ISSN 0002-306X. Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2006. Т. LIX, **№ 1.**

УДК 62-501.7

АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Ф.П. ГРИГОРЯН

СИНТЕЗ МНОГОМЕРНОГО УПРАВЛЕНИЯ С НАПЕРЕД ЗАДАННЫМ СПЕКТРОМ

Рассматривается задача синтеза выбора многомерного управления с наперед заданным спектром общего вида в стационарной интегро-дифференциальной системе уравнений. Получена формула, выражающая зависимость между коэффициентом входного сигнала регулятора и наперед заданным спектром.

Ключевые слова: синтез управления, желаемый спектр, многомерное управление, импульсная переходная функция, передаточная функция.

Постановка задачи. Пусть задана следующая управляемая система:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + Hu, \\ u = \int\limits_{-\infty}^{t} G(t-t')\nu(t')dt', \\ \nu = bx, \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = Ax + H\int\limits_{-\infty}^{t} G(t-t')bx(t')dt', \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ - вектор состояния процесса; ν - скаляр (входной сигнал регулятора); $G = (g_1, g_2, \cdots, g_m)^T$ - импульсная переходная функция регулятора; $U = (u_1, u_2, \cdots, u_m)^T$ - многомерное управляющее воздействие (выходной сигнал регулятора); $A = (a_{ij}),\ i, j = \overline{1, n}$; $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$; $H = (H_{ij}),\ i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, m}$.

Наперед заданный спектр имеет следующий вид:

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n_1};\ \underbrace{\mu, \mu, \ldots, \mu}_{n_2\ шт};\ \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n_3\ шт};\ n_1 + n_2 + n_3 = n \tag{2}$$

при условиях:

1) $\lambda_i \neq \lambda_j,\ i \neq j,\ i, j = \overline{1, n_1},\ \mu \neq \lambda_i,\ \mu \neq 0$;

2) $\lambda_i \neq \psi_i,\ i = \overline{1, n_1},\ j = \overline{1, n}$, где ψ_i – собственные числа матрицы А и $\psi_i \neq \psi_j,\ i \neq j,\ i, j = \overline{1, n}$;

3) $\psi_i \neq \mu, \;\; \psi_i \neq 0, \;\; i = \overline{1,n}$.

Требуется построить $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ так, чтобы решение системы (1) имело вид

$$x = \widetilde{K}y,$$

где $\widetilde{K}$ - некоторая невырожденная матрица порядка $n \times n$, подлежащая определению;

$$\begin{cases} \dot{y}_{i_1} = \lambda_{i_1} y_{i_1} & i_1 = \overline{1, n_1}, \\ \dot{y}_{i_2} = \mu y_{i_2} & i_2 = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2, \\ \dot{y}_{i_3} = 0 y_{i_3} & i_3 = n_1 + n_2 + 1, \ldots, n, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_{i_1} = e^{\lambda_{i_1} t} C_{i_1}, \\ y_{i_2} = e^{\mu t} C_{i_2}, \\ y_{i_3} = C_{i_3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^{(1)} = e^{\Lambda_{n_1} t} C^{(n_1)}, \\ y^{(2)} = e^{\mu t} C^{(n_2)}, \\ y^{(3)} = C^{(n_3)}, \end{cases}$$

где $\Lambda_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n_1})$; $C^{(n_1)} = (C_1, \ldots, C_{n_1})^T$; $C^{(n_2)} = (C_{n_1+1}, \ldots, C_\alpha)^T$; $C^{(n_3)} = (C_{\alpha+1}, \ldots, C_n)^T$ - столбцы из произвольных постоянных, а

$$y^{(1)} = (y_1, \ldots y_{n_1})^T, \;\; y^{(2)} = (y_{n_1+1}, \ldots, y_\alpha)^T, \;\; y^{(3)} = (y_{\alpha+1}, \ldots, y_n)^T,$$

$$(\alpha = n_1 + n_2), \;\; y = (y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)})^T.$$

Предполагается также, что имеют место и следующие условия для передаточной функции $W(p) = \int\limits_0^\infty G(s) e^{-ps} ds$ регулятора [4]:

4) $\left.\dfrac{d^i W(p)}{dp^i}\right|_{p=\mu} = (0,0,\ldots 0)^T, \;\; i = \overline{1, n_2 - 1}; \;\; \left.\dfrac{d^i W(p)}{dp^i}\right|_{p=0} = (0,0,\ldots 0)^T, \;\; i = \overline{1, n_3 - 1}$;

5) Нули и полюсы $W(p)$ не совпадают с элементами спектра (2).

Решение задачи. Обозначим через Ω матрицу собственных векторов [3] матрицы A: $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_n)$. Выполним в системе (1) преобразование подобия

$$x = \Omega z,$$

где $z = (z_1, \cdots, z_n)^T$ – вектор преобразованных переменных состояния. При этом получим

$$\frac{dz}{dt} = \Lambda z + H_0 \int\limits_{-\infty}^{t} G(t - t') q z(t') dt', \tag{3}$$

где

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n), \;\; H_0 = \Omega^{-1} H, \;\; q = b\Omega = (q_1, q_2, \cdots, q_n). \tag{4}$$

Теперь сделаем в системе (3) замену переменных

$$z = \widetilde{K}y, \quad \widetilde{K} = K\chi(t), \tag{5}$$

где матрица $\chi(t)$ преобразует систему

$$\dot{\eta}(t) = J\eta(t) \tag{6}$$

(здесь $J = \mathrm{diag}(\Lambda_1, \Gamma_2 + \mu E_2, \Gamma_3)$, $\chi(t) = \mathrm{diag}(\chi_1(t), \chi_2(t), \chi_3(t))$, где $\chi_1(t) \equiv E_1(t), E_2(t)$ – единичные матрицы порядка n_1 и n_2 соответственно; Γ_2 и Γ_3 – матрицы сдвига [1] порядка n_2 и n_3 соответственно, а $\chi_2(t) = \exp(\Gamma_2 t)$, $\chi_3(t) = \exp(\Gamma_3 t)$ - в диагональную форму с матрицей

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n_1};\ \underbrace{\mu, \mu, ..., \mu}_{n_2\ \text{øò.}};\ \underbrace{0, 0, ..., 0}_{n_3\ \text{øò.}}). \tag{7}$$

В интеграле правой части (3) сделаем замену переменной $t - t' = s$:

$$\frac{dz}{dt} = \Lambda z + H_0 \int_0^\infty G(s) q z(t - s) ds.$$

Матрицы $\widetilde{K}$ и K представим в следующем блочном виде [5]:

$$\widetilde{K} = (\widetilde{K}_{(n_1)}, \widetilde{K}_{(\alpha\alpha}, \widetilde{K}_{(n)}),\ \widetilde{K}_{(n_1)} = (\widetilde{K}_1, ..., \widetilde{K}_{n_1}),\ \widetilde{K}_{(\alpha\alpha} = (\widetilde{K}_{n_1+1}, ..., \widetilde{K}_\alpha),$$

$$\widetilde{K}_{(n)} = (\widetilde{K}_{\alpha+1}, ..., \widetilde{K}_n),\ \alpha = n_1 + n_2,$$

$$K = (K_{(n_1)}, K_{(\alpha\alpha}, K_{(n)}),\ K_{(n_1)} = (K_1, ..., K_{n_1}),\ K_{(\alpha\alpha} = (K_{n_1+1}, ..., K_\alpha),$$

$$K_{(n)} = (K_{\alpha+1}, ..., K_n).$$

Обозначим

$$U(p) = \Lambda + H_0 \int_0^\infty G(s) e^{-ps} ds. \tag{8}$$

Произведя аналогичные преобразования подобно [5], получим

$$\begin{cases} U(\lambda_1)K_1 = \lambda_1 K_1, \\ U(\lambda_2)K_2 = \lambda_2 K_2, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ U(\lambda_{n_1})K_{n_1} = \lambda_{n_1} K_{n_1}; \end{cases} \begin{cases} (U(\mu U(\mu)\text{-}\mu_{n_1+1} = 0, \\ (U(\mu U - \mu E)K_{n_1+2} = K_{n_1+1}, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ (U(\mu U - \mu E)K_\alpha = K_{\alpha-1}; \end{cases} \begin{cases} U(0)K_{\alpha+1} = 0, \\ U(0)K_{\alpha+2} = K_{\alpha+1}, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ U(0)K_n = K_{n-1}. \end{cases} \tag{9}$$

$$\alpha = n_1 + n_2$$

Когда определяется $q = b\Omega$, тогда из (9) определяются и столбцы $K_1, K_2, \cdots, K_n$.

Теперь перейдем к определению $q = b\Omega$. Рассмотрим подсистемы (9). Исследуем первую часть из (9). Упростим вид матрицы $U(\lambda_i)$, $i = \overline{1, n_1}$. Из (4) разделим матрицу H_0 на блоки следующим образом:

$$H_0 = \begin{pmatrix} h_1 \\ \dots \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nm} \end{pmatrix}.$$

Имея в виду, что $W(\lambda_i) = \left(W_1(\lambda_i), W_2(\lambda_i), \cdots, W_m(\lambda_i)\right)^T$, $i = \overline{1, n_1}$, из (8) находим

$$U(\lambda_i) = \Lambda + H_0 W(\lambda_i) q = \begin{pmatrix} \psi_1 & & & & 0 \\ & \psi_2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \dots & \\ 0 & & & & \psi_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W_1(\lambda_i) \\ W_2(\lambda_i) \\ \dots \\ \dots \\ W_m(\lambda_i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} \psi_1 + p_1(\lambda_i) q_1 & p_1(\lambda_i) q_2 & \dots & p_1(\lambda_i) q_n \\ p_2(\lambda_i) q_1 & \psi_2 + p_2(\lambda_i) q_2 & \dots & p_2(\lambda_i) q_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_n(\lambda_i) q_1 & p_n(\lambda_i) q_2 & \dots & \psi_n + p_n(\lambda_i) q_n \end{pmatrix},$$

где
$$p_j(\lambda_i) = h_j W(\lambda_i) = \sum_{k=1}^{m} h_{jK} W_K(\lambda_i), \quad i = \overline{1, n_1}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Согласно пятому условию задачи и из (8) следует

$$p_j(\lambda_i) \neq 0, \quad i = \overline{1, n_1}, \; j = \overline{1, n}. \tag{10}$$

Характеристический многочлен [2] матрицы $U(\lambda_i)$, $i = \overline{1, n_1}$ имеет вид

$$\left|U(\lambda_i) - \lambda E\right| = \prod_{i_1=1}^{n} (\psi_{i_1} - \lambda) + p_1(\lambda_i) q_1 \prod_{\substack{i_1=1 \\ i_1 \neq 1}}^{n} (\psi_{i_1} - \lambda) + p_2(\lambda_i) \prod_{\substack{i_1=1 \\ i_1 \neq 2}}^{n} (\psi_{i_1} - \lambda) + \dots +$$
$$+ p_n(\lambda_i) q_n \prod_{\substack{i_1=1 \\ i_1 \neq n}}^{n} (\psi_{i_1} - \lambda), \qquad i = \overline{1, n_1}. \tag{11}$$

Обозначим

$$\delta(\lambda) = \prod_{i_1=1}^{n} (\psi_i - \lambda), \qquad \delta_j(\lambda) = \prod_{\substack{i_1=1 \\ i_1 \neq j}}^{n} (\psi_{i_1} - \lambda), \quad j = \overline{1, n}. \tag{12}$$

Разложив каждый многочлен $\delta(\lambda)$ и $\delta_j(\lambda)$ относительно степеней λ, имеем

$$\delta(\lambda) = (-\lambda)^n + a_1(-\lambda)^{n-1} + a_2(-\lambda)^{n-2} + a_3(-\lambda)^{n-3} + \dots + a_n,$$

$$\delta_j(\lambda) = (-\lambda)^{n-1} + a_{1j}(-\lambda)^{n-2} + a_{2j}(-\lambda)^{n-3} + \cdots + a_{n-1,j}, \qquad j = \overline{1,n},$$

где коэффициенты $a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{n-1,j}$ определяются через ψ_i, $i = \overline{1,n}$ по теореме Виета [3]. Благодаря второму условию задачи и из (12) заключаем, что

$$\delta_j(\lambda_i) \neq 0, \quad i = \overline{1,n_1}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{13}$$

Согласно (12), характеристический многочлен (11) приобретает вид

$$\begin{aligned} \left|U(\lambda_i) - \lambda E\right| &= \delta(\lambda) + p_1(\lambda_i)q_1\delta_1(\lambda) + p_2(\lambda_i)q_2\delta_2(\lambda) + \ldots + \\ &+ p_n(\lambda_i)q_n\delta_n(\lambda), \qquad i = \overline{1,n_1}. \end{aligned} \tag{14}$$

Подставив в (14) $\lambda = \lambda_i$, $i = \overline{1,n_1}$ и имея в виду (10) и (13), получаем следующую подсистему относительно $q_1, q_2, \cdots, q_n$:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j(\lambda_i)\delta_j(\lambda_i)q_j = -\delta(\lambda_i), \quad i = \overline{1,n_1}. \tag{15}$$

Теперь исследуем вторую часть из (9), откуда следует, что K_{n_1+1} является собственным вектором матрицы $U(\mu)$,а число μ - корнем кратности n_2 для характеристического многочлена $\left|U(\mu) - \lambda E\right|$.

Аналогично (14) характеристический многочлен для матрицы $U(\mu) = \Lambda + W(\mu)$ имеет вид

$$\left|U(\mu) - \lambda E\right| = \delta(\lambda) + p_1(\mu)q_1\delta_1(\lambda) + p_2(\mu)q_2\delta_2(\lambda) + \cdots + p_n(\mu)q_n\delta_n(\lambda). \tag{16}$$

Наложим на $(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ условия [5], при которых $\lambda = \mu$ являлись бы корнем кратности n_2 для многочлена (16). Дифференцируя (16) n_2-1 раз и подставляя туда $\lambda = \mu$, с учетом пятого условия задачи получим следующую подсистему из n_2 уравнений относительно $q_1, q_2, \cdots, q_n$:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j(\mu)q_j\delta_j^{(k)}(\mu) = -\delta^{(k)}(\mu), \quad k = \overline{0,(n_2\text{-}1)} \tag{17}$$

(здесь через (k) обозначена производная k-го порядка).

Далее исследуем третью часть из (9), откуда следует, что $K_{\alpha+1}$ $(\alpha = n_1 + n_2)$ является собственным вектором матрицы $U(0)$, а λ=0 - корнем кратности n_3 для $\left|U(0) - \lambda E\right|$.

Нетрудно видеть из вышеизложенного, что характеристический многочлен матрицы $U(0)$ имеет вид

$$\left|U(0) - \lambda E\right| = \delta(\lambda) + p_1(0)q_1\delta_1(\lambda) + p_2(0)q_2\delta_2(\lambda) + \cdots + p_n(0)q_n\delta_n(\lambda). \tag{18}$$

Дифференцируя (18) n_3-1 раз и подставляя туда λ=0, по пятому условию задачи получим следующую подсистему из n_3 уравнений относительно $q_1, q_2, \cdots, q_n$:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j(0)q_j\delta_j^{(k)}(0) = -\delta^{(k)}(0), \qquad k = \overline{0,(n_3\text{-}1)}. \tag{19}$$

Наконец, перейдем к определению $q_1, q_2, \cdots, q_n$. Объединяя подсистемы (15), (17) и (19), получаем следующую систему из n уравнений относительно $q_1, q_2, \cdots, q_n$ [5]:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} p_j(\lambda_i)\delta_j(\lambda_i)q_j = -\delta(\lambda_i), & i = \overline{1,n_1}, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} p_j(\mu)q_j\delta_j^{(k)}(\mu) = -\delta^{(k)}(\mu), & k = \overline{0,(n_2\text{-}1)}, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} p_j(0)q_j\delta_j^{(k)}(0) = -\delta^{(k)}(0), & k = \overline{0,(n_3\text{-}1)}. \end{cases} \tag{20}$$

Обозначим

$$F = \begin{bmatrix} p_1(\lambda_1)\delta_1(\lambda_1) & p_2(\lambda_1)\delta_2(\lambda_1) & \ldots & p_n(\lambda_1)\delta_n(\lambda_1) \\ p_1(\lambda_2)\delta_1(\lambda_2) & p_2(\lambda_2)\delta_2(\lambda_2) & \ldots & p_n(\lambda_2)\delta_n(\lambda_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_1(\lambda_{n_1})\delta_1(\lambda_{n_1}) & p_2(\lambda_{n_1})\delta_2(\lambda_{n_1}) & \ldots & p_n(\lambda_{n_1})\delta_n(\lambda_{n_1}) \\ p_1(\mu)\delta_1(\mu) & p_2(\mu)\delta_2(\mu) & \ldots & p_n(\mu)\delta_n(\mu) \\ p_1(\mu)\delta_1'(\mu) & p_2(\mu)\delta_2'(\mu) & \ldots & p_n(\mu)\delta_n'(\mu) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_1(\mu)\delta_1^{(n_2-1)}(\mu) & p_2(\mu)\delta_2^{(n_2-1)}(\mu) & \ldots & p_n(\mu)\delta_n^{(n_2-1)}(\mu) \\ p_1(0)\delta_1(0) & p_2(0)\delta_2(0) & \ldots & p_n(0)\delta_n(0) \\ p_1(0)\delta_1'(0) & p_1(0)\delta_2'(0) & \ldots & p_n(0)\delta_n'(0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_1(0)\delta_1^{(n_3-1)}(0) & p_2(0)\delta_2^{(n_3-1)}(0) & \ldots & p_n(0)\delta_n^{(n_3-1)}(0) \end{bmatrix}_{n\times n}, \quad f = \begin{bmatrix} \delta(\lambda_1) \\ \delta(\lambda_2) \\ \ldots \\ \ldots \\ \delta(\lambda_{n_1}) \\ \delta(\mu) \\ \delta'(\mu) \\ \ldots \\ \ldots \\ \delta^{(n_2-1)}(\mu) \\ \delta(0) \\ \delta'(0) \\ \ldots \\ \ldots \\ \delta^{(n_3-1)}(0) \end{bmatrix}. \tag{21}$$

По (21) система (20) запишется в виде

$$F(q_1, q_2, \cdots, q_n)^T = -f. \tag{22}$$

Нетрудно видеть, что матрица F благодаря условиям задачи невырожденная. Поэтому из (22) находим

$$q = (q_1, q_2, \cdots, q_n) = -(F^{-1}f)^T.$$

Тогда по (4) окончательно получим

$$b = (b_1, b_2, \cdots, b_n) = -(F^{-1}f)^T\Omega. \tag{23}$$

Наконец, согласно (2), (5), (6), (7) находим решение системы (1):

$$x = \Omega K \chi(t) e^{\Lambda t} C,$$

где C – столбец из произвольных постоянных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Абгарян К.А.** Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. – М.: Наука, 1973.-431с.
2. **Гальперин Е.А.** Синтез линейных управлений в стационарной линейной системе // Изв.АН СССР. Техническая кибернетика. - 1968.- ¹4.-С.130-136.
3. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц.- М.: Наука, 1967.- 576 с.
4. **Ройтенберг Я.Н.** Автоматическое управление. – М.: Наука, 1971.-395 с.
5. **Григорян Ф.П.** О построении управления с желаемым спектром в САР // Изв. НАН Армении. Механика.- 2003. - Т. 55, ¹ 2.-С. 59 - 69.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 09.06.2004.

Ֆ.Պ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

ՆԱԽՕՐՈՔ ՏՐՎԱԾ ՏԱՐՐԱՊԱՏԿԵՐՈՎ ԲԱԶՄԱՉԱՓ ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ ՍԻՆԹԵԶԸ

Դիտարկվել է նախօրոք տրված ընդհանուր տեսքի տարրապատկերով բազմաչափ կառավարման սինթեզի խնդիրը ստացիոնար ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերում: Ստացվել է կարգավորչի մուտքային ազդանշանի և նախօրոք տրված տարրապատկերի միջև կապն արտացոլող առնչություն:

Առանցքային բառեր. կառավարման համադրում, ցանկալի տարրապատկեր, բազմաչափ կառավարում, իմպուլսային անցումային ֆունկցիա, փոխանցումային ֆունկցիա:

F.P. GRIGORYAN

MULTIVARIABLE CONTROL SYNTHESIS WITH IN ADVANCE GIVEN SPECTRUM

The problem of multivariable control choice synthesis in advance given spectrum of common view in stationary integro-differential equation system is considered. The formula expressing dependence between the coefficient of the input controller signal and in advance given spectrum is obtained.

Keywords: control synthesis, desirable spectrum, multivariable control, pulse transition functions, transferring function.