

К.А. СОГОМОНЯН, К.А. ТУМАНЯН, ДЖ.Н. ДАЛЛАКЯН,
Н.Л. КАЗАРЯН

ПРОЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ m – ПОВЕРХНОСТЕЙ МНОГОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Доказывается взаимосвязь между размерностью и порядком алгебраической гладкой m -поверхности пространства R^n . Предлагается конструктивный алгоритм формообразования гладких m -поверхностей, который включает в себя простейшие линейные операции проецирования, сечения и точечных проективных преобразований пространств.

Ключевые слова: гладкая поверхность, проективное преобразование, проецирование, сечение, собственное пространство, размерность, порядок.

Алгебраическая m -поверхность X с геометрической точки зрения представляет собой непрерывное множество точек размерности m ($\dim X = m$), расположенное в некотором пространстве R^n ($n > m$). Она является нелинейной геометрической формой и характеризуется своим порядком, который с геометрической точки зрения определяется наибольшим числом точек пересечения ее с произвольной $(n-m)$ -плоскостью пространства R^n . Т.е., если предположить, что порядок поверхности X равен k ($\deg X = k$), то это означает, что в R^n эта поверхность с произвольной $(n-m)$ -плоскостью пересекается не более, чем в k точках.

Если поверхность X рассматривается в R^n и $\dim X = m$; $\deg X = k$, то эту форму обозначим: $X_{m,k}$.

Рассмотрим самый общий случай поверхности $X_{m,k}$. Для этой формы, очевидно, существует пространство минимальной размерности ($R^{n_{\min}}$), которое вмещает все точки поверхности. Это пространство назовем собственным пространством данной поверхности. Для определения размерности ($n_{\min}$) этого пространства используем тот факт, что группа k точек пересечения $(n_{\min}-m)$ -плоскости с $X_{m,k}$ однозначно определяет эту плоскость, т.е. образует ее симплекс. С другой стороны, известно, что симплексом e -плоскости является совокупность $(e+1)$ независимых точек, следовательно, имеем: $n_{\min}-m+1=k$ и $n_{\min}=m+k-1$.

Итак, размерность собственного пространства поверхности $X_{m,k}$ равна $m+k-1$.

Примеры.

1. Для $X_{1,2}$ собственным пространством является R^2 , т.е. кривая второго порядка со всеми своими точками полностью вмещается в одной 2-плоскости (R^2).

2. Для $X_{2,2}$ собственным является R^3 , т.е. 2-поверхность второго порядка со всеми своими точками полностью вмещается в одной 3-плоскости (в одном трехмерном пространстве).

3. Для $X_{2,3}$ собственным является P^4 , т.е. 2-поверхность третьего порядка в общем случае вмещается в одной 4-плоскости (в четырехмерном пространстве). Это не означает, что не существуют 2-поверхности третьего порядка, которые вмещаются в трехмерном пространстве. Такие $X_{2,3}$ существуют, но они являются частными видами этой формы.

Предложение. Любая поверхность общего вида (вмещающаяся только в своем собственном пространстве) $X^{m+k-1}_{m,k}$ является гладкой формой.

Для доказательства, во-первых, покажем, что любая прямая с поверхностью $X^{m+k-1}_{m,k}$ не может иметь более двух точек пересечения.

Предположим обратное. Пусть некоторая прямая l пересекает эту форму в трех точках. Через эту прямую проведем некоторую $(n_{\min}-m)$ -плоскость (т.е. $(k-1)$ -плоскость). Для ее однозначного задания, кроме этой прямой (она равносильна заданию двух точек), необходимо задать еще совокупность $(k-2)$ независимых точек. Пусть эти точки принадлежат поверхности $X^{m+k-1}_{m,k}$ (очевидно, что они существуют). Тогда получается, что $(k-1)$ -плоскость с $X^{m+k-1}_{m,k}$ будет иметь $k-2+3=k+1$ общих точек, что невозможно, так как мы рассматриваем поверхность порядка k . Итак, любая прямая с поверхностью $X^{m+k-1}_{m,k}$ не имеет более двух точек пересечения. Отсюда следует, что $X^{m+k-1}_{m,k}$ не может иметь особых (кратных) точек, так как в противном случае прямая, проходящая через такие точки, с поверхностью будет иметь более двух точек пересечения, что противоречит доказанному.

Рассмотрим алгоритм образования гладких поверхностей с использованием точечных проективных преобразований пространства P^e .

Пусть в P^e задано проективное преобразование: $\psi : P^e \rightarrow P^e$. В самом общем случае это преобразование оставляет неподвижными $(e+1)$ точек. Соответственные пары точек этого преобразования рассмотрим как пары проекций линейных элементов (L) пространства P^n ($n > e$).

Предположим, что центры проецирования S_1 и S_2 (линейные элементы) принадлежат пространству P^n (рис.). Множество элементов $\{L_i\}(P^n)$, соответствующих всевозможным парам точек $\{L^1_i, L^2_i\}$, где $L^2_i = \psi(L^1_i)$, образует некоторую гладкую поверхность X в пространстве $P^n(X = \{L_i\})$.

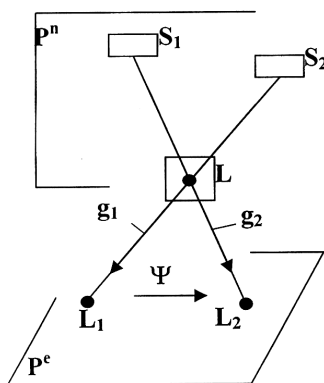


Рис.

Имея в виду, что проецирующие элементы g_1 и g_2 должны пересекать пространство P^e по точкам (L_1 и L_2), размерности этих элементов будут

$$\dim g_1 = \dim g_2 = n - e.$$

Размерность центров проецирования S_1 и S_2 будет на единицу меньше:

$$\dim S_1 = \dim S_2 = n - e - 1. \quad (1)$$

Вычислим размерность искомой поверхности $X = \{L_i\}$. Очевидно, что линейный элемент L_1 этой поверхности образуется в результате пересечения проецирующих элементов g_1 и g_2 в P^n . Следовательно,

$$\dim L = \dim(g_1(g_2)) = 2(n - e) - n = n - 2e. \quad (2)$$

Множество $\{L_i\}$ эквивалентно множеству $\{L_1 L_2\}$. Так как в P^e проективно-соответственные пары точек образуют e -мерное множество, то очевидно, что $\dim\{L_i\} = e$.

Но так как поверхность X состоит из множества $\{L_i\}$, каждый элемент которого имеет размерность $\dim L$, то имеем

$$\dim X = \dim\{L_i\} + \dim L = e + n - 2e = n - e. \quad (3)$$

Установим порядок искомой поверхности X . В P^n поверхность X пересекается с e -плоскостью G по точкам. Количество точек пересечения определяет порядок поверхности X . Соответственные пары проецирующих элементов (g_1 и g_2) пересекают e -плоскость G по парам точек, которые будут соответственными в некотором проективном преобразовании $\varphi: G \rightarrow G$. Очевидно, что неподвижные точки этого преобразования и будут точками пересечения поверхности X с e -плоскостью G . Но так как $\varphi: G \rightarrow G$ в общем случае имеет не более $(e + 1)$ неподвижных точек, значит, $\deg X = e + 1$.

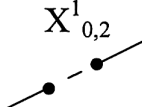
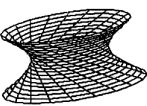
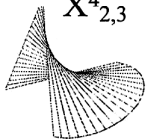
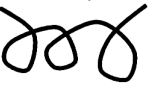
Таким образом, мы доказали следующее предложение.

На основе точечного проективного преобразования $\psi: P^e \rightarrow P^e$ в P^n образуется поверхность

$$X_{n-e, e+1}^n (\dim X = n - e, \deg X = e + 1). \quad (4)$$

В зависимости от e и n образуются различные гладкие поверхности. Некоторые результаты приведены в таблице.

Таблица

$\frac{e}{n}$	1	2	3	4	5
1	$X^1_{0,2}$ 	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
2	$X^2_{1,2}$ 	$X^2_{0,3}$ 	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
3	$X^3_{2,2}$ 	$X^3_{1,3}$ 	$X^3_{0,4}$ 	$\emptyset$	$\emptyset$
4	$X^4_{3,2}$ 	$X^4_{2,3}$ 	$X^4_{1,4}$ 	$X^4_{0,5}$ 	$\emptyset$
5	$X^5_{4,2}$	$X^5_{3,3}$	$X^5_{2,4}$ 	$X^5_{1,5}$ 	$X^5_{0,6}$ 

Примеры.

1. Если $n = 2$, $e = 2$, получаем $X^2_{0,3}$ (нульмерная кубика в плоскости) – три точки.
2. Если $n = 2$, $e = 1$, получаем $X^2_{1,2}$ (одномерная квадрака в плоскости) – кривая второго порядка, которая получается в результате пересечения двух проективных пучков прямых 2-плоскости.
3. Если $n = 3$, $e = 1$, получаем $X^3_{2,2}$ (2-поверхность второго порядка в P^3) – линейчатая квадрака в трехмерном пространстве.
4. Если $n = 3$, $e = 2$, получаем $X^3_{1,3}$ (одномерная кубика в P^3) – пространственная кривая третьего порядка в трехмерном пространстве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Согомонян К.А.** Линейно-конструктивные методы формообразования (геометрическое моделирование). - Ереван: Айастан, 1990.- 214 с.
2. **Хартсхорн Р.** Алгебраическая геометрия. – М.: Мир, 1981. – 600 с.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 16.03.2004.

**Կ.Հ. ՍՈԴՈՄՈՆՅԱՆ, Կ.Ա. ԹՈՒՄԱՆՅԱՆ,
Ջ.Ն. ԴԱԼԼԱԿՅԱՆ, Ն.Լ. ԴԱԶԱՐՅԱՆ**

ԲԱԶՄԱՉԱՓ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ m - ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՑԹՆԵՐԻ ՁԵՎԱԿԱԶՄԱՎՈՐՄԱՆ ՊՐՈՑԵԿՏԻՎ ԱԼԳՈՐԻԹՄԸ

Ապացուցվում է P^n տարածության հանրահաշվական ողորկ m -մակերևույթի չափողականության և կարգի միջև եղած կապի բանաձևը: Այս բանաձևի հիման վրա առաջարկվում է ողորկ m -մակերևույթների ձևակազմավորման կոնստրուկտիվ ալգորիթմը, որն ընդգրկում է ամենապարզ և գծային գործողությունները՝ պրոյեկտում, հատում և տարածությունների կետային պրոյեկտիվ ձևափոխություններ:

**K. H. SOGOMONYAN, K. A. TUMANYAN,
G. N. DALLAKYAN, N. L. GHAZARYAN**

**A DESIGN ALGORITHM FOR FORMING MULTIDIMENSION
SPACE m -SURFACES**

Dimensiality and order relationship of algebraic smooth m -surface space P^n is demonstrated. A constractive algorithm for smooth m -surface which includes the simplest linear operation for designing, section and pointwise space rectifcation of projection is proposed.