

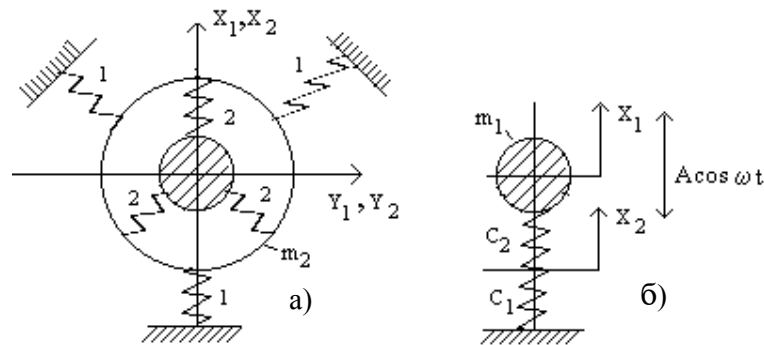
Г.Г. ШЕКЯН, А.П. ХАЛАТЯН, Э.П. ХАЛАТЯН, Р.П. ХАЛАТЯН

СУБГАРМОНИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В РОТОРНЫХ МАШИНАХ

Рассмотрена возможность возникновения субгармонических резонансов в системе ротор-подшипник качения - упругие подвески. Показано, что при вращении вала на подшипниках качения на упругих подвесках могут возникнуть субгармонические резонансы $1/2$ и $1/3$ порядков, фазовые портреты которых аналогичны фазовому портрету, полученному Т. Хаяси. В этом случае, кроме субгармонических колебаний, могут возникнуть и так называемые комбинационные колебания.

Ключевые слова: субгармонический резонанс, упругий подшипник, характеристика жесткости, коэффициент жесткости, нелинейная жесткость, неуравновешенность ротора, радиальный зазор.

Рассмотрим субгармонические колебания в системе ротор-упругий подшипник (рис.



1).

Рис.1. Расчетная динамическая модель подшипников узла:

а - схема подшипникового узла в линейном упругом поле;

б - динамическая модель ротора с упругим подшипниковым узлом

Упругую характеристику всей опоры представим в виде

$$P(x_1) = C_1 x_1 + C' x_1^3,$$

где $C' = C_1/k$ - малая величина.

Пренебрегая колеблющейся массой опоры M_2 , запишем уравнение колебаний системы в виде

$$M_1 \ddot{x} + C_1 x_1 + C^* x_1^3 = H \cos \omega t. \quad (1)$$

Возмущающее усилие H пропорционально квадрату угловой скорости: $H = M e \omega^2$, где $M e$ - неуравновешенность ротора.

Введем новые переменные: $x_1/\delta = \xi$ (δ - радиальный зазор в подшипнике); $H/M_1 = h$; $C'\delta^2/M_1 = y$; $C_1/M_1 = \omega_0^2$.

Уравнение (1) в безразмерных величинах запишется в виде

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi + \gamma \xi^3 = h \cos \omega t, \quad (2)$$

где ω_0 – собственная частота линейной системы с жесткостью упругого поля C_1 ; γ – малый параметр.

Рассмотрим возможность возбуждения в системе (2) субгармоники порядка 1/2. Предположим, что основная частота субгармонических колебаний в системе со слабой нелинейностью близка к собственной частоте системы ω_0 .

Так как рассматриваются колебания порядка 1/2, то возмущающее усилие (частота вращения ротора) должно быть в два раза выше частоты субгармоники [1].

Решение уравнения (2) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0(t) + \gamma \xi_1(t), \\ \omega_1^2 &= \omega_0^2 + \gamma b_1(\lambda_1; \lambda_2). \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2) и пренебрегая членами, содержащими γ в степени выше первой, получим

$$\ddot{\xi}_0 + \gamma \ddot{\xi}_1 + \omega_1^2 \xi_0 + \gamma \omega_1^2 \xi_1 - \gamma b_1 \xi_0 + \gamma \xi_0^3 = h \cos 2\omega_1 t. \quad (4)$$

Порождающее решение найдем из уравнения

$$\ddot{\xi}_0 + \omega_1^2 \xi_0 = h \cos 2\omega_1 t. \quad (5)$$

Тогда

$$\xi_0 = \lambda_1 \cos 2\omega_1 t + \lambda_2 \cos \omega_1 t. \quad (6)$$

В (6) λ_2 – амплитуда субгармонической составляющей, а амплитуду составляющей основной частоты получим после подстановки решения (6) в (5). Приравнявая коэффициенты при $\cos 2\omega_1 t$, получим

$$\lambda_1 = -h / (3\omega_1^2). \quad (7)$$

Порождающее решение (6) соответствует линейной консервативной системе, описываемой уравнением (2) при $\gamma = 0$. При этом первое слагаемое описывает вынужденные колебания, а второе – свободные незатухающие колебания при $\xi = 0$ и $t_0 = 0$.

В линейной системе справедлив принцип суперпозиции, и нет никакого соотношения между частотами обоих колебаний (3). В нелинейной системе при $\gamma = 0$ на частоты колебаний и их амплитуды налагаются определенные ограничения. Поправочный член к решению получим из уравнения (4), выделив члены с малым параметром γ :

$$\ddot{\xi} + \omega_1^2 \xi_1 = b_1 \xi_0 - \xi_0^3. \quad (8)$$

Это уравнение после подстановки в правую часть порождающего решения примет вид

$$\begin{aligned}
\ddot{\xi}_1 + \omega_1^2 \xi_1 = & \left(b_1 - \frac{3}{2} \lambda_1^2 - \frac{3}{4} \lambda_2^2 \right) \lambda_2 \cos \omega_1 t + \\
& + \left(b_1 - \frac{3}{4} \lambda_1^2 - \frac{3}{2} \lambda_2^2 \right) \lambda_1 \cos 2\omega_1 t - \left(\frac{3}{4} \lambda_1^2 - \frac{1}{4} \lambda_2^2 \right) \lambda_2 \cos 3\omega_1 t - \\
& - \frac{3}{4} \lambda_1 \lambda_2^2 - \frac{3}{4} \lambda_1 \lambda_2^2 \cos 4\omega_1 t - \frac{3}{4} \lambda_1^2 \lambda_2 \cos 5\omega_1 t - \frac{1}{4} \lambda_1^3 \cos 6\omega_1 t.
\end{aligned} \quad (9)$$

Решение (9) из-за наличия в правой части слагаемого, включающего собственную частоту системы, имеет вековой член. Однако бесконечный ряд по степеням γ , в котором решение $\xi(t)$ различно, представляет собой ограниченную функцию [2]. Поэтому необходимо исключить вековой член, потребовав, чтобы

$$b_1 = \frac{3}{4} (2\lambda_1 + \lambda_2^2). \quad (10)$$

Подставив (10) в (3), получим

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4} \gamma (2\lambda_1^2 + \lambda_2^2).$$

Подставив значение λ_1 , окончательно будем иметь

$$\omega_1^6 - \omega_1^4 \omega_0^2 = \frac{3}{4} \gamma \left(\frac{2}{g} h^2 + \lambda_2^2 \omega_1^4 \right). \quad (11)$$

Уравнение (11) дает искомую зависимость между амплитудой субгармонического колебания и частотой. Возмущающая сила пропорциональна квадрату угловой скорости, т.е. $h = \frac{H}{M_1 \delta} = \frac{e}{\delta} \omega^2 = \varepsilon \omega_1^2$. С учетом этого из (11) получим выражение для амплитуды субгармонической составляющей:

$$\lambda_2 = \omega_0 \sqrt{\left(\Omega_1^2 - 1 - \frac{8}{3} \gamma \frac{\varepsilon^2}{\omega_0^2} \right) \frac{4}{3} \frac{1}{\lambda}}, \quad (12)$$

где $\Omega_1 = \omega_1 / \omega_0$ - относительная частота субгармонических колебаний.

Отсюда найдем минимальную частоту, при которой существуют субгармонические колебания порядка 1/2:

$$\Omega_{\min} = \sqrt{1 + \frac{8}{3} \gamma \frac{\varepsilon^2}{\omega_0^2}}. \quad (13)$$

Из (13) следует, что возможные значения частоты субгармонических колебаний в случае с упругим подшипником немного больше собственной частоты линейной системы и зависят от относительной неуровновешенности ротора $\varepsilon = e / \delta$.

Зависимости амплитуды субгармонических колебаний γ_2 от относительной частоты Ω_1 представлены на рис. 2.

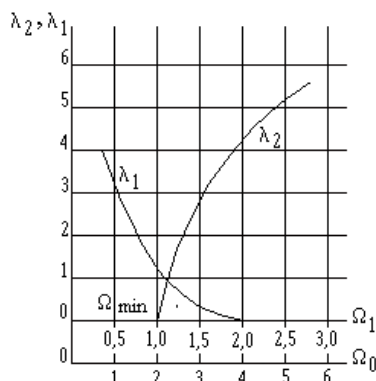


Рис.2. Амплитудно-частотная характеристика субгармонических колебаний порядка 1/2 ротора на упругих подшипниках

Амплитудно-частотная характеристика построена для $\varepsilon = 1$ и $\lambda = \frac{4}{3} \frac{\omega_0^2}{\lambda} = 10$. Здесь же построено изменение амплитуды λ_1 основной частоты. Субгармонические колебания в рассматриваемой системе с упругим подшипником имеют резонансный характер. При этом частота возникновения субгармоники почти совпадает с удвоенной собственной частотой системы ротор-опора. Так же, как и в случае основного резонанса, рост амплитуды при субгармоническом резонансе ограничивается демпфированием, а при достаточно большом сопротивлении – субгармонические колебания вообще не могут существовать [3].

Как следует из уравнения (9), при вычислении поправки первого порядка появляются добавочные составляющие с частотами $3\omega_1$, $4\omega_1$, $5\omega_1$ и $6\omega_1$. При решении эти составляющие были отброшены, поэтому форма колебаний ротора может включать и некоторые из этих частот.

Еще одним вероятным режимом колебаний может быть режим, сопровождающийся субгармоникой порядка 1/3. Зона возбуждения этой субгармоники соответствует скорости вращения $\omega = 3\omega_0$ [4].

При скоростях вращения, равных двойной и тройной собственной частоте ротора на упругих подшипниках, возможно появление субгармонических резонансов. При этом прецессия ротора не является круговой, что особенно важно для установок, требующих прецизионности вращения, у которых зона рабочих скоростей не должна совпадать с указанными частотами.

Субгармонические колебания порядка 1/2 были обнаружены при решении задачи движения вертикального статически и динамически неуравновешенного ротора на упругих подшипниках качения.

За исходную динамическую модель принималась система с радиальным зазором в подшипнике. Жесткостная характеристика представляет собой кусочно-непрерывную функцию радиального перемещения ротора по типу характеристик, рассчитанных для упругого шарикоподшипника.

Субгармонические колебания наблюдались и при моделировании системы с предварительным осевым натягом, причем зона существования субгармоник располагалась за второй критической скоростью как в случае преднатяга, так и в случае зазора (моделировался ротор с двумя упругими опорами). Область существования субгармонических колебаний распространялась до $\omega = 1,8\omega_1$, где ω_1 – первая критическая скорость ротора. Было выделено два вида колебаний – установившееся и неустойчивое.

На рис. 3 приведен график неустойчивого движения для $\omega = 1,65\omega_1$.

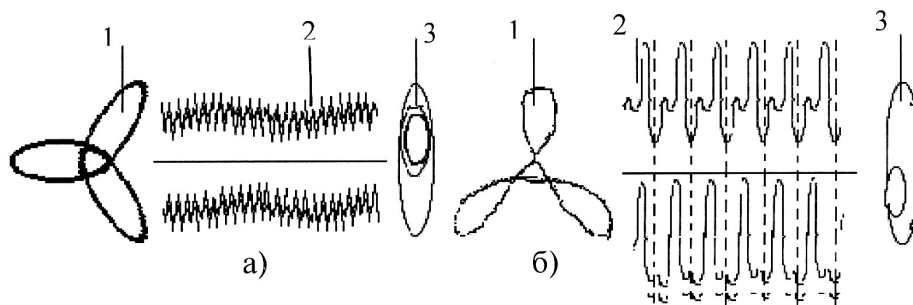


Рис.3. Субгармонические колебания порядка $1/2$ ротора в двух упругих шарикоподшипниках: а – неустойчивый режим колебания, б – установившийся режим

На рис.3 а представлены: 1- траектория движения шипа ротора, полученная на плоскости координат y и z ; 2- осциллограмма колебаний того же типа по двум координатным осям y и z ; 3 - фазовая траектория движения этого же шипа в координатах y и $\dot{y}$, снятая с экрана осциллографа. На рис. 3 б даны те же характеристики на установившемся режиме колебания при $\omega = 1,69\omega_1$.

Отличие заключается в том, что на неустойчивом режиме присутствует некоторая переменная составляющая с малой частотой изменения. Эта частота прецизионного движения ротора равна $(3/2)\omega$.

Следовательно, центр шипа описывает траекторию, показанную на рис. 3 (за два оборота ротора – один общий центр шипа вокруг оси подшипника).

Фазовый портрет системы аналогичен фазовому портрету, полученному аналитически в [2] для системы, описываемой уравнением Дуффинга, как на установившемся, так и на неустойчивом режиме.

В [2] отмечено, что подобная фазовая траектория проходится системой за удвоенный период возмущающей силы, т.е. за два оборота ротора. При

опоре вращения вала на подшипники качения, кроме субгармонических, могут возникнуть и так называемые комбинационные колебания, период которых также связан с нелинейной жесткостью подшипника [4].

Таким образом, получены условия возникновения субгармонических резонансов и комбинационных колебаний. Результаты исследований могут быть использованы при проектировании высокоскоростных роторных машин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Блакер О.** Анализ нелинейных систем. – М.: Мир., 1969.- 400 с.
2. **Хаяси Т.** Нелинейные колебания в физических системах. – М.: Мир, 1968.- 432 с.
3. **Ямомото Т.** О субгармонических и гармонических колебаниях вращающихся валов // Сб. переводов. Механика. - 1963.- ¹ 4.- С.61-73.
4. **Шекян Г.Г.** Динамика роторных машин. – Ереван: Изд. НАН РА “Гитутюн”, 2004.- 329 с.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 17.09.2004.

Հ.Գ. ՇԵԿՅԱՆ, Հ.Պ. ԽԱԼԱԹՅԱՆ, Է.Պ. ԽԱԼԱԹՅԱՆ, Ռ.Պ. ԽԱԼԱԹՅԱՆ

ՍՈՒԲՀԱՐՄՈՆԻԿ ՌԵԶՈՆԱՆՍԸ ՌՈՏՈՐԱՑԻՆ ՄԵՔԵՆԱՆԵՐՈՒՄ

Դիտարկված է ռոտոր-զլորման առանցքակալ-առաձգական կախոց համակարգում սուբհարմոնիկ ռեզոնանսի առաջացման հնարավորությունը: Ցույց է տրված, որ առաձգական հենարանով լիսեռը զլորման առանցքակալների վրա պտտվելիս կարող են առաջանալ 1/2 և 1/3 կարգի սուբհարմոնիկ տատանումներ, որոնց ֆազային նկարագիրը նույնն է, ինչպիսին ստացված է Տ.Խայասու մոտ, ինչպես նաև, այսպես կոչված, համակցված տատանումներ:

Առանցքային բառեր. սուբհարմոնիկ ռեզոնանս, առաձգական առանցքակալ, կոշտության բնութագիր, կոշտության գործակից, ոչ գծային կոշտություն, ռոտորի անհավասարակշռություն, շառավղային բացակ:

**H.G. SHEKYAN, H.P. KHALATYAN, E.P. KHALATYAN,
R.P. KHALATYAN**

SUBHARMONIC RESONANCE IN ROTOR MACHINES

The possibility to energize subharmonic resonances in the system rotor–rolling-bearing-suspensions is considered. It is shown that when the shaft on the rolling bearings on elastic suspensions rotates, the subharmonic resonances of the 1/2 and 1/3 order emerge and their phase portraits are similar to phase portraits obtained by T. Hayasi. In this case besides the subharmonic oscillations the so-called combined oscillations may arise as well.

Keywords: subharmonic resonance, elastic bearing, characteristics of toughness, coefficient of toughness, nonequilibrium of rotors, radial gap.