

М.А. МУРАДЯН, Р.В. МОВСЕСЯН

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
ДЛИТЕЛЬНОСТИ СЕГМЕНТОВ ЭКГ**

Исследована эффективность применения методов второй производной (МВП) и наименьших квадратов (МНК) к решению задачи нахождения длительности сегментов электрокардиограммы (ЭКГ). Показана эквивалентность этих двух методов. Установлено, что оптимальный, с точки зрения наименьших квадратов, фильтр можно представить в виде каскадного соединения дважды дифференцирующего и сглаживающего фильтров с характеристикой, аналогичной традиционным оконным фильтрам.

Ключевые слова: электрокардиограмма, вторая производная, наименьшие квадраты, цифровой фильтр, аддитивный шум, отношение сигнал/шум.

Автоматизированный анализ ЭКГ с применением современных персональных компьютеров в настоящее время привлекает внимание многих исследователей в области медицинского приборостроения. Программные пакеты компьютерной обработки ЭКГ позволяют определить амплитудно-временные характеристики кардиокомплексов, зубцов и интервалов и сформировать синдромное заключение в терминах клинической электрокардиографии.

Анализ электрокардиосигналов включает в себя локализацию комплексов ЭКГ для каждого отдельно взятого отведения, поиск начальных и конечных точек комплексов, выделение зубцов, составляющих каждый комплекс, и измерение амплитуд и длительностей. Измерение длительности отдельных сегментов электрических сигналов сводится к обнаружению моментов их начала и конца. Все математические методы решения этой задачи сводятся к определению моментов излома формы сигнала.

Существует множество математических методов [1] решения этой задачи, среди которых, по реализации вычислительного процесса и точности, важное место занимают МВП и МНК.

В данной работе исследуется эффективность применения этих методов к решению задачи нахождения начала и конца сегментов сигналов. Показывается эквивалентность этих двух методов. Установлено, что оптимальный, с точки зрения наименьших квадратов, фильтр можно представить в виде каскадного соединения дважды дифференцирующего фильтра и сглаживающего фильтра с характеристикой, аналогичной традиционным оконным фильтрам.

При реализации алгоритма измерения длительности сегментов ЭКГ сигнала методом второй производной считается, что в точках излома ЭКГ, т.е. в моменты начала и конца сегмента, вторая производная имеет максимальное значение (рис.1). Оценки второй производной определяются с помощью цифрового фильтра, вычисляющего вторую разность оцифрованного ЭКГ сигнала:

$$y(k) = x(k-1) - 2x(k) + x(k+1) = x(k) \otimes h_2(k), \quad (1)$$

$$h_2(k) = \delta(k-1) - 2\delta(k) + \delta(k+1), \quad (2)$$

где $x(n)$ - отсчеты оцифрованного ЭКГ сигнала; $y(n)$ - вторая разность сигнала, n - дискретное время; h_2 - импульсная функция дважды дифференцирующего фильтра.

Для проведения вычислений в реальном масштабе времени начало отсчета времени необходимо перенести с центра импульсной функции в ее начало:

$$h_2(k) = \delta(k) - 2\delta(k-1) + \delta(k-2). \quad (3)$$

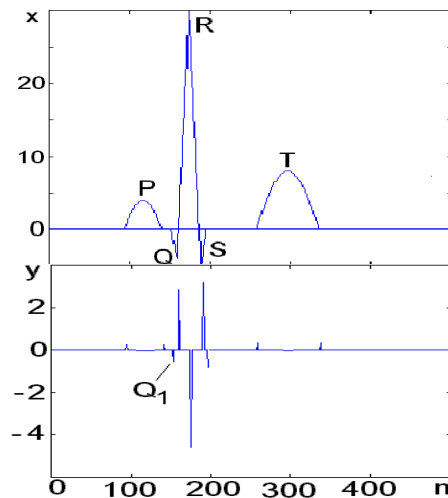


Рис. 1. ЭКГ сигнал (x) и его вторая производная (y)

Измерение и оцифрование ЭКГ сигнала всегда сопровождается наводками и шумами. По этой причине анализируемые графики (сигналы) $y(n)$ имеют дополнительные многочисленные (частные) максимумы, маскирующие интересные. Для подавления маскирующих колебаний $y(n)$ используют их фильтрацию с устранением высокочастотных составляющих. Весовая функция комбинированного фильтра, т.е. последовательное соединение сглаживающего и дважды дифференцирующего фильтров, определяется линейной сверткой:

$$h(n) = h_w(n) \otimes h_2(n), \quad (4)$$

где $h_w(n)$ - импульсная функция сглаживающего фильтра.

В качестве сглаживающего фильтра лучше всего подходят фильтры с симметрической конечной импульсной характеристикой (КИХ) "оконного" типа [2,3].

Свертке (4) соответствует передаточная функция

$$H(z^{-1}) = H_2(z^{-1})H_w(z^{-1}) = (1 - z^{-1})^2 H_w(z^{-1}). \quad (5)$$

Определение "начала" или "конца" сегментов ЭКГ сигнала МНК осуществляется с помощью следующего алгоритма. Для каждого момента k входного сигнала $x(k)$ на базе N точек производится построение наименее уклоняющегося в смысле МНК полинома второй степени ak^2+bk+c . Утверждается, что в точках изломов сигнала коэффициент a квадратичного члена полинома достигает максимума [1]. Коэффициенты a , b , c аппроксимирующего полинома находятся из условия минимизации следующего функционала:

$$F_k = \sum_{j=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} (x(k-j) - a_k(k-j)^2 - b_k(k-j) - c_k)^2 = \min, \quad (6)$$

где k – номер текущего отсчета; j – номер точки отсчета внутри скользящего интервала ($j=-(N-1)/2, \dots, -1, 0, +1, \dots, (N-1)/2$); N – нечетное натуральное число. Искомая оценка a_k определяется на этом же скользящем интервале как решение задачи (6):

$$\frac{\partial F_k}{\partial a_k} = 0, \quad \frac{\partial F_k}{\partial b_k} = 0, \quad \frac{\partial F_k}{\partial c_k} = 0. \quad (7)$$

Совместное решение уравнений (7) путем последовательного исключения b_k и c_k приводит к следующему результату:

$$a_k = \frac{1}{D} \sum_{j=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} h(j)x(k-j), \quad (8)$$

где

$$D = \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} k^4 - \frac{1}{N} \left(\sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} k^2 \right)^2, \quad (9)$$

$$h(j) = j^2 - \frac{1}{N} \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} k^2. \quad (10)$$

Значение D есть постоянная величина, поэтому для упрощения записи формул исключим ее из дальнейшего рассмотрения.

Вычисление a_k по формуле (8) соответствует выходному сигналу линейного КИХ фильтра с импульсной функцией $h(j)$. Отметим следующие свойства $h(j)$:

$$\begin{aligned} h(j) &= j^2 - \frac{1}{N} \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} k^2 = j^2 - \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{(N-1)/2} k^2, \\ h(-j) &= h(j), \quad j = 1, \dots, (N-1)/2, \\ h(0) &= -\frac{2}{N} \sum_{k=0}^{(N-1)/2} k^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Соответствующая передаточная функция имеет вид

$$H(z^{-1}) = \sum_{j=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} h(j)z^{-j}. \quad (12)$$

Перенеся начало отсчета времени с центра импульсной функции в ее начальную точку, что эквивалентно умножению $H(z^{-1})$ на $z^{-(N-1)/2}$, получим

$$H_1(z^{-1}) = z^{-(N-1)/2} H(z^{-1}) = \sum_{j=0}^{N-1} h_1(j)z^{-j}, \quad (13)$$

$$h_1(j) = (j - \frac{N-1}{2})^2 - \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{(N-1)/2} k^2, \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (14)$$

Покажем, что фильтр (13), полученный МНК, можно представить в виде каскадного соединения дважды дифференцирующего фильтра и КИХ фильтра оконного типа:

$$H_1(z^{-1}) = (1 - z^{-1})^2 H_{msm}(z^{-1}). \quad (15)$$

Для этого достаточно показать, что $H_1(z^{-1})$ имеет корень $z=1$ с кратностью не ниже двух:

$$H_1(1) = 0, \quad H_1'(1) = 0, \quad (16)$$

где $H_1'(1)$ – производная $H_1(z^{-1})$ в точке $z=1$.

Подставляя $z=1$ в (13), получим

$$\begin{aligned} H_1(1) &= \sum_{j=0}^{N-1} h_1(j) = \sum_{j=0}^{N-1} \left[(j - \frac{N-1}{2})^2 - \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{(N-1)/2} j^2 \right] = \\ &= (2 \sum_{j=0}^{(N-1)/2} j^2 - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{(N-1)/2} j^2) = (2 \sum_{j=0}^{(N-1)/2} j^2 - 2 \sum_{j=1}^{(N-1)/2} j^2) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Определим $H_1'(z^{-1})$:

$$H_1'(z^{-1}) = \sum_{j=0}^{N-1} -jh_1(j)z^{-j-1} = -z^{-1} \sum_{j=0}^{N-1} jh_1(j)z^{-j}. \quad (18)$$

Используя формулы суммы квадратов ($\sum_{k=1}^n k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$) и кубов

($\sum_{k=1}^n k^3 = n^2(n+1)^2/4$) натуральных чисел [4], из (18) получим

$$\begin{aligned} H_1'(1) &= -\sum_{j=0}^{N-1} j \left[\left(j - \frac{N-1}{2} \right)^2 - \frac{N^2-1}{12} \right] = -\sum_{j=0}^{N-1} j(j^2 - (N-1)j + \frac{(N-1)^2}{4} - \frac{N^2-1}{12}) = \\ &= -\frac{(N-1)^2 N^2}{4} + (N-1) \frac{(N-1)N(2N-1)}{6} - (\frac{(N-1)^2}{4} - \frac{N^2-1}{12}) \frac{N(N-1)}{2} = 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

В табл. 1 приведены передаточные функции общего фильтра $H_1(z^{-1})$ и его сглаживающей части $H_{msm}(z^{-1})$ для некоторых значений N . Для сравнения на рис. 2 показаны импульсные функции МНК сглаживающего фильтра (кривая hmsm) и окон Ханна и Хэмминга (кривые hn, hm) при ширине окна $M=N-2=33$.

Таблица 1

N	$H_1(z^{-1})$	$H_{msm}(z^{-1})$
5	$2-z^{-1}-2z^{-2}-z^{-3}+2z^{-4}$	$2+3z^{-1}+2z^{-2}$
7	$5-3z^{-1}-4z^{-2}-3z^{-3}+5z^{-6}$	$5+10z^{-1}+12z^{-2}+10z^{-3}+5z^{-4}$
9	$28+7z^{-1}-8z^{-2}+17z^{-3}-20z^{-4}-17z^{-5}-8z^{-6}+7z^{-7}+28z^{-8}$	$28+63z^{-1}+90z^{-2}+100z^{-3}+90z^{-4}+63z^{-5}+28z^{-6}$
11	$15+6z^{-1}-z^{-2}-6z^{-3}-9z^{-4}-10z^{-5}-9z^{-6}-6z^{-7}-z^{-8}+6z^{-9}+15z^{-10}$	$15+36z^{-1}+56z^{-2}+70z^{-3}+75z^{-4}+70z^{-5}+56z^{-6}+36z^{-7}+15z^{-8}$
13	$22+11z^{-1}+2z^{-2}-5z^{-3}-10z^{-4}-13z^{-5}-14z^{-6}-13z^{-7}-10z^{-8}-5z^{-9}+2z^{-10}+11z^{-11}+22z^{-12}$	$22+55z^{-1}+90z^{-2}+120z^{-3}+140z^{-4}+147z^{-5}+140z^{-6}+120z^{-7}+90z^{-8}+55z^{-9}+22z^{-10}$

Исследована эффективность применения сглаживающих оконных и МНК фильтров для оценки второй разности ЭКГ сигналов. В качестве критерия для сравнения и выбора подходящих сглаживающих фильтров ("окон") использовано отношение сигнал/шум на выходе комбинированного фильтра:

$$\eta_y = y / \sigma, \quad (19)$$

где y - значение оценки второй производной ЭКГ сигнала в точке излома; σ_y - среднеквадратическое отклонение этой оценки.

Условие максимизации η труднее всего обеспечить для тех точек изломов, которые находятся между сегментами наименьшей длины [1,3]. Поэтому в данной работе исследования проводились для точки излома $Q_{\text{ж}}$, соответствующей началу Q зубца (можно представить аналогичные данные и для других точек излома).

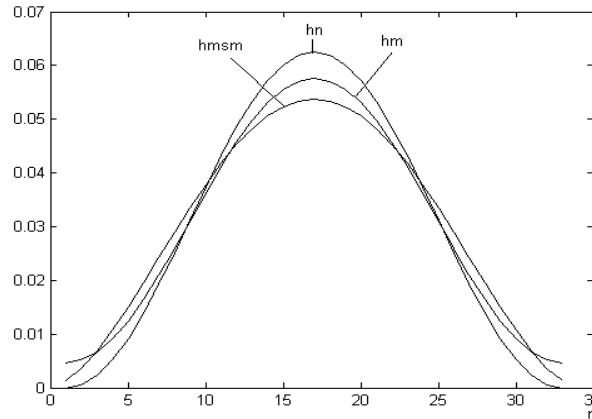


Рис. 2. Импульсные функции МНК сглаживающего фильтра (hmsm) и окон Ханна и Хэмминга (hn, hm)

Исследование эффективности применения комбинированных фильтров к анализу ЭКГ проводилось путем моделирования оцифрованного ЭКГ сигнала в программной среде MATLAB. В процессе моделирования к сигналу, представленному на рис. 1, добавляется аддитивный широкополосный шум с дисперсией σ_x и нижней частотой спектра F_c .

На рис. 3 представлены зависимости $L_{yx}=20\lg(\eta_y/\eta_x)$ от нижней частоты аддитивного широкополосного шума при частоте дискретизации $F_s=2000$ Гц для оконных фильтров: прямоугольного, Ханна, Хэмминга, Блэкмана, Кайзера и МНК (соответственно: hr, hn, hm, hb, hk, hmsm).

Полоса частот шума в ЭКГ обычно перекрывается с полосой полезного сигнала и зависит от конкретных условий измерения ЭКГ. Поэтому следует определить эффективность применения определенного типа "окна" в зависимости от полосы частот шума. С этой целью были проведены моделирования для разных значений F_c и F_s . Результаты представлены в табл.2.

Как следует из данных табл. 2, в зависимости от нижней частоты диапазона шума оптимальными могут оказаться разные окна. В случае, когда низшая частота шума больше 30 Гц и меньше 45 Гц, лучшие результаты можно получить с помощью МНК (хотя и другие окна: Кайзера, Хэннинга Хемминга и Блэкмана, дают аналогичные результаты), при $F_c > 45$ Гц окна Блэкмана обеспечивают наибольшее подавление шума.

Таблица 2

Тип окна	F_c , Гц		F_s , Гц				
			500	1000	1500	2000	4000
Прямоуг.	0	η_y/η_x	0,565	0,808	0,995	1,152	1,641
		M	11	21	31	41	83
Прямоуг.	25	η_y/η_x	0,641	0,911	1,147	1,320	1,891
		M	11	21	33	45	89
Кайзер Блэкман	35	η_y/η_x	0,986	1,377	1,768	2,000	2,873
		M	17	35	53	69	139
Блэкман Хэннинг	40	η_y/η_x	2,019	2,723	3,707	4,127	6,047
		M	19	37	57	75	151
Блэкман	45	η_y/η_x	6,850	9,557	13,89	15,47	23,00
		M	21	39	59	79	157
Блэкман	50	η_y/η_x	21,23	28,64	41,35	46,54	67,69
		M	19	37	57	75	149
МНК	35	η_y/η_x	1,042	1,4263	1,8213	2,0513	2,9422
		M	15	31	47	63	129
МНК	40	η_y/η_x	2,3619	2,8950	3,8821	4,3302	6,2533
		M	17	33	51	69	139

Выделение точек излома ЭКГ производится путем сравнения значений $\text{abs}(y(n))$ с некоторым заданным порогом $g\sigma_y$: если $\text{abs}(y(n)) \geq g\sigma_y$, то считается, что пик в $y(n)$ соответствует излому ЭКГ, в противном случае - пик считается ложным. Коэффициент g определяет требуемую достоверность оценки. Например, вероятность превышения ложного пика порога $3\sigma_y$ меньше 0,01. Заданное значение g определяет необходимое минимальное значение отношения сигнал/шум η_y .

Выбор типа и параметров сглаживающего фильтра производится с помощью таблиц, аналогичных табл. 2. Для известного значения η_x определяются значения η_y путем умножения значений η_y/η_x на η_x (масштабирование таблицы), далее для требуемого значения η_y из масштабированной таблицы определяются тип и длина окна, а также необходимая минимальная частота дискретизации F_s .

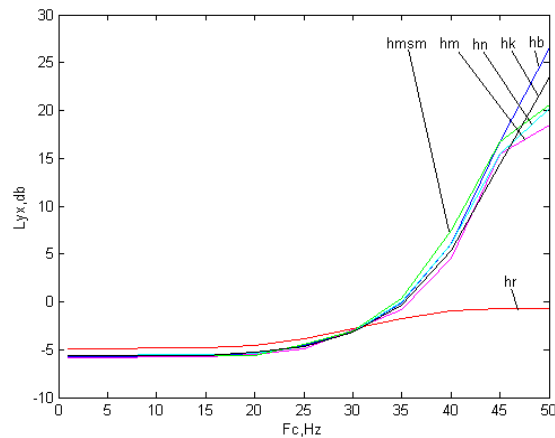


Рис. 3. Зависимость $L_{xy} = 20\lg(\eta_y/\eta_x)$ от нижней частоты широкополосного шума при $F_s = 2000 \text{ Гц}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лебедев В.В., Калантар В.А., Аракчеев А.Г. и др. Алгоритмы измерения комплексов ЭКГ // Медицинская техника. - 1988. - ¹ 5. - С. 6-14.
2. Jackson L.B. Digital Filters and Signal Processing. - 1996. - 657p.
3. Мурадян М.А., Мовсесян Р.В. Исследование цифровых методов анализа кардиосигнала // Моделирование, оптимизация, управление. - 2001. - Вып. 4. - С. 128-133.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1974. - 831с.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 22.12.2004.

Մ.Ա. ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ, Ռ.Վ. ՄՈՎՍԵՍՅԱՆ

**ՆՎԱԶԱԳՈՒՅՆ ՔԱՌԱԿՈՒՄԻՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ ԷԼԵԿՏՐԱՍՐՏԱԳՐԻ
ԱԶԴԱՆՇԱՆԻ ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԻ ՏԵՎՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՀԱՄԱՐ**

Հետազոտվել է էլեկտրասրտագրի ազդանշանի հատվածների տևողությունների որոշման համար երկրորդ ասանցյալի և նվազագույն միջին քառակուսիների մեթոդների արդյունավետությունը: Ցույց է տրված այդ մեթոդների համարժեքությունը: Հաստատված է, որ նվազագույն միջին քառակուսիների իմաստով օպտիմալ զտիչը կարելի է ներկայացնել կրկնակի դիֆերենցող և պատուհանաձև բնութագրով հարթեցնող զտիչների հաջորդական միացման տեսքով:

M.A. MURADYAN, R.W. MOVSESYAN

**APPLICATION OF MEAN SQUARE MINIMUM METHOD TO DETERMINATION OF ECG
SEGMENTS DURATION**

The efficiency of the second derivative and mean square minimum methods' applications to the determination of ECG signal segments duration is investigated. The equivalency of two mentioned methods is shown. The overall mean square minimum optimized filter is represented as cascade connection of the second order differentiating and averaging filters. The averaging filter has characteristics similar to window functions.