

С.С. ДАРБИНЯН

ОБ ОДНОЙ РЕОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

Рассматриваются колебания упругой системы с одной степенью свободы при наличии нелинейного сопротивления. Получены законы изменения внешних и внутренних сил. Приведены формулы для вычисления максимальных напряжений с использованием предлагаемой реологической модели.

Ключевые слова: модель, реология, напряжение, сопротивление, колебание.

Рассмотрим колебания линейно-упругой системы, снабженной дополнительно неупругим сопротивлением, вызывающим затухание колебаний. Примем реологическую модель, предложенную в [1]

$$\sigma^* = E^* \varepsilon^* + \eta^* \frac{d\varepsilon^*}{dt}, \quad (1)$$

где величины со звездочкой являются комплексными числами:

$$E^* = E_0 e^{i\alpha}, \quad \eta^* = \eta_0 e^{i\beta}.$$

Предположим, имеем невесомый брус длиной ℓ с площадью поперечного сечения F . По торцам бруса приложена продольная сила P^* . Тогда

$$\sigma^* = \frac{P^*}{F}, \quad \varepsilon^* = \frac{y^*}{\ell},$$

где y^* - удлинение бруса.

На основании (1) получим

$$P^* = \frac{E^* F}{\ell} y^* + \frac{\eta^* F}{\ell} \frac{dy^*}{dt}. \quad (2)$$

Положим, что рассматриваемый брус заделан в грунт, совершающий вертикальные колебания с амплитудой $y_0^*(t)$. Пусть на конце бруса приложен груз массой m . Тогда внешняя сила P^* заменится силой инерции:

$$-m \left(\frac{d^2 y^*}{dt^2} + \frac{d^2 y_0^*}{dt^2} \right).$$

Выражение (2) запишется следующим образом:

$$-m \left(\frac{d^2 y^*}{dt^2} + \frac{d^2 y_0^*}{dt^2} \right) = \frac{E^* F}{\ell} y^* + \frac{\eta^* F}{\ell} \frac{dy^*}{dt}$$

или окончательно:

$$\frac{d^2 y^*}{dt^2} + 2n_0 e^{i\beta} \frac{dy^*}{dt} + \omega^2 e^{i\alpha} y^* = -\frac{d^2 y_0^*}{dt^2}, \quad (3)$$

$$\text{где } 2n_0 = \frac{\eta_0 F}{m \ell}, \quad \omega^2 = \frac{E_0 F}{m \ell}.$$

Полученный результат легко обобщить на любые линейные дифференциальные уравнения колебаний, снабженные диссипативными членами по гипотезе Фойхта. Для этого нужно смещение y записать в комплексной форме y^* , в диссипативные члены ввести вместо множителя $2\eta_0$ множитель $2n_0 e^{i\beta}$ и вместо круговых частот ω^2 ввести $\omega^2 e^{i\alpha}$. В зависимости от вида деформации Π_0 и ω запишутся соответствующим образом.

Здесь мы ограничимся рассмотрением случая, когда колебание совершается по гармоническому закону, причем свободными колебаниями пренебрегаем, то есть рассматриваем установившиеся вынужденные колебания.

Допустим, что

$$\begin{aligned} y_0^* &= A^* e^{ipt} = (A_1 + iA_2) e^{ipt} = A_1 e^{ipt}, \\ y^* &= B^* e^{ipt} = (B_1 + iB_2) e^{ipt}. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя эти значения в (3) и сокращая на e^{ipt} , получим

$$-B^* p^2 + 2in_0 p B^* e^{i\beta} + \omega^2 B^* e^{i\alpha} = A_1 p^2,$$

$$B^* = \frac{p^2 A_1}{\omega^2 e^{i\alpha} + 2in_0 p e^{i\beta} - p^2}$$

или

$$B^* = \frac{A_1}{\frac{\omega^2}{p^2} e^{i\alpha} + 2i \frac{n_0}{p} e^{i\beta} - 1}. \quad (5)$$

Знаменатель выражения (5) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{\omega^2}{p^2} e^{i\alpha} + 2i \frac{n_0}{p} e^{i\beta} - 1 &= \frac{\omega^2}{p^2} (\cos \alpha + i \sin \alpha) + 2i \frac{n_0}{p} (\cos \beta + i \sin \beta) - 1 = \\
&= \frac{\omega^2}{p^2} \cos \alpha + i \frac{\omega^2}{p^2} \sin \alpha + i \frac{2n_0}{p} \cos \beta - \frac{2n_0}{p} \sin \beta - 1 = \\
&= \frac{\omega^2}{p^2} \cos \alpha - \frac{2n_0}{p} \sin \beta - 1 + i \left(\frac{\omega^2}{p^2} \sin \alpha + \frac{2n_0}{p} \cos \beta \right).
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\omega^2}{p^2} \cos \alpha - \frac{2n_0}{p} \sin \beta - 1, \\
C_2 &= \frac{\omega^2}{p^2} \sin \alpha + \frac{2n_0}{p} \cos \beta.
\end{aligned} \tag{6}$$

Тогда
$$\frac{\omega^2}{p^2} e^{i\alpha} + 2i \frac{n_0}{p} e^{i\beta} - 1 = C_1 + iC_2.$$

На основании (5) получим

$$B^* = \frac{A_1}{C_1 + iC_2}, \quad B^* = \frac{A_1(C_1 - iC_2)}{C_1^2 + C_2^2}.$$

Имея в виду, что $B^* = B_1 + iB_2$, получим

$$B^* = B_1 + iB_2 = \frac{A_1 C_1}{C_1^2 + C_2^2} - i \frac{A_1 C_2}{C_1^2 + C_2^2},$$

откуда

$$B_1 = \frac{A_1 C_1}{C_1^2 + C_2^2}, \quad B_2 = - \frac{A_1 C_2}{C_1^2 + C_2^2}.$$

Подставляя сюда значения C_1 и C_2 из (6), получим

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{\frac{\omega^2}{p^2} \cos \alpha - \frac{2n_0}{p} \sin \beta - 1}{\left(\frac{\omega^2}{p^2} \cos \alpha - \frac{2n_0}{p} \sin \beta - 1 \right)^2 + \left(\frac{\omega^2}{p^2} \sin \alpha + \frac{2n_0}{p} \cos \beta \right)^2} A_1, \\
B_2 &= - \frac{\frac{\omega^2}{p^2} \sin \alpha + \frac{2n_0}{p} \cos \beta}{\left(\frac{\omega^2}{p^2} \cos \alpha - \frac{2n_0}{p} \sin \beta - 1 \right)^2 + \left(\frac{\omega^2}{p^2} \sin \alpha + \frac{2n_0}{p} \cos \beta \right)^2} A_1.
\end{aligned}$$

Обозначив $\frac{\omega}{p} = \gamma$, $\frac{2n_0}{p} = \mu$, получим

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\gamma^2 \cos \alpha - \mu \sin \beta - 1}{(\gamma^2 \cos \alpha - \mu \sin \beta - 1)^2 + (\gamma^2 \sin \alpha + \mu \cos \beta)^2} A_1, \\ B_2 &= -\frac{\gamma^2 \sin \alpha + \mu \cos \beta}{(\gamma^2 \cos \alpha - \mu \sin \beta - 1)^2 + (\gamma^2 \sin \alpha + \mu \cos \beta)^2} A_1. \end{aligned} \quad (7)$$

На основании (3) и (4) определим вещественные части внешней силы P , силы сопротивления Q и реакции R :

$$\begin{aligned} P &= \operatorname{Re}\left(-\frac{d^2 y^*}{dt^2} - \frac{d^2 y_0^*}{dt^2}\right) = p^2[(A_1 + B_1)\cos pt - B_2 \sin pt], \\ Q &= \operatorname{Re}(2n_0 e^{i\beta} \frac{dy^*}{dt}) = -2n_0 p[B_1 \sin(pt - \beta) + B_2 \cos(pt - \beta)], \end{aligned} \quad (8)$$

$$R = \operatorname{Re}(\omega^2 e^{i\alpha} y^*) = \omega^2[B_1 \cos(pt + \alpha) - B_2 \sin(pt + \alpha)].$$

Из (8) найдем величину R , когда затухание отсутствует ($\alpha=0$), то есть найдем $\operatorname{Re}(\omega^2 y^*) = R_{\text{упр.}}$:

$$R_{\text{упр.}} = \omega^2(B_1 \cos pt - B_2 \sin pt). \quad (9)$$

Тогда отношение внешней силы к упругой будет равно

$$\begin{aligned} K &= \frac{P}{R_{\text{упр.}}} = \frac{p^2[(A_1 + B_1)\cos pt - B_2 \sin pt]}{\omega^2(B_1 \cos pt - B_2 \sin pt)}, \\ K &= \frac{p^2}{\omega^2} \left[1 + \frac{A_1 \cos pt}{B_1 \cos pt - B_2 \sin pt} \right] \end{aligned}$$

или

$$K = \frac{1}{\gamma^2} \left(1 + \frac{A_1 \cos pt}{B_1 \cos pt - B_2 \sin pt} \right), \quad (10)$$

где B_1 и B_2 определяются по формулам (7).

Таким образом, при известных значениях параметров γ , μ , α , β с помощью (10) оценим степень изменения внешних и внутренних сил по предложенной модели.

Рассмотрим частный случай, когда $t=0$. Тогда из (10) получим

$$K = K_0 = \frac{1}{\gamma^2} \left(1 + \frac{A_1}{B_1} \right).$$

Подставляя значения B_1 из (7), после некоторых преобразований получим

$$K_0 = \frac{\gamma^2 + 4 \frac{n_0^2}{\omega^2} + \frac{2n_0}{\omega\gamma} \sin\beta - \cos\alpha + \frac{4n_0}{p} \sin(\alpha - \beta)}{\gamma^2 \cos\alpha - 1 - 2 \frac{n_0}{p} \sin\beta}$$

или

$$K_0 = \frac{\gamma^4 + \mu^2 + \mu \sin\beta - \gamma^2 \cos\alpha + 2\gamma^2 \mu \sin(\alpha - \beta)}{\gamma^2 (\gamma^2 \cos\alpha - 1 - \mu \sin\beta)}. \quad (11)$$

При $\gamma=1$ из (11) получим

$$K_0|_{\gamma=1} = -1 + \frac{\mu [\mu + 2 \sin(\alpha - \beta)]}{\cos\alpha - 1 - \mu \sin\beta}.$$

В частном случае, когда $p_0=0$ ($\mu=0$), получим

$$K_0 = \frac{\gamma^2 - \cos\alpha}{\gamma^2 \cos\alpha - 1}.$$

Полученное выражение совпадает с результатом по гипотезе Сорокина [2].

Если принять $\alpha=0$, то из (11) получим случай гипотезы Фойхта [3]:

$$K_0|_{\alpha=0} = \frac{\gamma^4 + \mu^2 + \mu \sin\beta - \gamma^2 - 2\gamma^2 \mu \sin\beta}{\gamma^2 (\gamma^2 - 1 - \mu \sin\beta)}$$

или

$$K_0|_{\alpha=0} = 1 + \frac{\mu [\mu + (1 - \gamma^2) \sin\beta]}{\gamma^2 (\gamma^2 - 1 - \mu \sin\beta)}.$$

Перейдем к определению напряжений при принятой реологической модели.

Принимая $\varepsilon^* = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$, на основании (1) получим

$$\sigma^* = \varepsilon_0 e^{i\omega t} (\Xi_0 e^{i\alpha} + i\omega\eta_0 e^{i\beta}). \quad (12)$$

Действительная часть выражения (12) представляет собой величину истинного напряжения. Подставляя значения $e^{i\omega t}$, $e^{i\alpha}$ и $e^{i\beta}$, выраженные через тригонометрические функции, после некоторых преобразований получим

$$\sigma = \sigma_0 [\cos(\omega t + \alpha) - \lambda \omega \sin(\omega t + \beta)], \quad (13)$$

где $\lambda = \frac{\eta_0}{E_0}$, $\sigma_0 = E_0 \varepsilon_0$.

Нетрудно убедиться, что (13) можно записать следующим образом:

$$\sigma = \sigma_0 [(\cos \alpha - \lambda \omega \sin \beta) \cos \omega t - (\sin \alpha + \lambda \omega \cos \beta) \sin \omega t]$$

Умножим и разделим правую часть этого равенства на

$$\sqrt{(\cos \alpha - \lambda \omega \sin \beta)^2 + (\sin \alpha + \lambda \omega \cos \beta)^2}.$$

Тогда получим следующее значение напряжения:

$$\sigma = \sigma_0 \sqrt{(\cos \alpha - \lambda \omega \sin \beta)^2 + (\sin \alpha + \lambda \omega \cos \beta)^2} \cdot \cos(\omega t + \gamma), \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{\cos \alpha - \lambda \omega \sin \beta}{\sqrt{(\cos \alpha - \lambda \omega \sin \beta)^2 + (\sin \alpha + \lambda \omega \cos \beta)^2}}, \\ \sin \gamma &= \frac{\sin \alpha + \lambda \omega \cos \beta}{\sqrt{(\cos \alpha - \lambda \omega \sin \beta)^2 + (\sin \alpha + \lambda \omega \cos \beta)^2}}. \end{aligned}$$

Из (14) определим отношение максимального напряжения к σ_0 :

$$\theta = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0} = \sqrt{(\cos \alpha - \lambda \omega \sin \beta)^2 + (\sin \alpha + \lambda \omega \cos \beta)^2}$$

или

$$\theta = \sqrt{1 + 2\lambda \omega \sin(\alpha - \beta) + \lambda^2 \omega^2}. \quad (15)$$

Рассмотрим случай малых α и β . Примем, что

$$E^* = E_0(1 + i\alpha), \quad \eta^* = \eta_0(1 + i\beta), \quad \varepsilon^* = \varepsilon_0 e^{i\omega t}.$$

Следовательно, (*) запишется следующим образом:

$$\sigma^* = E^* \varepsilon^* + \eta^* \dot{\varepsilon}^* = \sigma_0 e^{i\omega t} [(1 - \beta \lambda \omega) + i(\alpha + \lambda \omega)].$$

Действительную часть этого выражения обозначим через σ_M , которая представляет собой величину напряжений при малых α и β :

$$\sigma_M = \sigma_0 [(1 - \beta \lambda \omega) \cos \omega t - (\alpha + \lambda \omega) \sin \omega t]. \quad (16)$$

После некоторых преобразований получим

$$\sigma_M = \sigma_0 \sqrt{(1 - \beta \lambda \omega)^2 + (\alpha + \lambda \omega)^2} \cdot \cos(\omega t + \gamma_M), \quad (17)$$

где $\cos \gamma_M = \frac{1 - \beta \lambda \omega}{\sqrt{(1 - \beta \lambda \omega)^2 + (\alpha + \lambda \omega)^2}}, \quad \sin \gamma_M = \frac{\alpha + \lambda \omega}{\sqrt{(1 - \beta \lambda \omega)^2 + (\alpha + \lambda \omega)^2}}.$

Из (17) определим величину $\sigma_M^{\max}$:

$$\sigma_M^{\max} = \sigma_0 \sqrt{(1 - \beta \lambda \omega)^2 + (\alpha + \lambda \omega)^2}.$$

Значит, $\theta_M = \frac{\sigma_M^{\max}}{\sigma_0} = \sqrt{(1 - \beta \lambda \omega)^2 + (\alpha + \lambda \omega)^2}.$

Пренебрегая α^2 и β^2 по отношению к единице, получим

$$\theta_M = \sqrt{1 + 2\lambda\omega(\alpha - \beta) + \lambda^2\omega^2}. \quad (18)$$

Нетрудно видеть, что формулы (17) и (18) (случай малых α и β) можно получить из общего случая, то есть из (14) и (15), принимая в них $\sin \alpha = \alpha$, $\sin \beta = \beta$, $\cos \alpha = 1$, $\cos \beta = 1$, $\sin(\alpha - \beta) = \alpha - \beta$.

Таким образом, изменение напряжений по принятой реологической модели определится по формуле (15), а при малых α и β - по формуле (18).

Отметим, что для количественной оценки влияния затухания на величину напряжений по принятой модели необходимо установить значения параметров μ , λ , α , β и т.д., входящих в полученные формулы.

Не останавливаясь на подробностях выбора этих параметров, приведем результаты некоторых вычислений по формуле (15), которые сведены в таблицу.

Таблица

Значения (по формуле (15)

$\alpha - \beta$ $\lambda \omega$	30; 150	60; 120	90	180	210; 330	240; 300	270
0	1	1	1	1	1	1	1
0,1	1,053	1,088	1,100	1,005	0,954	0,915	0,900
0,2	1,114	1,185	1,200	1,020	0,917	0,883	0,800
0,3	1,179	1,236	1,300	1,044	0,889	0,755	0,700
0,4	1,249	1,361	1,400	1,077	0,872	0,684	0,600
0,5	1,323	1,455	1,500	1,118	0,866	0,620	0,500
0,6	1,400	1,549	1,600	1,166	0,872	0,506	0,400
0,7	1,480	1,644	1,700	1,221	0,889	0,527	0,300
0,8	1,562	1,604	1,800	1,281	0,917	0,504	0,200
0,9	1,646	1,835	1,900	1,345	0,594	0,501	0,100
1,0	1,732	1,932	2,000	1,414	1,000	0,518	0,090

Как видно из таблицы, не всегда принятая реологическая модель приводит к уменьшению максимальных напряжений. Это в основном зависит от величин исходных параметров. Однако при их правильном выборе имеет место заметное уменьшение напряжений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Назаров А.Г.** Метод инженерного анализа сейсмических сил. - Ереван: Изд. АН АрмССР, 1959.-315 с.
2. **Дарбинян С.С.** Оценка неупругого сопротивления при сейсмических колебаниях // Сейсмостойкое строительство.- М., 2004.- С. 34 - 36.
3. **Дарбинян С.С.** Об учете сил сопротивления при сейсмических колебаниях // Известия строителей Армении.- Ереван, 2004.- N2.- С. 29 - 31.

ЕрГУАС. Материал поступил в редакцию 22.06.2004.

Ս.Ս. ԴԱՐԲԻՆՅԱՆ

ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵԿ ՌԵՈԼՈԳԻԱԿԱՆ ՍՈՂԵԼԻ ՄԱՍԻՆ

Դիտարկվում են առաձգական համակարգի տատանումները լրացուցիչ, ոչ գծային դիմադրության առկայության դեպքում: Ստացված են արտաքին և ներքին ուժերի ու դրանց հարաբերության փոփոխման օրենքները, առավելագույն լարումների հաշվման բանաձևեր: Թվային օրինակի միջոցով ցույց է տրված, որ նշված մոդելի ճիշտ կիրառումը կարող է հանգեցնել լարումների զգալի փոքրացման:

Առանցքային բառեր. մոդել, ռեոլոգիա, լարում, դիմադրություն, տատանում:

S.S. DARBINYAN

ON RHEOLOGICAL MODEL OF VIBRATIONS THEORY

Vibrations of the elastic system in case of additional nonlinear resistance are considered. We get the variation laws of inner and outer forces and their connections. The formula for the calculation of maximum exertion is obtained. It is shown through a digital example that in case of correct usage of the abovementioned model a considerable reduction of tension may occur.

Keywords: model, reology, tension, resistance, vibration.