

С.О. СИМОНЯН, Л.А. БАДАЛЯН

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ТЕЙЛОРОВСКИЙ АНАЛОГ МЕТОДА ГРЕВИЛЛЯ ДЛЯ
НЕАВТОНОМНЫХ МАТРИЦ**

Предложен простой метод определения неавтономных псевдообратных матриц. Рассмотрен модельный пример.

Ключевые слова: дифференциально-тейлоровские преобразования, неавтономная матрица, псевдообратная матрица.

Введение. Псевдообратные матрицы используются в многочисленных теоретических и практических исследованиях, в частности, при решении задач оптимального управления [1], некорректных задач [2], матричных уравнений [3], сингулярном разложении [4] и др. Псевдообратные матрицы совместно с дифференциальными преобразованиями были успешно применены также в задачах расщепления линейных динамических систем [5], при решении линейных многоточечных краевых задач [6], функциональных матричных уравнений [7], задач математического программирования [8], линейных неавтономных конечных задач [9], при нахождении корней алгебраических многочленов с переменными коэффициентами [10] и др.

Для определения псевдообратных матриц $A_{n \times m}^+$ соответствующих автономных матриц $A_{m \times n}$ существует множество методов, в числе которых метод Гревилля [3]. Пусть a_q - q -й столбец ($q = \overline{1, n}$) матрицы A , а A_q - подматрица матрицы A , состоящая из первых q столбцов матрицы A , т.е. $A_q = a_1, \dots, a_q$, $A_n = A$, $q = \overline{1, n}$. Кроме того, допустим, что b_q , $q = \overline{1, n}$ - последняя строка матрицы A_q^+ , $q = \overline{1, n}$. Тогда в соответствии с этим методом для построения псевдообратной матрицы $A_{n \times m}^+$ выполняется следующая последовательность вычислительных операций:

Шаг 1. Определяется вектор-строка с размерами $1 \times m$ при $q = 1$:

$$A_1^+ = a_1^+ = \frac{a_1^*}{a_1^* \cdot a_1}, \quad (1)$$

$\begin{matrix} 1 \times m & 1 \times m & \frac{1 \times m}{1 \times m \cdot 1 \times m} \end{matrix}$

где $*$ - знак комплексно-сопряженного вектора с размерами $1 \times m$ (при действительных матрицах A знак $*$ заменяется на знак транспонирования) при векторе a_1 с размерами $m \times 1$. При $A_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}_{m \times 1}$ принимается, что

$$A_1^+ = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}_{1 \times m}. \quad (2)$$

Шаг 2. Определяются векторы

$$d_q = A_{q-1}^+ \cdot a_q, \quad q = \overline{2, n}. \quad (3)$$

Шаг 3. Определяются векторы

$$c_q = a_q - A_{q-1} \cdot d_q, \quad q = \overline{2, n}. \quad (4)$$

Шаг 4. Если $c_q \neq \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}_{m \times 1}$, то

$$b_q = c_q^+ = \begin{pmatrix} a_q - A_{q-1} \cdot d_q \end{pmatrix}_{m \times 1}^+, \quad q = \overline{2, n};$$

если $c_q = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}_{m \times 1}$, то

$$b_q = \left(1 + d_q^* \cdot d_q \right)_{1 \times (q-1)}^{-1} \cdot d_q^* \cdot A_{q-1}^+, \quad q = \overline{2, n}. \quad (5)$$

Шаг 5. Определяются матрицы

$$B_q = A_{q-1}^+ - d_q \cdot b_q, \quad q = \overline{2, n}. \quad (6)$$

Шаг 6. Определяются матрицы

$$A_{q \times m}^+ = \begin{pmatrix} B_q \\ \text{---} \\ b_q \end{pmatrix}_{(q-1) \times m}, \quad q = \overline{2, n}, \quad (7)$$

откуда при $q = n$ получается псевдообратная матрица

$$A_n^+ = A^+ = A^+. \quad (8)$$

Теперь допустим, что $A = A(t)$, иными словами, имеем неавтономную матрицу. При этом метод Гревилля содержит следующую, аналогичную (1)-(8), последовательность вычислительных операций:

Шаг 1. Определяется вектор-строка с размерами $1 \times m$:

$$A_1^+(t) = a_1^+(t) = \frac{a_1^*(t)}{a_1^*(t) \cdot a_1(t)}. \quad (9)$$

Шаг 2. Определяются векторы:

$$d_q(t) = A_{q-1}^+(t) \cdot a_q(t), \quad q = \overline{2, n}. \quad (10)$$

Шаг 3. Определяются векторы:

$$c_q(t) = a_q(t) - A_{q-1}(t) \cdot d_q(t), \quad q = \overline{2, n}. \quad (11)$$

Шаг 4. Если $c_q(t) \neq 0$, то

$$b_q(t) = c_q^+(t) = (a_q(t) - A_{q-1}(t) \cdot d_q(t))^+, \quad q = \overline{2, n}; \quad (12)$$

если $c_q(t) = 0$, то

$$b_q(t) = (1 + d_q^*(t) \cdot d_q(t))^{-1} \cdot d_q^*(t) \cdot A_{q-1}^+(t), \quad q = \overline{2, n}. \quad (13)$$

Шаг 5. Определяются матрицы:

$$B_q(t) = A_{q-1}^+(t) - d_q(t) \cdot b_q(t), \quad q = \overline{2, n}. \quad (14)$$

Шаг 6. Определяются матрицы:

$$A_{q \times m}^+ = \begin{pmatrix} B_q(t) \\ \dots \\ b_q(t) \end{pmatrix}, \quad q = \overline{2, n}, \quad (15)$$

откуда при $q = n$ получается псевдообратная матрица

$$A_n^+(t) = A^+(t). \quad (16)$$

Выполнение операций (9)-(16), естественно, имеет смысл при матрицах $A(t)$ с малыми размерами. При сравнительно больших размерах матриц $A(t)$, очевидно, использование этих соотношений становится практически невозможным из-за громоздкости используемых соотношений. Поэтому, вероятно, единственным, существующим в настоящее время подходом для определения $A^+(t)$ является метод замороженных коэффициентов [4], при котором рассматривается некоторое множество изолированных точек времени t_k на некотором временном интервале $[t_0, T]$, в которых определяются соответствующие числовые матрицы $A^+(t_k)$, а затем и неавтономная матрица $A^+(t)$ с применением некоторого метода теории аппроксимации.

Однако при этом, при кажущейся простоте реализации последнего этапа вычислений, на практике сталкиваются с необходимостью решения так называемой проблемы ветвления [4]. Это обстоятельство фактически сводит решение задачи к использованию метода полного перебора всевозможных вариантов, что обычно требует много машинного времени и вычислительных усилий.

Для решения рассматриваемой задачи в настоящей работе предлагается эффективный, обладающий простотой реализации, вычислительный метод, основанный на дифференциально-тейлоровских (ДТ-) преобразованиях [11]:

$$X(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{\partial^K x(t)}{\partial t^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad ; \quad x(t) = \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{t-t_v}{H} \right)^K \cdot X(K), \quad (17)$$

где $X(K)$ - изображение (дискрета) оригинала $x(t)$ - функция целочисленного аргумента $K = \overline{0, \infty}$; H - некоторая постоянная; t_v - центр аппроксимации. При $t_v = 0$ ДТ-преобразования вырождаются в дифференциально-маклореновские (ДМ-) преобразования. В соответствии с [11] здесь могут быть использованы и другие дифференциальные преобразования, так как все они отличаются друг от друга лишь только операцией восстановления оригиналов $x(t)$.

Математический аппарат. Допустим, что все элементы матрицы $A(t)$ обладают непрерывными частными производными бесконечного порядка по переменной t в центре аппроксимации t_v . Представим дифференциальные преобразования соотношений (9)-(16) в соответствии с (17). Имеем:

Шаг 1. Вычислить

$$A_1^+(K) = a_1^+(K) = \frac{a_1^*(K) - \sum_{l_1=1}^K a_1^+(K-l_1) \cdot \sum_{l_2=0}^{l_1} a_1^*(l_1-l_2) \cdot a_1(l_2)}{a_1^*(0) \cdot a_1(0)}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad (18)$$

(естественно, при $a_1(0) = a_1^*(0) = 0$ необходимо принять $A_1^+(0) = a_1^+(0) = (0)$).

Шаг 2. Вычислить

$$d_q(K) = \sum_{l=0}^K A_{q-1}^+(K-l) \cdot a_q(l), \quad K = \overline{0, \infty}, \quad q = \overline{2, n}. \quad (19)$$

Шаг 3. Вычислить

$$c_q(K) = a_q(K) - \sum_{l=0}^K A_{q-1}(K-l) \cdot d_q(l), \quad K = \overline{0, \infty}, \quad q = \overline{2, n}. \quad (20)$$

Шаг 4. Если $c_q(K) \neq 0$, то вычислить

$$b_q(K) = c_q^+(K) = \left(a_q(K) - \sum_{l=0}^K A_{q-1}(K-l) \cdot d_q(l) \right)^+, \quad K = \overline{0, \infty}, \quad q = \overline{2, n}; \quad (21)$$

если $c_q(K) = 0$, то вычислить

$$b_q(K) = \sum_{l_1=0}^K G_q(K-l_1) \sum_{l_2=0}^{l_1} d_q^*(l_1-l_2) \cdot A_{q-1}^+(l_2), \quad K = \overline{0, \infty}, \quad q = \overline{2, n}, \quad (22)$$

причем

$$G_q(K) = \frac{\mathcal{B}(K) - \sum_{l=1}^K G_q(K-l) \cdot F(l)}{F(0)}, \quad K = \overline{0, \infty}, \quad q = \overline{2, n}, \quad (23)$$

$$F_q(K) = \mathcal{B}(K) + \sum_{l=0}^K d_q^*(K-l) \cdot d_q(l), \quad K = \overline{0, \infty}, \quad q = \overline{2, n}, \quad (24)$$

где тейлоровская единица

$$\mathcal{B}(K) = \begin{cases} 1, & \text{если } K = 0, \\ 0, & \text{если } K = \overline{1, \infty}. \end{cases} \quad (25)$$

Шаг 5. Вычислить

$$B_q(K) = A_{q-1}^+(K) - \sum_{l=0}^K d_q(K-l) \cdot b_q(l), \quad K = \overline{0, \infty}, \quad q = \overline{2, n}. \quad (26)$$

Шаг 6. Вычислить

$$A_q^+(K) = \begin{pmatrix} B_q(K) \\ \dots \\ b_q(K) \end{pmatrix}, \quad K = \overline{0, \infty}, \quad q = \overline{2, n}. \quad (27)$$

Таким образом, используя соотношения (18)-(27), можно вычислить матричные дискреты $A_n^+(0), A_n^+(1), \dots, A_n^+(K)$, а затем и псевдообратную матрицу $A^+(t)$ в соответствии с обратными дифференциальными преобразованиями.

Пример. Пусть задана матрица

$$A(t) = \begin{bmatrix} (-t^3 + 9 \cdot t^2)(t^3 - 9) & \\ 0 & (t^2 - 4) \\ 0 & (t^2 - 4) \end{bmatrix},$$

для которой $m=3 > n=2$. Следовательно, аналитическое решение псевдообратной матрицы будет иметь вид [3]

$$A^+(t) = [A^T(t) \cdot A(t)]^{-1} \cdot A^T(t).$$

Не вдаваясь в подробности, представим промежуточные результаты:

$$A^T(t) \cdot A(t) = \begin{bmatrix} t^4 \cdot (t-9)^2 & -t^2 \cdot (t-9) \cdot (t^3-9) \\ -t^2 \cdot (t-9) \cdot (t^3-9) & (t^3-9)^2 + 2 \cdot (t^2-4)^2 \end{bmatrix},$$

$$[A^T(t) \cdot A(t)]^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} (t^3-9)^2 + 2 \cdot (t^2-4)^2 & t^2 \cdot (t-9) \cdot (t^3-9) \\ t^2 \cdot (t-9) \cdot (t^3-9) & t^4 \cdot (t-9)^2 \end{bmatrix},$$

где

$$\Delta = 2 \cdot t^4 \cdot (t^2-4)^2 \cdot (t-9)^2,$$

или

$$[A^T(t) \cdot A(t)]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(t^3-9)^2 + 2 \cdot (t^2-4)^2}{2 \cdot t^4 \cdot (t^2-4)^2 \cdot (t-9)^2} & \frac{t^3-9}{2 \cdot t^2 \cdot (t^2-4)^2 \cdot (t-9)} \\ \frac{t^3-9}{2 \cdot t^2 \cdot (t^2-4)^2 \cdot (t-9)} & \frac{1}{2 \cdot (t^2-4)^2} \end{bmatrix}.$$

Окончательно имеем

$$A^+(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{t^2 \cdot (t-9)} \frac{t^3-9}{2 \cdot t^2 \cdot (t^2-4) \cdot (t-9)} \frac{t^3-9}{2 \cdot t^2 \cdot (t^2-4) \cdot (t-9)} \\ 0 & \frac{1}{2 \cdot (t^2-4)} & \frac{1}{2 \cdot (t^2-4)} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, линии $t = -2, t = 0, t = 2, t = 9$ являются вертикальными асимптотами, полученными из уравнения $\Delta = 0$. С учетом этих асимптот динамика изменения элементов $a_{ij}^{(+)}(t)$, $i = \overline{1,2}, j = \overline{1,3}$ псевдообратной матрицы $A^+(t)$ представлена на рис.1-3 (сплошные линии; заметим, что элемент $a_{21}^{(+)}(t) = 0$, ввиду чего соответствующий рисунок ниже не представлен). Там же представлены временные характеристики при применении ДТ-аналога метода Гревилля (точечные линии). Очевидно хорошее совпадение кривых в преобладающем большинстве случаев. К сожалению, ошибки увеличиваются в близких к асимптотам точках, а также при $t \rightarrow \pm\infty$, что и следовало ожидать. В табл.1-5 представлены сравнительные численные оценки на подынтервалах времени $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 9)$ и $(9, +\infty)$.

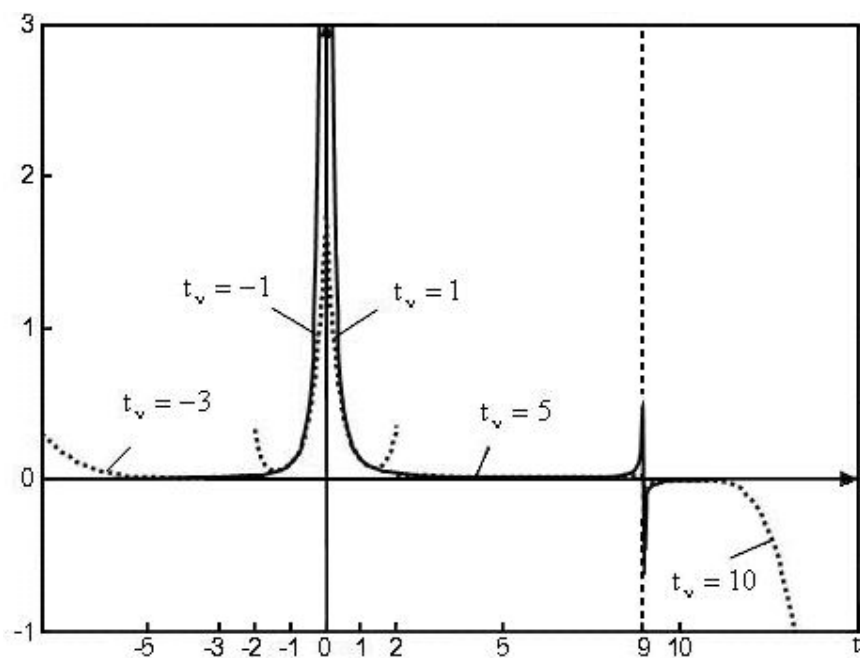


Рис.1. Динамика изменения элемента $a_{11}^{(+)}(t)$

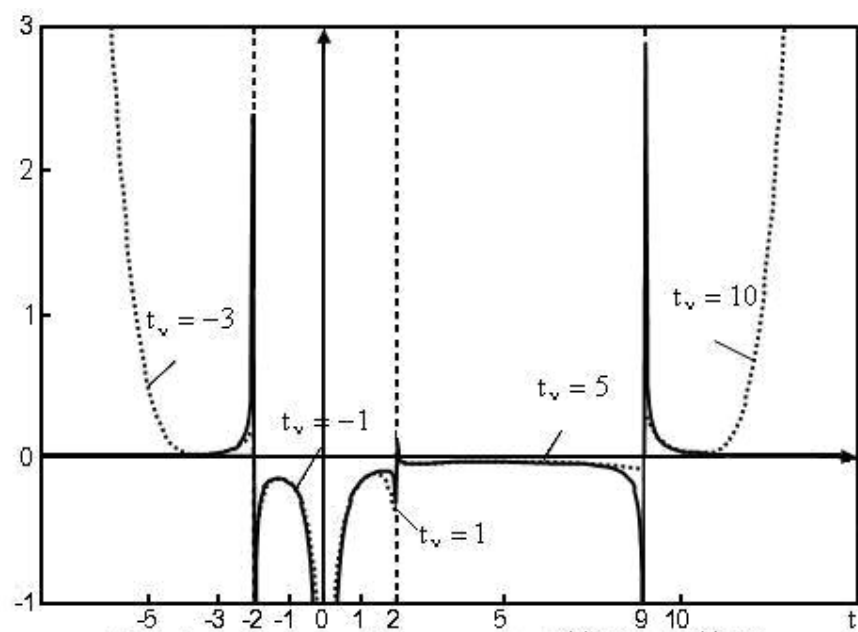


Рис.2. Динамика изменения элементов $a_{12}^{(+)}(t) \equiv a_{13}^{(+)}(t)$

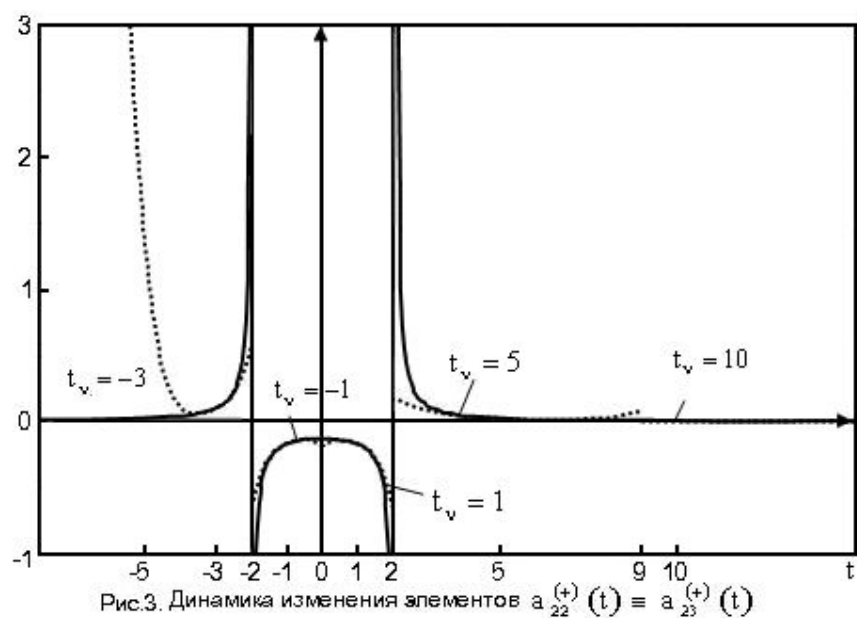


Таблица 1

Сравнительные оценки при $t \in (-\infty, -2)$, $t_v = -3$

t_k	$A_{\text{аналит.}}^{+}(t_k)$			$A_{\Delta\Pi}^{+}(t_k)$		
-4,5	0,0037	0,0113	0,0113	0,0050	0,1564	0,1564
	-0,0000	0,0308	0,0308	0	0,4104	0,4104
-4	0,0048	0,0146	0,0146	0,0050	0,0385	0,0385
	0	0,0417	0,0417	0	0,1042	0,1042
-3,5	0,0065	0,0205	0,0205	0,0065	0,0215	0,0215
	0	0,0606	0,0606	0	0,0632	0,0632
-3	0,0093	0,0333	0,0333	0,0093	0,0333	0,0333
	0	0,1000	0,1000	0	0,1000	0,1000
-2,5	0,0139	0,0761	0,0761	0,0139	0,0731	0,0731
	0	0,2222	0,2222	0	0,2144	0,2144
-2	0,0198	0	0	0,0223	0,2113	0,2113
	-0,0076	0	0	0	0,5938	0,5938

Таблица 2

Сравнительные оценки при $t \in (-2, 0)$, $t_v = -1$

t_k	$A_{\text{аналит.}}^+(t_k)$			$A_{\Delta\Pi}^+(t_k)$		
-2	0,0198	0	0	0,3221	-0,6090	-0,6090
	-0,0076	0	0	0	-0,6564	-0,6564
-1,6	0,0369	-0,1676	-0,1676	0,0666	-0,1917	-0,1917
	0	-0,3472	-0,3472	0	-0,3229	-0,3229
-1,2	0,0681	-0,1427	-0,1427	0,0683	-0,1428	-0,1428
	0	-0,1953	-0,1953	0	-0,1953	-0,1953
-0,8	0,1594	-0,2257	-0,2257	0,1592	-0,2254	-0,2254
	0	-0,1488	-0,1488	0	-0,1488	-0,1488
-0,4	0,6649	-0,7847	-0,7847	0,5053	-0,6075	-0,6075
	0	-0,1302	-0,1302	0	-0,1363	-0,1363
0	0	0	0	1,6063	-1,8625	-1,8625
	-0,0796	-0,0354	-0,0354	0	-0,1872	-0,1872

Таблица 3

Сравнительные оценки при $t \in (0, 2)$, $t_v = 1$

t_k	$A_{\text{аналит.}}^+(t_k)$			$A_{\Delta\Pi}^+(t_k)$		
0	0	0	0	1,7298	-1,9794	-1,9794
	-0,0796	-0,0354	-0,0354	0	-0,1872	-0,1872
0,4	0,7267	-0,8456	-0,8456	0,5623	-0,6609	-0,6609
	0	-0,1302	-0,1302	0	-0,1363	-0,1363
0,8	0,1905	-0,2407	-0,2407	0,1903	-0,2404	-0,2404
	0	-0,1488	-0,1488	0	-0,1488	-0,1488
1,2	0,0890	-0,1265	-0,1265	0,0892	-0,1266	-0,1266
	0	-0,1953	-0,1953	0	-0,1953	-0,1953
1,6	0,0528	-0,0899	-0,0899	0,0838	-0,1239	-0,1239
	0	-0,3472	-0,3472	0	-0,3229	-0,3229
2	0,0357	0	0	0,3474	-0,4316	-0,4316
	-0,0013	0		0	-0,6564	-0,6564
0						

Таблица 4

Сравнительные оценки при $t \in (2,9)$, $t_v = 5$

t_k	$A_{\text{аналит.}}^+(t_k)$			$A_{\Delta\Pi}^+(t_k)$		
2	0,0357	0	0	0,0292	-0,0450	-0,0450
	-0,0013	0	0	0	0,1775	0,1775
3	0,0185	-0,0333	-0,0333	0,0180	-0,0336	-0,0336
	0	0,1000	0,1000	0	0,0836	0,0836
4	0,0125	-0,0286	-0,0286	0,0125	-0,0287	-0,0287
	0	0,0417	0,0417	0	0,0414	0,0414
6	0,0093	-0,0299	-0,0299	0,0093	-0,0299	-0,0299
	0	0,0156	0,0156	0	0,0158	0,0158
7	0,0102	-0,0379	-0,0379	0,0102	-0,0371	-0,0371
	0	0,0111	0,0111	0	0,0144	0,0144
8	0,0156	-0,0655	-0,0655	0,0140	-0,0526	-0,0526
	0	0,0083	0,0083	0	0,0290	0,0290
9	0	0	0	0,0231	-0,0821	-0,0821
	0,0014	0,0001	0,0001	0	0,0811	0,0811

Таблица 5

Сравнительные оценки при $t \in (9,+\infty)$, $t_v = 10$

t_k	$A_{\text{аналит.}}^+(t_k)$			$A_{\Delta\Pi}^+(t_k)$		
9	0	0	0	-0,0590	0,2818	0,2818
	0,0014	0,0001	0,0001	0	0,0065	0,0065
9,5	-0,0222	0,1090	0,1090	-0,0214	0,1054	0,1054
	0	0,0058	0,0058	0	0,0058	0,0058
10	-0,0100	0,0516	0,0516	-0,0100	0,0516	0,0516
	0	0,0052	0,0052	0	0,0052	0,0052
10,5	-0,0060	0,0327	0,0327	-0,0063	0,0339	0,0339
	0	0,0047	0,0047	0	0,0047	0,0047
11	-0,0041	0,0233	0,0233	-0,0103	0,0522	0,0522
	0	0,0043	0,0043	0	0,0043	0,0043

Наконец, представим результаты фрагмента вычислений методом Гревилля для подынтервала $(0,2)$ при центре аппроксимации $t_v = 1$, $H = 1$ и количестве дискрет $K = \overline{0,4}$. Имеем

$$K = 0, \quad A(0) = \left[\begin{array}{cc} -t^3 + 9 \cdot t^2 & t^3 - 9 \\ 0 & t^2 - 4 \\ 0 & t^2 - 4 \end{array} \right]_{|_{t_v=1}} = \left[\begin{array}{cc} 8 & -8 \\ 0 & -3 \\ 0 & -3 \end{array} \right];$$

$$K = 1, \quad A(1) = \frac{1}{1!} \cdot \left[\begin{array}{cc} -3 \cdot t^2 + 18 \cdot t & 3 \cdot t^2 \\ 0 & 2 \cdot t \\ 0 & 2 \cdot t \end{array} \right]_{|_{t_v=1}} = \left[\begin{array}{cc} 15 & 3 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{array} \right];$$

$$K = 2, \quad A(2) = \frac{1}{2!} \cdot \left[\begin{array}{cc} -6 \cdot t + 18 & 6 \cdot t \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{array} \right]_{|_{t_v=1}} = \left[\begin{array}{cc} 6 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right];$$

$$K = 3, \quad A(3) = \frac{1}{3!} \cdot \left[\begin{array}{cc} -6 & 6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right]_{|_{t_v=1}} = \left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right];$$

$$K = 4, \quad A(4) = \frac{1}{4!} \cdot \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right]_{|_{t_v=1}}.$$

Далее получим:

Шаг 1.

$$K = 0, \quad A_1^+(0) = a_1^+(0) = (0,125000 \ 0 \ 0);$$

$$K = 1, \quad A_1^+(1) = a_1^+(1) = (-0,234375 \ 0 \ 0);$$

$$K = 2, \quad A_1^+(2) = a_1^+(2) = (0,345703 \ 0 \ 0);$$

$$K = 3, \quad A_1^+(3) = a_1^+(3) = (-0,456787 \ 0 \ 0);$$

$$K = 4, \quad A_1^+(4) = a_1^+(4) = (0,567902 \ 0 \ 0).$$

Шар 2.

$$K = 0, \quad d_2(0) = -1,000000;$$

$$K = 1, \quad d_2(1) = 2,250000;$$

$$K = 2, \quad d_2(2) = -3,93750;$$

$$K = 3, \quad d_2(3) = 4,113280;$$

$$K = 4, \quad d_2(4) = -5,110840.$$

Шар 3.

$$K = 0, \quad c_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad K = 1, \quad c_2(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$K = 2, \quad c_2(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad K = 3, \quad c_2(3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$K = 4, \quad c_2(4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Шар 4.

$$K = 0, \quad b_2(0) = (0 \quad -0,66667 \quad -0,166667);$$

$$K = 1, \quad b_2(1) = (0 \quad -0,111111 \quad -0,111111);$$

$$K = 2, \quad b_2(2) = (0 \quad -0,129630 \quad -0,129630);$$

$$K = 3, \quad b_2(3) = (0 \quad -0,123457 \quad -0,123457);$$

$$K = 4, \quad b_2(4) = (0 \quad -0,125514 \quad -0,125514).$$

Шар 5.

$$K = 0, \quad B_2(0) = (0,125000 \quad -0,166667 \quad -0,166667);$$

$$K = 1, \quad B_2(1) = (-0,234375 \quad 0,263889 \quad 0,263889);$$

$$K = 2, \quad B_2(2) = (0,345703 \quad -0,395255 \quad -0,395255);$$

$$K = 3, \quad B_2(3) = (-0,456787 \quad 0,510007 \quad 0,510007);$$

$$K = 4, \quad B_2(4) = (0,567902 \quad -0,643554 \quad -0,643554).$$

Шаг 6.

$$\begin{aligned}
 K = 0, \quad A_2^+(0) &= \begin{bmatrix} 0,125000 & -0,166667 & -0,166667 \\ 0 & -0,166667 & -0,166667 \end{bmatrix}; \\
 K = 1, \quad A_2^+(1) &= \begin{bmatrix} -0,234375 & 0,263889 & 0,263889 \\ 0 & -0,111111 & -0,111111 \end{bmatrix}; \\
 K = 2, \quad A_2^+(2) &= \begin{bmatrix} 0,345703 & -0,395255 & -0,395255 \\ 0 & -0,123457 & -0,123457 \end{bmatrix}; \\
 K = 3, \quad A_2^+(3) &= \begin{bmatrix} -0,456787 & 0,510007 & 0,510007 \\ 0 & -0,123457 & -0,123457 \end{bmatrix}; \\
 K = 4, \quad A_2^+(4) &= \begin{bmatrix} 0,567902 & -0,643554 & -0,643554 \\ 0 & -0,125514 & -0,125514 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned}
 a_{11}^{(+)}(t) &= 0,125000 - 0,234375(t-1) + 0,345703(t-1)^2 - \\
 &\quad - 0,456787(t-1)^3 + 0,567901(t-1)^4,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{12}^{(+)}(t) \equiv a_{13}^{(+)}(t) &= -0,166666 + 0,263888(t-1) - 0,395254(t-1)^2 + \\
 &\quad + 0,510006(t-1)^3 - 0,643553(t-1)^4,
 \end{aligned}$$

$$a_{21}^{(+)}(t) = 0,$$

$$\begin{aligned}
 a_{22}^{(+)}(t) \equiv a_{23}^{(+)}(t) &= -0,166666 - 0,111111(t-1) - 0,129629(t-1)^2 - \\
 &\quad - 0,23456(t-1)^3 - 0,125514(t-1)^4.
 \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться также, что точно к таким же результатам приходим при разложении элементов $a_{ij}^{(+)}(t)$, $i = \overline{1,2}$, $j = \overline{1,3}$ матрицы $A^{(+)}(t)$, полученной аналитическим путем, в соответствующие ряды Тейлора вокруг точки $t_v = 1$, что явно подтверждает простоту и эффективность предложенного ДТ-аналога.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Брайсон А., Хо Ю-Ши.** Прикладная теория оптимального управления.-М.: Мир, 1972.-544 с.
2. **Беклемишев Д.В.** Дополнительные главы линейной алгебры.-М.: Наука, 1983.- 336с.
3. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц.-М.: Наука, 1967.-575 с.
4. **Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.** Математическая теория конструирования систем управления.-М.: Высшая школа, 1998.-574 с.
5. **Симонян С. О.** К упрощению вычислительных процедур расщепления линейных динамических систем на основе дифференциально-тейлоровских преобразований //Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН.-2000.-Т.53, N3.-С. 189-193.
6. **Симонян С. О., Аветисян А. Г.** Прямой метод решения линейных многоточечных краевых задач //Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. -2002. -Т.55, N1- С. 95-103.
7. **Симонян С. О., Аветисян А. Г., Варданян Г. А.** К решению функциональных матричных уравнений операторным методом дифференциальных преобразований //Моделирование, оптимизация, управление: Сб. научн. тр. ГИУА.-2003.-Вып. 6, N2. - С.8 -15.
8. **Симонян С.О., Аветисян А.Г., Кюрегян А.Л.** Дифференциально-падеевская локальная модель непрерывных задач математического программирования // Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН.-2001.-Т.54, N1.- С. 95-103.
9. **Simonyan S. O., Avetisyan A. G.** The Method of Linear Non-Autonomus Finite Equation Set Solution on the Basis of Differential Taylor Transforms //Engineering Simulation. – 1998. - Vol. 15.- P. 407-421.
10. **Симонян С.О., Аветисян А.Г., Меликян А.В.** Дифференциально-тейлоровский аналог метода Жирара-Виета // Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН.-2004.-Т.57, N3. - С. 480-494.
11. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные спектры и модели.-Киев: Наукова думка, 1990. – 184 с.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 10.01.2005.

Ս. Ն. ՄԻՄՈՆՅԱՆ, Լ.Ա. ԲԱԴԱԼՅԱՆ

**ԳՐԵՎԻԼԼԻ ՄԵԹՈԴԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ-ԹԵՅԼՈՐՅԱՆ ՆՄԱՆԱԿԵՐՊԸ ՈՉ ԱՎՏՈՆՈՄ
ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ**

Առաջարկված է ոչ ավտոնոմ կեղծ հակադարձ մատրիցների որոշման պարզ եղանակ: Դիտարկված է մոդելային օրինակ:

S.H. SIMONYAN, L.A. BADALYAN

**DIFFERENTIAL-TAYLOR ANALOGUE OF GREVILL METHOD FOR
NONAUTONOMOUS MATRICES**

A simple method for the determination of non-autonomous pseudoinverse matrices is suggested. A model example is considered.