tag{7}$$

которые для всех $1 \le j \le \lambda_n,\ j \in [1, \lambda_n]$ удовлетворяют условиям:

(8) $$\delta_k^{(n,j)} = \pm 1,\ k \in [l_n^{(j-1)}, l_n^{(j)}),\ 1 \le j \le \lambda_n\ , n = 1, 2, .,$$

(9) $$\lambda_n = 2^n l_n^{(1)},\ \ |E_n| > 2\pi - 4^{-2n}, n = 1, 2, .,$$

(10) $$\int_0^1 |P_n^{(j)}(x)| dx < 2^{-3(n+j)},\ 1 \le j \le \lambda_n,\ \ n = 1, 2, .,$$

(11) $$\int_{E_n} \left| f_n(x) - \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=2}^{\lambda_k} P_k^{(j)}(x) + Q_k^{(1)}(x) \right) \right| dx < \frac{1}{2^{3(n+2)}}, n = 1, 2, ..$$

Положим

(12) $$G_n^{(j)} = \left\{ x \in [0, 1]\, ,\ \ \left| P_n^{(j)}(x) \right| < 2^{-2(n+j)} \right\},$$

(13) $$G_n = \left\{ x \in E_n;\ \ \left| f_n(x) - \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{j=2}^{\lambda_k} P_k^{(j)}(x) + Q_k^{(1)}(x) \right) \right| \le 2^{-n} \right\}.$$

Из (11) and (13) следует

$$2^{-n}|E_n \backslash G_n| \le \int_{E_n \backslash G_n} \left| f_n(x) - \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=2}^{\lambda_k} P_k^{(j)}(x) + Q_k^{(1)}(x) \right) \right| dx \le$$

$$\le \int_{E_n} \left| f_n(x) - \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=2}^{\lambda_k} P_k^{(j)}(x) + Q_k^{(1)}(x) \right) \right| dx \le 2^{-3n-6}.$$

Отсюда и из (9) вытекает

(14) $$|G_n| \ge |E_n| - 2^{-2n-1} \ge 2\pi - 2^{-2n-2}\ .$$

Аналогично в силу (10) и (12) будем иметь

(15) $$\left| G_n^{(j)} \right| \ge 2\pi - 2^{-(n+j)},\ \forall\ j \in [1, \lambda_n]\ .$$

Ясно, что (см (10))

(16) $$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\lambda_n} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| P_n^{(j)}(x) \right| dx \right) < \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}.$$

Определим последовательность замкнутых множеств $F_1,\ \ F_2, ..\ .F_k...$, функцию $U(x)$ и последовательности чисел $\{a_k\}\ \ \{b_k\}$ следующим образом

(17) $$F_k = \bigcap_{n=k}^{\infty} G_n \left(\bigcap_{j=1}^{\lambda_n} G_n^{(j)} \right),\ \ k = 1, 2, 3, ...$$

$$(18) \qquad U(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\lambda_n} P_n^{(j)}(x)\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

где

$$(19) \qquad a_k = a_k^{(n,j)}, \quad b_k = b_k^{(n,j)}, \quad k \in [l_n^{(j-1)}, l_n^{(j)}), \ 1 \le j \le \lambda_n \ , n = 1, 2, .$$

Отсюда и из (5), (14) – (19) получим

$$(20) \qquad U(x) \in L^1[-\pi,\pi], \quad F_1 \subset F_2 \subset .. \subset F_k \subset .... \subset [-\pi, \pi\ ], \quad \lim_{k\to\infty} |F_k| = 2\pi$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|1 + \sum_{k=1}^{l_n^{(n)}}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) - U(x)\right| dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{m=n+1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\lambda_m} P_n^{(j)}(x)\right)\right| dx = 0$$

и, следовательно,

$$(21) \qquad a_0(U) = 2, \ a_k = a_k(U), \quad b_k = b_k(U), \quad k \ge 1$$

Положим

$$(22) \qquad \delta_k = \begin{cases} 1, \ k \in \bigcup_{n=1}^{\infty}[l_n^{(1)}, l_n^{(\lambda_n)}) \cup \{0\} \\ \delta_k^{(n,j)}, \ k \in [l_n^{(0)}, l_n^{(1)}), n = 1, 2, 3 \end{cases} .$$

$$(23) \qquad \alpha_k = \delta_k a_k(U), \ k = 0, 1, 2..., \quad \beta_k = \delta_k b_k(U), \ k = 1, 2..., \ ,$$

Докажем, что ряд

$$(24) \qquad \sum := \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

универсален во всех пространствах $C(F_k)$, $k \ge 1$, следовательно, и в $M[-\pi,\pi]$. Более того докажем, что для каждой функции $f \in C[-\pi,\pi]$, $f(x+2\pi) = f(x)$ существует возрастающая подпоследовательность $N_q \nearrow$ такая, что ряд для каждого $m \in N$

$$(25) \qquad \lim_{q\to\infty}\left\|\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{N_q}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) - f(x)\right\|_{C(F_m)} = 0.$$

Пусть $f(x)$ произвольная функция из $C[-\pi,\pi]$. Нетрудно видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_q}(x)\}_{q=1}^{\infty}$ из последовательности (4) такую, что

$$(26) \qquad \lim_{q\to\infty} \| f_{n_q}(x) - (f(x) - 1) \|_{C[-\pi,\pi]} = 0.$$

Обозначая через $N_q = l_{n_q}^{(1)} - 1$ в силу (5), (6), (21) - (24) и (26) для каждого фиксированного $m \in N$ и для всех $q \geq q_0$ $(m_{q_0} \geq m)$ имеем

$$\left\| \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{N_q} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) - f(x) \right\|_{C(F_m)} \leq \| f_{n_q}(x) - (f(x) - 1) \|_{C[-\pi,\pi]} +$$

$$+ \left\| f_{n_q}(x) - \sum_{k=1}^{n_q} \left(\sum_{j=2}^{\lambda_k} P_k^{(j)}(x) + Q_k^{(1)}(x) \right) \right\|_{C(F_m)} .$$

Отсюда и из (13), (17) и (26) будем иметь (25).

Теперь докажем, что универсаленый ряд (24) является почти универсальным рядом Фурье, как в $M[-\pi,\pi]$ так и во всех пространствах $C(F_k)$, $k \geq 1$.

Ясно, что (см.(18), (20) и (22)- (24))

$$(27) \qquad \delta_k \alpha_k = a_k(U),\ k = 0, 1, 2...,\quad \delta_k \beta_k = b_k(U),\ k = 1, 2... .$$

Положим (см. (24))

$$(28) \qquad \Lambda := \Lambda(\sum) = spec(\sum), \qquad \Omega := \quad \{k \in \Lambda,\ \delta_k = 1\}.$$

Принимая во внимание неравенство (см. (9) и (28))

$$\frac{\neq \left(\Omega \bigcap [0, l_n^{(\lambda_n)})\right)}{\neq \left(\Lambda \bigcap [0, l_n^{(\lambda_n)})\right)} \geq \frac{\neq \left(\Lambda \bigcap (0, l_n^{(\lambda_n)})\right) - l_n^{(1)}}{\neq \left(\Lambda \bigcap (0, l_n^{(\lambda_n)})\right)} \geq 1 - \frac{l_n^{(1)}}{\lambda_n} \geq 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Откуда вытекает

$$\rho(\Omega)_\Lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\neq (\Omega \bigcap [0, n))}{\neq (\Lambda \bigcap [0, n))} = 1.$$

Теорема 2 доказана.

Abstract. In this work, an universal trigonometric series is constructed such that, after multiplying the terms of this series by some sequence of signs, it can be turned into the Fourier series of some integrable function.

Список литературы

[1] Д. Е Меньшов, “О частичных суммах тригонометрических рядов”, Мат. Сборник, **20**, no. 2, 197 – 238 (1947).

[2] А. А. Талалян, “О сходимости почти всюду подпоследовательностей частных сумм общих ортогональных рядов”, Изв. АН Арм. ССР **10**, no. 3, 17 – 34 (1957).

[3] K. G. Grosse-Erdmann, “Holomorphe Monster und Universelle Funktionen”, Mitt. Math., Semin. G. **176**, 1 – 84 (1987).

[4] A. H. Kolmogorov, “Sur les fonctions harmoniques conjugeeset les series de Fourier”, FM, **7**, 23 – 28 (1925).

[5] М. Г. Григорян, “О существовании и структуре универсальных функций”, Док. РАН, Матем (Doklady Mathematics), **496**, 30 – 33 (2021).

[6] M. G. Grigoryan, A. A. Sargsyan, “On the universal function for the class $L^p[0,1], p \in (0,1)$”, Journal of Func. Anal. **270**, no. 8, 3111 – 3133 (2016).
[7] Г. Г. Геворкян, К. А. Навасардян, “О рядах Уолша с монотонными коэффициентами”, Изв. АН. Росс., **632**, no. 1, 41-60 (1999).
[8] M. G. Grigoryan, “On the universal and strong property related to Fourier-Walsh series”, Banach Journal of Math. Analysis, **11**, no. 3, 698 – 712 (2017).
[9] M. G. Grigoryan , L. N. Galoyan, “On the universal functions”, Journal of Approximation Theory **225**, 191 – 208 (2018).
[10] М. Г. Григорян, “Об универсальных рядах Фурье”, Матем. Заметки . **108**, no. 2, 296 – 299 (2020).
[11] М. Г. Григорян, Л. Н. Галоян, “Функции, универсальные относительно тригонометрической системы”, Изв. РАН. Сер. матем., **85**, no. 2, 73–94 (2021).
[12] М. Г. Григорян, “Функции, с универсальными рядами Фурье- Уолша”, Матем. Сб. **211**, no. 6, 107 – 131 (2020).

Поступила 20 января 2022

После доработки 01 апреля 2022

Принята к публикации 10 апреля 2022