ISSN 0002-306X. Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2005. Т. LVIII, ¹ 2.

УДК 621-52

АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

О.Н. ГАСПАРЯН, Г.А. АЛЕКСАНЯН

АБСОЛЮТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ МНОГОСВЯЗНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С НОРМАЛЬНЫМИ ПЕРЕДАТОЧНЫМИ МАТРИЦАМИ ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ

На основе метода характеристических передаточных функций рассмотрены многомерные геометрические аналоги известных критериев абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейных многосвязных систем автоматического регулирования с нормальными передаточными матрицами линейной части. Показано, что для нормальных многомерных систем полученные геометрические критерии являются достаточными. Приведены численные примеры расчета на языке MATLAB.

Ключевые слова: нормальная многосвязная система, нелинейная система, характеристические передаточные функции, абсолютная устойчивость, критерий Попова.

Введение. Проблема исследования абсолютной устойчивости нелинейных многомерных систем автоматического регулирования (МСАР) относится к наиболее актуальным проблемам современной теории управления. В настоящее время в данной области можно выделить два фундаментальных направления. Первое из них базируется на классической теории устойчивости Ляпунова и представлении уравнений МСАР в пространстве состояний, а второе - частотное направление - основано на основополагающих статьях румынского ученого В.Н. Попова [1]¸ в которых условия абсолютной устойчивости выражены в виде неравенств, связывающих частотные характеристики линейной части системы с секторными ограничениями, накладываемыми на нелинейные характеристики. В дальнейшем частотные критерии абсолютной устойчивости обычных систем регулирования были обобщены на случай МСАР [2,3]. В [4] впервые был применен метод характеристических передаточных функций (ХПФ), предложенный для анализа линейных систем известным английским ученым А.МакФарлейном и его коллегами [5,6]. В [4] получены необходимые геометрические условия абсолютной устойчивости нелинейных квадратных МСАР общего вида, выраженные непосредственно через характеристические годографы линейной части МСАР, и дано обобщение на многомерный случай таких критериев, как внеосевой круговой, параболический и т.д. [7,8]. В настоящей статье результаты работы [4] распространяются на специальный и важный класс нелинейных МСАР с нормальными (в терминологии теории матриц) передаточными матрицами линейной части. Показано, что для таких систем геометрические условия абсолютной устойчивости положения равновесия, полученные в [4], являются не только необходимыми, но и достаточными. Следует указать, что к нормальным МСАР относятся системы с симметричными, антисимметричными, циркулянтными и некоторыми другими типами взаимосвязей, то есть подавляющее большинство описанных в технической литературе реальных многосвязных систем регулирования [9]. Так, к нормальным принадлежат многие системы гироскопических платформ, системы стабилизации спутников вращением, системы управления самонаводящихся ракет, системы активной коррекции составных зеркал астрономических телескопов и т.д.

Полученные результаты имеют простую геометрическую форму и могут служить основой для создания специализированных графических интерфейсов пользователя, предназначенных для компьютерного проектирования МСАР [10]. Данная область приобретает в последние годы большое значение в прикладной теории управления и является объектом пристального внимания многих крупнейших фирм и компаний, таких как The MathWorks Inc. (создателей известного языка для научно-технических расчетов MATLAB), The Wolfram Research Inc. (язык *Mathematica*), EASY5 Product (дочерняя фирма компании Boeing) и т.д.

В заключение приводится численный иллюстрирующий пример анализа нелинейной циркулянтной МСАР с 16 входами и 16 выходами, рассчитанный при помощи языка MATLAB.

1. Каноническое представление нормальных МСАР на базе метода ХПФ. Достаточные условия абсолютной устойчивости. На рис. 1 показана матричная структурная схема N-мерной (то есть имеющей N входов и N выходов) квадратной МСАР с передаточной матрицей линейной части W(s) и диагональной матрицей нелинейностей $F(x) = \mathrm{diag}\{F_i(x_i)\}$, где все нелинейности удовлетворяют секторным ограничениям (рис. 2):

$$0 \le \frac{y_i}{x_i} \le k_i\,, \qquad i = 1, 2,\ldots,N. \tag{1}$$

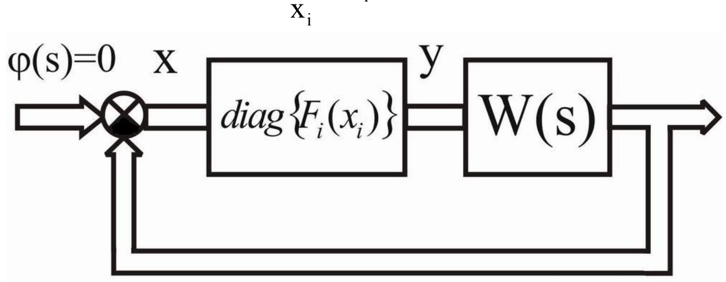

Рис. 1

Как известно [2-4,7], для абсолютной устойчивости положения равновесия $x \equiv 0$ МСАР на рис. 1 достаточно, чтобы существовала диагональная матрица diag{Q_i} с действительными Q_i такая, что для всех частот $\omega \ge 0$ эрмитова матрица

$$\mathrm{Re}\,P(j\omega) = \frac{1}{2}[P(j\omega) + P^*(j\omega)] \tag{2}$$

являлась бы положительно-определенной, где * - символ сопряжения матриц, а $P(j\omega)$ имеет вид

$$P(j\omega) = [I + j\omega \operatorname{diag}\{Q_i\}]W(j\omega) + \operatorname{diag}\{\frac{1}{k_i}\}. \qquad (3)$$

Здесь I – единичная матрица соответствующей размерности.

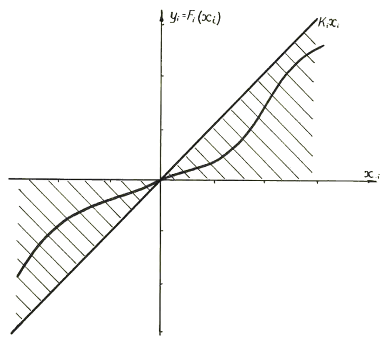

Рис. 2

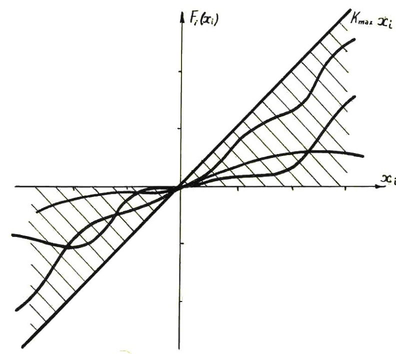

Рис. 3

В соответствии с методом ХПФ передаточная матрица $W(j\omega)$ линейной части МСАР на рис. 1 может быть представлена в следующей канонической форме:

$$W(j\omega) = C(j\omega)\operatorname{diag}\{q_i(j\omega)\}C^{-1}(j\omega), \qquad (4)$$

где $C(j\omega)$ - модальная матрица, составленная из нормированных собственных векторов (осей канонического базиса) матрицы $W(j\omega)$, строки обратной матрицы $C^{-1}(j\omega)$ образуют двойственный базис, а $q_i(j\omega)$ - ХПФ линейной части МСАР, которые для простоты примем различными.

В случае МСАР общего вида число обусловленности $\nu(C(j\omega))$ модальной матрицы $C(j\omega)$ всегда больше единицы и характеризует степень неортогональности осей канонического базиса МСАР.

Введем, как и в [4], единый сектор [0, k_{max}], где $k_{max} = \max(k_i)$, охватывающий все нелинейные характеристики $F_i(x_i)$ (рис. 3), и заменим в (3) диагональную матрицу $\operatorname{diag}\{Q_i\}$ скалярной QI. Тогда, с учетом (4), матрица (3) приводится к диагональному виду в каноническом базисе линейной части МСАР:

$$P(j\omega) = C(j\omega)\operatorname{diag}\{\gamma_i(j\omega)\}C^{-1}(j\omega), \qquad (5)$$

где комплексные собственные значения $\gamma_i(j\omega)$ матрицы $P(j\omega)$ равны

$$\gamma_i(j\omega) = (1 + j\omega Q)q_i(j\omega) + \frac{1}{k_{max}}, \quad i = 1,2,\dots,N. \qquad (6)$$

В [4] показано, что для выполнения условий положительной определенности эрмитовой матрицы $\operatorname{Re}P(j\omega)$ (2) в общем случае необходимо (но недостаточно), чтобы вещественные части собственных значений $\gamma_i(j\omega)$ (6) были положительными при всех частотах $\omega \geq 0$. Дана геометрическая трактовка условий $\operatorname{Re}(\gamma_i(j\omega)) > 0$ на комплексной плоскости модифицированных характеристических годографов линейной части МСАР. Данная трактовка, аналогичная применяемой в классической теории одномерных систем регулирования, позволяет геометрически осуществить выбор "оптимального" значения неизвестного параметра Q в (3) и (6), после чего можно проверить условия положительной определенности эрмитовой матрицы $\operatorname{Re}P(j\omega)$ (1) для всех $\omega \geq 0$ известными алгебраическими методами (в последние годы эта задача легко решается с помощью современных средств вычислительной техники и стандартных пакетов, входящих, например, в MATLAB).

Рассмотрим теперь МСАР с нормальными передаточными матрицами линейной части. Согласно определению [6], МСАР называется нормальной, если передаточная матрица линейной части системы является нормальной, то есть коммутирует со своей сопряженной:

$$W(j\omega)W^*(j\omega) = W^*(j\omega)W(j\omega).$$

Главная геометрическая особенность нормальных матриц заключается в ортогональности осей их канонического базиса и в совпадении двойственного базиса с каноническим. При этом модальная матрица $C(j\omega)$ является унитарной и удовлетворяет соотношению

$$C^{-1}(j\omega) = C^*(j\omega), \tag{7}$$

а ее число обусловленности $\nu(C(j\omega))$ тождественно равно единице.

Подстановка канонического представления (4), с учетом (7), в (3) дает

$$P(j\omega) = C(j\omega)\operatorname{diag}\{\gamma_i(j\omega)\}C^*(j\omega), \tag{8}$$

то есть матрица $P(j\omega)$ в (2) также относится к нормальным матрицам и, как следствие, коммутирует со своей сопряженной.

Наконец, подставив (8) в (1), получим

$$\operatorname{Re}P(j\omega) = \frac{1}{2}[C(j\omega)\operatorname{diag}\{\gamma_i(j\omega)\}C^*(j\omega) + (C(j\omega)\operatorname{diag}\{\gamma_i(j\omega)\}C^*(j\omega))^*] =$$

$$= C(j\omega)\operatorname{diag}\{\operatorname{Re}(\gamma_i(j\omega))\}C^*(j\omega), \tag{9}$$

откуда видно, что эрмитова матрица $\operatorname{Re}P(j\omega)$ (2) приводится к диагональному виду в том же ортогональном каноническом базисе, что и матрицы $W(j\omega)$ и $P(j\omega)$, а ее вещественные собственные значения $\mu_i(\omega)$ тождественно равны действительным частям соответствующих собственных значений $\gamma_i(j\omega)$ самой матрицы $P(j\omega)$ (8). Следовательно, необходимые и достаточные условия положительной определенности матрицы $\operatorname{Re}P(j\omega)$, заключающиеся в положительности всех ее собственных значений $\mu_i(\omega)$ при $\omega \geq 0$, для случая МСАР с нормальной линейной частью принимают, с учетом (6), (8), (9), вид

$$\mathrm{Re}\{(1 + j\omega Q)q_i(j\omega) + \frac{1}{k_{max}}\} > 0 \quad , \qquad i = 1,2,\ldots,N \tag{10}$$

и выражаются непосредственно через характеристические годографы $q_i(j\omega)$ линейной части МСАР. Отсюда приходим к исключительно важному выводу, что для абсолютной устойчивости положения равновесия МСАР с нормальной передаточной матрицей линейной части достаточно, чтобы существовал такой вещественный скаляр Q, при котором для всех $\omega \geq 0$ выполнялись бы неравенства (10).

Если характеристики нелинейностей $F_i(x_i)$ лежат в секторе $[r_{min}, k_{max}]$, то для абсолютной устойчивости нормальной МСАР достаточно, чтобы при некотором вещественном Q удовлетворялись условия:

$$\mathrm{Re}\left\{(1 + j\omega Q)\frac{q_i(j\omega)}{1 + r_{min}q_i(j\omega)} + \frac{1}{k_{max} - r_{min}}\right\} > 0,\ i = 1,2,\ldots,N \tag{11}$$

или, при наличии нестационарных нелинейностей, а также нелинейностей как с активным, так и пассивным гистерезисом, условия

$$\mathrm{Re}\{[1 + k_{max}q_i(j\omega)][1 + r_{min}q_i^*(j\omega)]\} > 0 \quad , \ i = 1,2,\ldots,N \ . \tag{12}$$

Условия (11), (12) нетрудно получить, используя известное эквивалентное структурное преобразование исходной МСАР, показанное на рис. 4 [4].

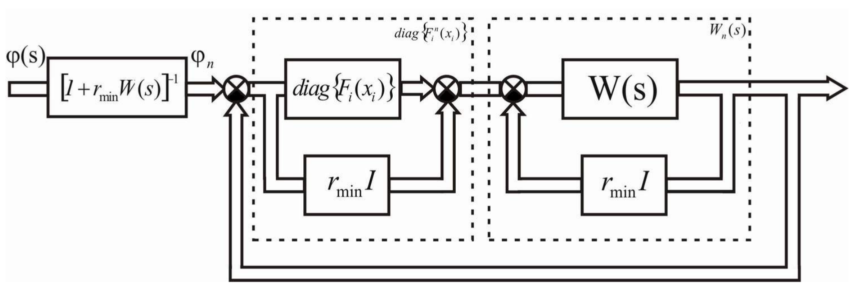

Рис. 4

Все приведенные результаты полностью справедливы и для специального класса однотипных нормальных МСАР [6], а именно, МСАР с идентичными передаточными функциями сепаратных каналов и жесткими взаимными связями, характеризуемыми некоторой числовой матрицей. Для однотипных МСАР передаточная матрица линейной части W(s) может быть представлена в виде

$$W(s) = w(s)R\,, \tag{13}$$

где $w(s)$ – скалярная передаточная функция сепаратных каналов; R – NxN числовая матрица взаимосвязей. Причем условие нормальности таких МСАР зависит только от матрицы R и имеет простой вид

$$RR^T = R^T R\,,$$

где ^{T} – символ транспонирования матриц.

Таким образом, для абсолютной устойчивости положения равновесия МСАР с нормальной линейной частью достаточно, чтобы обычные частотные критерии абсолютной устойчивости систем с одним входом и выходом, такие как критерий Попова, внеосевой круговой, параболический и другие критерии, выполнялись для каждой из N одномерных характеристических систем с передаточными функциями линейной части $q_i(j\omega)$ и нелинейностями, удовлетворяющими тем же ограничениям, что и нелинейности исходной МСАР. На рис. 5 в качестве иллюстрации применения критерия Попова приведен качественный вид характеристических годографов абсолютно устойчивой нормальной МСАР с тремя входами и выходами.

Напомним еще раз, что в случае МСАР общего вида данные частотные критерии являются необходимыми, но недостаточными для выполнения условий положительной определенности матрицы $\operatorname{Re} P(j\omega)$ (2).

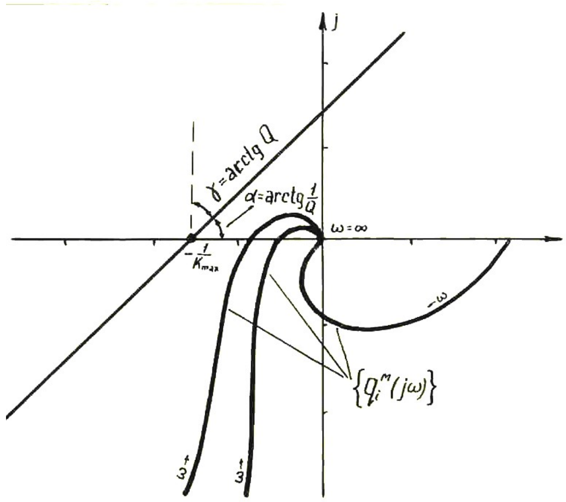

Рис. 5

2. Пример. Проиллюстрируем рассмотренные в статье положения на конкретном примере 16 - канальной циркулянтной однотипной системы автоматического регулирования с передаточной функцией идентичных сепаратных каналов вида

$$w(s) = \frac{600000000(s+3)}{s(s+0{,}33)(s+400)^2(s+500)}$$

и нелинейностями, принадлежащими некоторому сектору [Kmin, Kmax]. Данные нелинейности будем считать в общем случае нестационарными, что приводит к необходимости применения кругового критерия в форме (12), где параметр Q равен нулю.

В циркулянтных системах, относящихся к нормальным, каждая последующая строка передаточной матрицы линейной части повторяет предыдущую строку при сдвиге на один элемент вправо. Последний элемент предыдущей строки при этом становится первым элементом последующей. В однотипных циркулянтных системах данные условия относятся к числовой матрице взаимосвязей R в (5).

Зададим элементы первой строки матрицы R в виде

$$r_1 = [1\ \ 0{,}6\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]\,. \qquad (14)$$

Структурно подобная матрица означает, что все каналы МСАР соединены “круговой” связью с коэффициентом 0,6, а собственные значения матрицы R даются выражениями

$$\lambda_i = 1 + 0.6\exp\{j2\pi(i-1)/16\} \qquad i = 1,2,\ldots,16. \qquad (15)$$

На рис. 6 построены характеристические годографы передаточной матрицы линейной части w(s)R системы и показаны три круга, соответствующие одинаковым максимальным значениям $K_{\max}$ = 1 и трем разным минимальным значениям $K_{\min}$ = [0,1, 0,2, 0,4] угловых коэффициентов секторов, ограничивающих нелинейности. Расчеты осуществлялись при помощи специальной программы, написанной на языке программирования MATLAB. Как видно из рис. 6, для рассматриваемой 16 - канальной циркулянтной системы достаточные условия положительной определенности эрмитовой матрицы ReP(jω) (2) выполняются в секторе [0,5, 1].

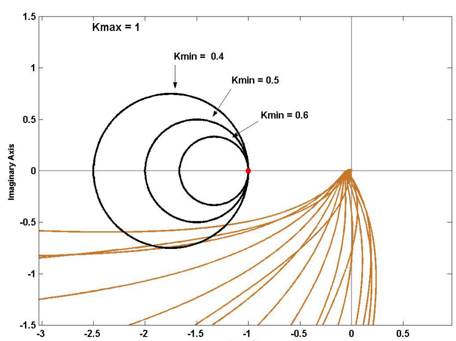

Рис. 6

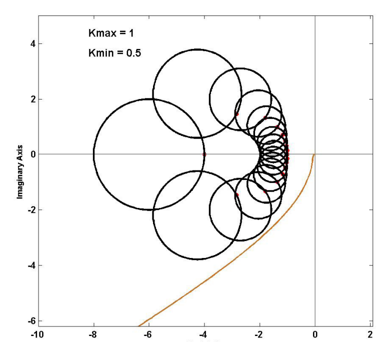

Рис. 7

На рис. 7 даны построения, соответствующие другой, описанной в [11] геометрической форме кругового критерия (на плоскости единственного характеристического годографа w(j()) для полученного выше “устойчивого” сектора [0,5, 1], а на рис. 8 показаны зависимости собственных значений $\mu_i(\omega)$ матрицы $\operatorname{Re} P(j\omega)$ (2) от частоты ω для рассматриваемой циркулянтной системы, подтверждающие положительность всех $\mu_i(\omega)$, то есть выполнение достаточных условий абсолютной устойчивости положения равновесия МСАР.

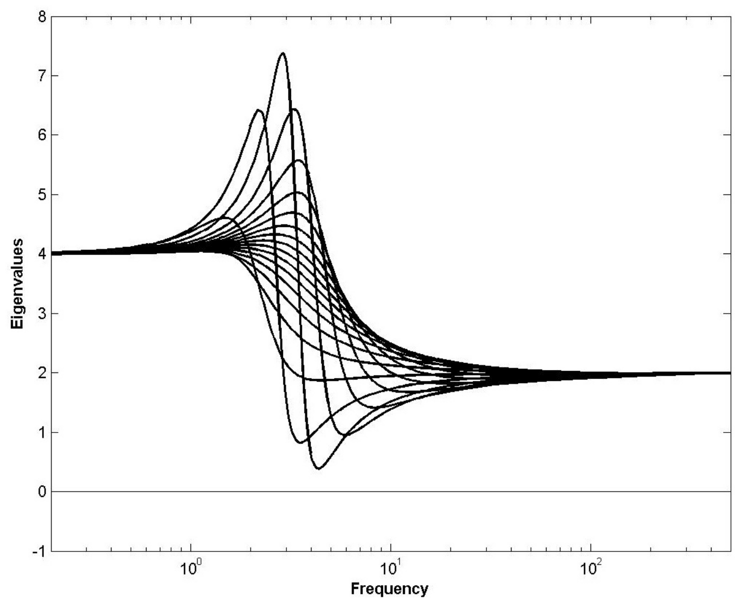

Рис. 8

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Попов В.М.** Об абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика.- 1961.- № 8.-С. 24-32.
2. **Джури Э., Ли Б.** Абсолютная устойчивость систем с многими нелинейностями// Автоматика и телемеханика.-1965 .- № 6. -С.14-21.
3. **Moore J.B., Anderson B.D.** Generalization of the Circle Criterion.- Preprints, 1968, JACC (Ann.Arbor, Mich). -P. 14-19.
4. **Гаспарян О.Н.** Исследование абсолютной устойчивости нелинейных многосвязных систем методом характеристических передаточных функций // Изв. АН АрмССР. Сер. ТН.-1986. -Т. 39. - С. 23-29.
5. **MacFarlane A.G.J.** Postlethwaite, Characteristic Frequency Functions and Characteristic Gain Functions // Int.J.Contr. - 1977.-Vol.25.-P. 78-84.

6. **Гаспарян О.Н.** Метод характеристических передаточных функций в теории многосвязного регулирования // Тез. докл. Респ. научн.-техн. конф. “Современные системы автоматического управления и их элементы”.- Ереван, 1981.- С. 3-9.
7. Методы исследования нелинейных систем автоматического управления / Под ред. **Р.Ф.Нелепина**.-М.: Наука, 1975.- 448 с.
8. **Сю Д., Мейер А.** Современная теория автоматического управления и ее приложения.- М.: Машиностроение, 1972.- 544 с.
9. **Dorf R.C. and Bishop R.H.** Modern Control Systems.- Addison-Wesley, Menlo Park, CA, 1998.
10. **Dereck A.Linkens** (editor), CAD for Control Systems.-Marcel Dekker, New Yourk, 1995.
11. **Гаспарян О.Н.,Алексанян Г.А.** К исследованию абсолютной устойчивости нелинейных многосвязных однотипных систем автоматического регулирования на основе круговых критериев // Моделирование. Оптимизация. Управление: Сб. научн. тр./ ГИУА. –Ереван, 2004.- Вып. 7, No 1.-С. 12-17.

ИРФЭ НАН РА. Материал поступил в редакцию 20.03.2004.

Օ.Ն. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ, Գ.Ա. ԱԼԵՔՍԱՆՅԱՆ

ՆՈՐՄԱԼ ՓՈԽԱՆՑՄԱՆ ՄԱՏՐԻՑՈՎ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԲԱԶՄԱԿԱՊ ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԲԱՑԱՐՁԱԿ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Բնութագրիչ փոխանցման ֆունկցիաների մեթոդով դիտարկված են գծային մասում նորմալ փոխանցման մատրիցով ոչ գծային բազմակապ ավտոմատ կառավարման համակարգերի բացարձակ կայունության հայտնի հայտանիշների բազմաչափ երկրաչափական նմանակներ: Ցույց է տրված, որ նորմալ բազմակապ համակարգերի երկրաչափական հայտանիշները բավարար են: MATLAB լեզվով բերված է թվային խնդիրների հաշվարկ:

O.N. GASPARYAN, G.A. ALEKSANYAN

ABSOLUTE STABILITY OF NONLINEAR MULTIDIMENSIONAL CONTROL SYSTEMS WITH NORMAL TRANSFER MATRICES OF LINEAR PART

For a special class of nonlinear multiple-input multiple-output (MIMO) feedback control systems, with normal transfer matrices of linear part, multidimensional geometric analogs of equilibrium point’s absolute stability criterion are considered on the basis of the characteristic transfer function method. It is shown that for normal MIMO control systems the derived geometrical criteria are sufficient. Numerical examples carried out in MATLAB language are given.