ISSN 0002-306X. Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2005. Т. LVIII, № 3.

УДК 62-503:622-17

АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

М.В. ГЕВОРГЯН, Г.Т. КИРАКОСЯН

# ДИНАМИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕРАБОТКИ ТЕХНОГЕННОГО РЕСУРСА

Разработана динамическая экономико-математическая модель. Дано программное обеспечение алгоритма решения задачи оптимальной переработки техногенного ресурса для организации производства множества видов дефицитной продукции региона. Предложено решение задачи на основе метода Эйлера-Лагранжа, доказаны теоремы оптимальности принятых решений.

***Ключевые слова:*** динамическая математическая модель, программное обеспечение, метод Эйлера-Лагранжа, техногенный ресурс.

**Постановка задачи.** Пусть имеется некое хвостохранилище накопленного техногенного ресурса и технологически возможно из него произвести новые виды продукции [1-3], на которые имеется спрос. Необходимо обосновать оптимальные технико-экономические показатели строящихся предприятий по переработке техногенного ресурса с учетом фактора времени и ограничений на спрос новой продукции, капитальные вложения и имеющиеся объемы техногенного ресурса.

**Математическая формализация задачи.** В разработанной динамической математической модели задачи предлагается использовать критерий максимума суммарной прибыли от переработки техногенного ресурса и реализации новых видов продукции за весь промежуток времени $[0,T]$ в зависимости от объема выпуска $i$-й продукции ($\varphi_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, где $n$- количество разнотипной выпускаемой продукции) [4, 5]. В качестве ограничений необходимо учесть: скорость изменения объема переработки техногенного ресурса во времени; начальный объем накопленного техногенного ресурса в хвостохранилище ($V_0$); объем производства $i$-й продукции из техногенного ресурса; суммарные затраты на организацию новых предприятий не должны превышать сумму выделенных капитальных вложений.

С учетом вышеизложенного решаемую задачу можно математически сформулировать следующим образом:

целевая функция -

$$\max_{\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t),T} \int_0^T e^{-\omega t} \sum_{i=1}^{n} (\Gamma_i(t) - \Psi_i(\varphi_i(t)))\varphi_i(t)dt\,; \tag{1}$$

ограничения -

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(t), \tag{2}$$

$$V(0) = V_0, \quad V(T) \ge 0, \tag{3}$$

$$v_{1i}(t) \le \varphi_i(t) \le v_{2i}(t), \quad i = \overline{1,n}, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} G_i(\varphi_i(t)) \le D. \tag{5}$$

Здесь $\varphi_i(t)$ - объем выпуска $i$-й продукции при переработке техногенного ресурса, $i = \overline{1,n}$; $\Psi_i(\varphi_i(t))$ - себестоимость единицы объема выпуска $i$-й продукции ($i = \overline{1,n}$), которая вычисляется по формуле $\Psi_i(\varphi_i(t)) = k_{0i} + k_{1i}\varphi_i(t) + k_2/\varphi_i(t)$, где $k_{0i}$, $k_{1i}$, $k_{2i}$ - положительные коэффициенты, определяемые с помощью регрессионного анализа [4]; $V(t)$ - текущий объем техногенного ресурса в момент времени $t$; $C_i$ - доля техногенного ресурса в единице объема выпуска $i$-й продукции ($i = \overline{1,n}$); $T$ - значение конечного времени производства, т.е. промежуток времени, в течение которого производство завершается; $v_{1i}(t), v_{2i}(t)$ - текущие минимальный и максимальный объемы выпуска $i$-й продукции в момент времени $t$ ($i = \overline{1,n}$), где $v_{2i}(t)$ - текущая потребность региона в продукции, а $v_{1i}(t)$ - текущий минимальный объем спроса производства, ниже которого эксплуатация $i$-го предприятия становится нерентабельной, также известно, что $v_{1i}^* \equiv \min\{v_{1i}(t) / t \in [0, +\infty]\}$; $\Gamma_i(t)$ - стоимость реализации единицы объема $i$-й выпускаемой продукции ($i = \overline{1,n}$) в момент времени $t$, а на промежутке времени $t \in [0, T_{max}]$ известен минимальный размер $h_{min}$ временного интервала, в котором $\Gamma_i(t)$ - или возрастающая, или убывающая функция, а если $\Gamma_i(t)$ постоянная, то $h_{min} = T_{max}$, где $T_{max} = V_0 / \sum_{i=1}^{n} C_i v_{1i}^*$; $G_i(\varphi_i(t))$ - затраты на организацию производства для выпуска $i$-й продукции ($i = \overline{1,n}$), известно, что график функций $G_i(\varphi_i(t))$ имеет ступенчатый вид (рис. 1); $\omega$ - постоянная скидки объема выпуска продукции; $D$ - общая сумма выделенных капитальных вложений для постройки новых предприятий по переработке техногенного ресурса.

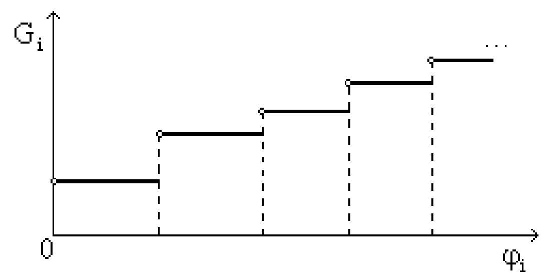


Рис. 1. Затраты на организацию производства $i$-й продукции от объема выпуска

Зависимость удельной себестоимости выпуска $i$-й продукции $\Psi_i(\varphi_i(t))$ от объема выпуска представлена на рис. 2.

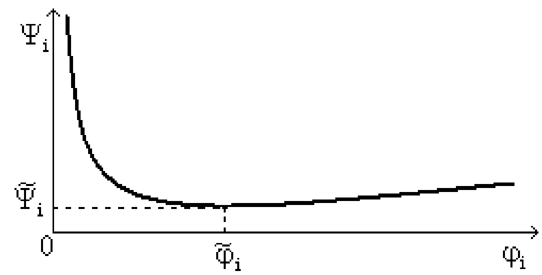


Рис. 2. Зависимость удельной себестоимости выпуска $i$-й продукции от объема выпуска

Минимальная удельная себестоимость $\widetilde{\Psi}_i$ выпуска $i$-й продукции достигается при $\widetilde{\varphi}_i$, величина которой определяется из выражения $\Psi'_{i\varphi} = 0$, и равна $\widetilde{\varphi}_i = (k_{2i} / k_{1i})^{1/2}$, где $\Psi'_{i\varphi} = k_{1i} - k_{2i} / \varphi_i^{\,2}$.

Обозначим через $\widetilde{\varphi}_i^* \equiv \arg\min\{\Psi_i(\varphi_i(t)) / \, v_{1i}(t) \le \varphi_i(t) \le v_{2i}(t), t \in [0,T]\}$ - объем выпуска $i$-й продукции, при котором удельная себестоимость выпускаемой продукции минимальная.

Очевидно, что $\widetilde{\varphi}_i^* = \min\{v_{1i}(t), v_{2i}(t) / \, t \in [0,T]\}$, если $\widetilde{\varphi}_i < v_{1i}(t)$ или $v_{2i}(t) < \widetilde{\varphi}_i$ для всех $t \in [0,T]$, и $\widetilde{\varphi}_i^* = \widetilde{\varphi}_i$, если $v_{1i}(t) < \widetilde{\varphi}_i < v_{2i}(t)$, $t \in [0,T]$.

Для целесообразного выпуска новых видов продукции при переработке техногенного ресурса необходимо выполнение неравенства $\Gamma_i(t) \ge \Psi_i(\varphi_i(t)), t \in [0, T_{max}]$, где $i = \overline{1,n}$.

**Решение задачи.** Перед тем как описать разработанный алгоритм решения модели (1)-(5), рассмотрим решение модели задачи без ограничения на капитальные затраты (5). В этом случае модель задачи примет вид (1)-(4).

Решение модели (1)-(4) предлагается провести при помощи обобщенного метода Лагранжа (Эйлера-Лагранжа) [5,6]. Прежде покажем, что решение данной модели не будет оптимальным, если имеющиеся объемы техногенного ресурса не будут полностью исчерпаны к концу оптимального времени производства $T$.

**Теорема 1.** При оптимальном конечном времени $T$ справедливо условие $V(T)=0$, если $\Gamma_i(t) > \Psi_i(\tilde{\varphi}_i^*)$ .

**Доказательство.** Допустим, что имеется такая оптимальная стратегия переработки техногенного ресурса, при которой не все ресурсы исчерпываются в оптимальном конечном времени $T$ (т.е. $V(T) > 0$). В этом случае существует такое лучшее решение, при котором в интервале $[0, T]$ сохраняется то же самое решение, а к моменту конечного времени $T$ выпуск продукции еще не завершен. Легко проверить, что в интервале $[T,\ T + V(T) / \sum_{i=1}^{n} C_i \tilde{\varphi}_i^*]$ получается положительное значение прибыли $(\Gamma_i - \Psi_i(\tilde{\varphi}_i^*))\tilde{\varphi}_i^*$. Из описанного однозначно следует, что нет такой оптимальной стратегии выпуска новых видов продукции при переработке горного техногенного ресурса, при которой $V(T) > 0$.

Таким образом, теорема 1 доказана.

Определим функцию Гамильтона для модели (1)-(4):

$$H = \lambda_0 \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t)(\Gamma_i(t) - \Psi_i(\varphi_i(t))) - \lambda(t) \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(t) \ , \qquad (6)$$

где $\lambda_0$ – начальное значение присоединяемой переменной функции Гамильтона, которое равно 1 [5]; $\lambda(t)$ - текущее значение присоединяемой переменной функции Гамильтона.

Определим также функцию Лагранжа для задачи (1)-(4):

$$L = H + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)(\varphi_i(t) - v_{1i}(t)) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(t)(v_{2i}(t) - \varphi_i(t)), \qquad (7)$$

где $\alpha_i(t)$ и $\beta_i(t)$ - текущие значения присоединяемых переменных функции Лагранжа.

Учитывая, что $H'_{\varphi_i} = \left(\Gamma_i(t) - \Psi_i(\varphi_i(t))\right) - \lambda(t) C_i - \varphi_i(t) \Psi'_{\varphi_i}(\varphi_i(t))$, получим $H''_{\varphi_i\varphi_i} = -2\Psi'_{\varphi_i}(\varphi_i(t)) - \varphi_i(t)\Psi''_{\varphi_i\varphi_i}(\varphi_i(t))$. Легко проверить, что $H''_{\varphi_i\varphi_i} = -2k_{1i}$, следовательно, всегда $H''_{\varphi_i\varphi_i} < 0$.

Учитывая, что $\Psi_i(\varphi_i(t)) = k_{0i} + k_{1i}\varphi_i(t) + k_{2i} / \varphi_i(t)$, можно записать $L'_{\varphi_i} = H'_{\varphi_i} + \alpha_i(t) - \beta_i(t) = -2k_{1i}\varphi_i(t) - C_i\lambda(t) + \Gamma_i(t) - k_{0i} + \alpha_i(t) - \beta_i(t)$.

Из обобщенного метода Лагранжа [5] имеем

$$L'_{\varphi_i} = -2k_{1i}\varphi_i(t) - C_i\lambda(t) + \Gamma_i(t) - k_{0i} + \alpha_i(t) - \beta_i(t) = 0\,, \qquad (8)$$

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = \omega\lambda(t) - L'_V, \tag{9}$$

$$\lambda(0) = 1, \lambda(T) \geq 0, \ \lambda(T)V(T) = 0, \tag{10}$$

$$\alpha_i(t)(\varphi_i(t) - v_{1i}(t)) = 0, \tag{11}$$

$$\alpha_i(t) \geq 0, \tag{12}$$

$$\beta_i(t)(v_{2i}(t) - \varphi_i(t)) = 0, \tag{13}$$

$$\beta_i(t) \geq 0. \tag{14}$$

Для фиксированного значения $T$ условия оптимальности (8)-(14) достаточны при выборе оптимальной стратегии организации производства, т.к. максимизированная функция Гамильтона $H^0 = \max H$ линейная и, следовательно, вогнутая [5, 6].

Учитывая, что $L'_V = 0$, из (9) и (10) имеем

$$\lambda(t) = e^{\omega t}. \tag{15}$$

Допустим, множества $A_1$ и $A_2$ являются соответственно решениями неравенств

$$2k_{1i}v_{1i}(t) + C_i\lambda(t) - \Gamma_i(t) + k_{0i} > 0, \tag{16}$$

$$2k_{1i}v_{2i}(t) + C_i\lambda(t) - \Gamma_i(t) + k_{0i} < 0, \tag{17}$$

где $A_1 \subseteq [0, T_{max}]$ и $A_2 \subseteq [0, T_{max}]$.

Для определения оптимальной стратегии выпуска продукции при переработке техногенного ресурса на основе условий оптимальности (8)-(14) необходимо выявить оптимальную временную траекторию изменения значения объема выпуска.

**Теорема 2.** Временная траектория оптимального значения изменения объема выпуска продукции ($\varphi_i(t)$) при переработке техногенного ресурса имеет вид

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} v_{1i}(t), & \text{если } t \in [0,T] \cap A_1, \\ (-C_i e^{\omega t} + \Gamma_i(t) - k_{0i}) / 2k_{1i}, & \text{если } t \in [0,T] - (A_1 \cup A_2), \\ v_{2i}(t), & \text{если } t \in [0,T] \cap A_2. \end{cases} \tag{18}$$

**Доказательство.** Из условия оптимальности (8)-(14) рассмотрим следующие 4 варианта:

1) при $\alpha_i(t) \neq 0$ и $\beta_i(t) = 0$ с учетом (8), (11) и (12) получаем $L'_{\varphi_i} = 0$, $\varphi_i(t) = v_{1i}(t)$ и $\alpha_i(t) > 0$. Тогда можно записать:
$\alpha_i(t) = 2k_{1i}v_{1i}(t) + C_i\lambda(t) - \Gamma_i(t) + k_{0i}$, $\varphi_i(t) = v_{1i}(t)$, $\alpha_i(t) > 0$. Отсюда имеем $\varphi_i(t) = v_{1i}(t)$, если $2k_{1i}v_{1i}(t) + C_i\lambda(t) - \Gamma_i(t) + k_{0i} > 0$, т.е. $t \in A_1$;

2) при $\alpha_i(t) = 0$ и $\beta_i(t) \neq 0$ с учетом (8), (13) и (14) получаем

$L'_{\varphi_i} = 0$, $\varphi_i(t) = v_{2i}(t)$ и $\beta_i(t) > 0$. Тогда можно записать:
$\beta_i(t) = -2k_{1i}v_{2i}(t) - C_i\lambda(t) + \Gamma_i(t) - k_{0i}$, $\varphi_i(t) = v_{2i}(t)$, $\beta_i(t) > 0$. Отсюда имеем $\varphi_i(t) = v_{2i}(t)$, если $-2k_{1i}v_{2i}(t) - C_i\lambda(t) + \Gamma_i(t) - k_{0i} > 0$, т.е. $t \in A_2$;

3) при $\alpha_i(t) = 0$ и $\beta_i(t) = 0$ с учетом (8) имеем $L'_{\varphi_i} = 0$, из которого определим значение $\varphi_i(t) = (-C_i\lambda(t) + \Gamma_i(t) - k_{0i})/2k_{1i}$, если $t \in [0,T] - (A_1 \cup A_2)$;

4) вариант $\alpha_i(t) \neq 0$ и $\beta_i(t) \neq 0$ не имеет смысла рассматривать, поскольку уже косвенно учтен в вариантах 1 и 2 и представляет собой случай, когда множество $A_1 \cap A_2$ непустое.

Итак, теорема 2 доказана.

**Программное обеспечение.** Теперь представим разработанный алгоритм, по которому можно решить неравенства (16) и (17).

Допустим, имеем некоторую непрерывно и монотонно убывающую функцию $f(x)$, определенную в интервале $x \in [x_1, x_2]$, и известно, что $f(x_1) > 0$, $f(x_2) < 0$. Необходимо определить значение $x^* \in [x_1, x_2]$, при котором $f(x^*) = 0$. Значение $x^*$ можно найти с точностью $\varepsilon$ ($\varepsilon$ - очень маленькое положительное число), применяя простой **алгоритм 1**.

**Алгоритм 1.** Определим текущие параметры алгоритма: $x_1^0 = x_1$; $x_2^0 = x_2$ и $x^i = (x_1^{i-1} + x_2^{i-1})/2$ $(i = 1,2,\dots)$. Если на $i$-ом шаге $f(x^i) > 0$, тогда определим $x_1^i = x^i$ и $x_2^i = x_2^{i-1}$, а если $f(x^i) < 0$, определим $x_2^i = x^i$ и $x_1^i = x_1^{i-1}$ $(i = 1,2,\dots)$. Алгоритм завершает работу только тогда, когда $f(x^i) = 0$ или $x^i - x^{i-1} < \varepsilon$, $|f(x^i) - f(x^{i-1})| < \varepsilon$, в этих случаях $x^* = x^i$.

Чтобы решить неравенство (16), необходимо сначала определить корни уравнения $f(t) \equiv 2k_{1i}v_{1i}(t) + C_i\lambda(t) - \Gamma_i(t) + k_{0i} = 0$, после чего можно легко определить множество $A_1$. Разделим $[0, T_{max}]$ на маленькие интервалы по шагу $h_{min}$, после чего для каждого интервала применим **алгоритм 1** при условии, если на граничных точках этого интервала функция $f(t)$ принимает положительные и отрицательные значения.

Аналогичным образом можно решить также неравенство (17).

Из результата **теоремы 1** имеем $V(T) = 0$. Учитывая (2), можно утверждать, что $V(t)$ - монотонно убывающая функция в интервале $t \in [0, T_{max}]$, кроме того, $V(0) > 0$ и $V(T_{max}) \leq 0$. Для определения значения конечного времени $T$ выпуска продукции также можно применить **алгоритм 1** для функции $V(t)$ в интервале $[0, T_{max}]$, где текущие значения $V(t)$ легко рассчитываются с учетом (2), (3) и (18).

Графическое представление траектории изменения значения объема выпуска продукции $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ от времени приведено на рис. 3.

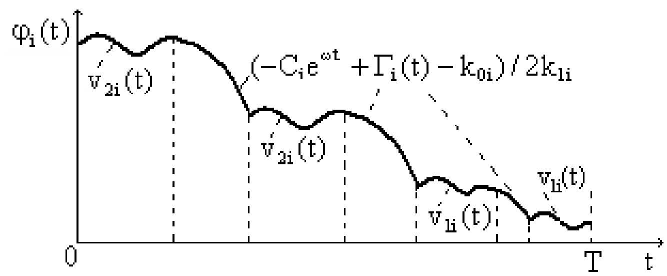


Рис. 3. График изменения объема выпуска $i$-й продукции от времени

Теперь рассмотрим случай, когда сумма капитальных вложений ограничена (5). При этом могут возникнуть ситуации, при которых не все предприятия, которые выпускают новые виды продукции при переработке техногенных ресурсов, могут работать в оптимальном режиме, т.е некоторые предприятия перестанут работать, а другие будут производить продукции меньше, чем предполагалось (максимальный текущий спрос). В этом случае, чтобы найти отпимальную стратегию выпуска продукции, необходимо применить **алгоритм 2**.

**Алгоритм 2**. Учитывая результат **теоремы 2** для случая, когда $T = T_{max}$, из (18) определим значения $\min \varphi_i(t)$ и $\max \varphi_i(t)$. При этом функция $G_i(\varphi_i(t))$ принимает дискретные значения в интервале $[\min \varphi_i(t), \max \varphi_i(t)]$, поскольку имеет ступенчатый вид (рис.1). Допустим, $G_i(\varphi_i(t))$ принимает дискретные значения $g_{i1}, g_{i2}, \ldots, g_{iq(i)}$ в интервале $[\min \varphi_i(t), \max \varphi_i(t)]$, где $g_{i1} < g_{i2} < \ldots < g_{iq(i)}$, $q(i)$ - количество принимаемых дискретных значений.

Имея оптимальное значение $G_i$, однозначно можно определить $\max \varphi_i$ (рис.1), т.е. $\max \varphi_i$ тоже принимает дискретные значения с учетом ограничения (5).

Обозначим через $\overline{G} = (G_1, G_2, \ldots, G_n)$ - вектор капитальных вложений.

На первом шаге **алгоритма 2** принимается, что $G_i(\varphi_i) = g_{iq(i)}$, т.е. имеем вектор $\overline{G} = (g_{1q(1)}, g_{2q(2)}, \ldots, g_{nq(n)})$. В случае, когда $\sum_{i=1}^{n} G_i(\varphi_i) \le D$, значение $\overline{G}$ оптимальное, следовательно, алгоритм завершает работу.

В случае, когда $\sum_{i=1}^{n} G_i(\varphi_i) > D$, рассматриваются следующие $n$ вариантов: $\overline{G} = (g_{1(q(1)-1)}, q_{2q(2)}, \ldots, a_{nq(n)})$; $\overline{G} = (g_{1q(1)}, q_{2(q(2)-1)}, \ldots, a_{nq(n)})$; … $\overline{G} = (g_{1q(1)}, q_{2q(2)}, \ldots, a_{n(q(n)-1)})$. Для каждого варианта рассчитывается значение целевой функции (1). Из этих $n$ значений находим максимум целевой функции. Выбираем вариант, соответствующий максимуму целевой функции. Если имеется несколько вариантов, при которых достигается один и тот же максимум целевой функции (1), тогда алгоритм продолжает работу для каждого из них отдельно, а из окончательных решений выбирается самое лучшее. Таким образом, **алгоритм 2** на каждом шаге исключает один из компонентов текущего вектора $\overline{G}$ и заменяет его более оптимальным значением. Если на некотором шаге исключается $g_{i1}$, $i = \overline{1,n}$, тогда принимается, что производство $i$-й продукции прекращается.

Многократно применяя вышеописанные операции над текущим значением $\overline{G}$, **алгоритм 2** определит оптимальный вектор капитальных вложений, следовательно, и оптимальные значения $\max \varphi_i$, $i = \overline{1,n}$. Окончательный вариант $\varphi_i(t)$ решения задачи (1)-(5) определяется на основе **алгоритма 1**, а новое значение $T$ - согласно описанному ранее методу.

График оптимального решения $\varphi_i(t)$ задачи (1)-(5) приведен на рис. 4.

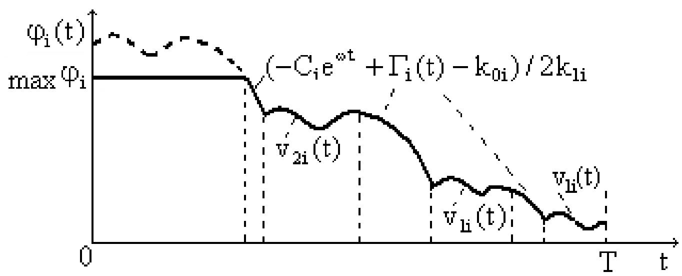


Рис. 4. График изменения объема выпуска $i$-й продукции

Учитывая окончательные значения функций $\varphi_i(t)$, разработан прикладной программный пакет **DTechMultiProduction** решения задачи при помощи модели (1)-(5) с применением **алгоритма 1** и **алгоритма 2**.

Проведенные на основе численного примера [3] вычисления с помощью прикладного пакета **DTechMultiProduction** показали результат, адекватный описанному в [3], что также экспериментально подтверждает эффективность разработанной математической модели и алгоритмов при решении типовых задач обоснования и оптимальной переработки техногенных ресурсов различных отраслей.

Работа выполнена в рамках госбюджетного исследовательского проекта “Разработка и внедрение диалоговой автоматизированной системы оптимального

управления техногенными ресурсами Республики Армения”, шифр ¹ 0435.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Бадалян М.Г.** Комплексное использование отходов добычи и обработки вулканического сырья для производства строительных материалов: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук / МХТИ. - М., 1991. – 42 с.
2. **Хамитов Р.А., Чернов А. П., Меньшиков В. Г.** Анализ состояния отходов добычи и обогащения твердого минерального сырья. Методы и пути переработки техногенных месторождений // Башкир. экол. вестник. – 2000. - N 3. - С. 8-11.
3. **Адеева Л.Н.** Научные и практические основы экологических технологий комплексной переработки производственных отходов в крупном промышленном регионе / Иркут. гос. техн. ун-т. - Иркутск, 2002. – 32 с.
4. **Киракосян Г.Т.** Методы оптимального проектирования схем утилизации промышленных отходов: Автореф. дис. … д-ра техн. наук. -Ереван, 2000. – 32 с.
5. **Feichtinger G., Hartl R. F.** Optimale Kontrolle okonomischer Prozesse // Anwendungen des Maximumprinzips in den Wirtschaftswissenschaften de Gruyter. -Berlin, 1986.-681 p.
6. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976. – 392с.



ГИУА. Материал поступил в редакцию 18.03.2005.



Մ.Վ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ, Գ.Տ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ


## ՏԵԽՆԱԾԻՆ ՊԱՇԱՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ՎԵՐԱՄՇԱԿՄԱՆ ԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՄՈԴԵԼ ԵՎ ԾՐԱԳՐԱՅԻՆ ԱՊԱՀՈՎՈՒՄ


Նախագծված է տեխնածին պաշարի օպտիմալ վերամշակման տնտեսական մաթեմատիկական դինամիկական մոդել և խնդրի լուծման ալգորիթմի ծրագրային ապահովում՝ տարածաշրջանում բազմաթիվ դեֆիցիտ ապրանքների արտադրության կազմակերպման համար: Ներկայացված է խնդրի լուծումը՝ հիմնված Էյլեր-Լագրանժի մեթոդի վրա, ապացուցված են լուծման օպտիմալության մասին թեորեմներ:



**M.V. GEVORGYAN, G.T. KIRAKOSSIAN**


## DYNAMIC MATHEMATICAL MODEL AND SOFTWARE FOR TECHNOGENE RESOURCE OPTIMUM UTILIZATION


A dynamic economical and mathematical model is developed. The problem solving algorithm software of technogene resource optimum utilization for producing a variety of deficit products in the region is given. The problem solution based on Euler-Lagrange method is presented, decision making optimality theorems are proved.