

Г. Д. АКОПДЖАНЫН, В.С. САФАРЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОРОДНЫХ ЦЕПНЫХ СХЕМ

На основе алгебры структурных чисел получены общие формулы для определения входных сопротивлений и передаточных функций по напряжению однородной цепной схемы. Алгоритм реализован в виде программы для решения задач на ЭВМ.

Ключевые слова: цепная схема, четырехполюсник, передаточная функция, рекуррентные соотношения.

Известно, что однородные электрические цепи с распределенными параметрами могут быть представлены каскадно-соединенными одинаковыми симметричными четырехполюсниками - однородной цепной схемой. При исследовании и расчете таких схем практический интерес представляет нахождение передаточных функций (по напряжению, току) между различными ступенями цепной схемы (рис. 1).

Имеются соотношения, определяющие передаточные функции всей цепной схемы с n элементами (U_{n+1}/U_1) [1]. Интерес представляет также определение промежуточных передаточных функций типа U_{i+1}/U_1 ($i=1, \dots, n$), т.е. с выхода i -го элемента к входу цепной схемы.

В настоящей статье, пользуясь алгеброй структурных чисел, выводится общая формула для определения передаточных функций по напряжению однородной цепной схемы от выхода любого i -го элемента к входу цепной схемы.

Указанным путем для определения коэффициента передачи четырехполюсника (рис. 2) по напряжению получена формула [2]

$$K_u = \frac{U_b}{U_a} = \left(\frac{Z_b - Z_{ba}}{Z_a} \right)^{1/2}, \quad (1)$$

где Z_a и Z_b - входные сопротивления четырехполюсника со стороны входных (a, a') и выходных (b, b') зажимов при холостом ходе; Z_{ba} - входное сопротивление со стороны выходных зажимов при короткозамкнутых входных зажимах.

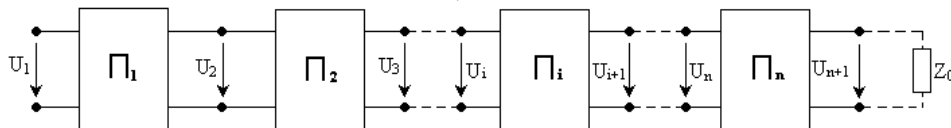


Рис. 1

Предварительно рассмотрим работу однородной цепной схемы в режиме холостого хода ($Z_0 = \infty$, рис. 1).

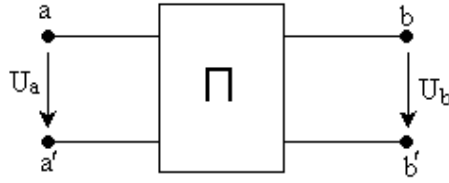


Рис. 2

Объединив первые $(1, \dots, i)$ и последующие $(i+1, \dots, n)$ одинаковые симметричные четырехполюсные элементы в единые четырехполюсники, приведем схему, представленную на рис.1, к каскадному соединению двух симметричных четырехполюсников (рис. 3).

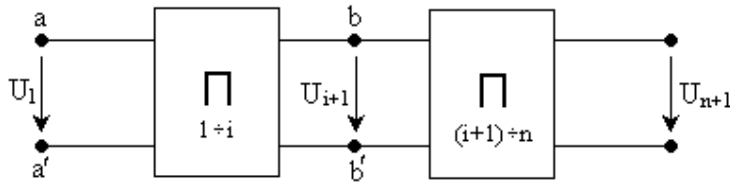


Рис. 3

Применив формулу (1) к схеме на рис. 3, будем иметь

$$K_{ui}^2 = \frac{U_{i+1}^2}{U_1^2} = \frac{\frac{Z_{ia}Z_{(n-i)a}}{Z_{ia} + Z_{(n-i)a}} - \frac{Z_{iab}Z_{(n-i)a}}{Z_{iab} + Z_{(n-i)a}}}{Z_{na}} = \frac{Z_{(n-i)a}}{Z_{na}} \left(\frac{Z_{ia}}{Z_{ia} + Z_{(n-i)a}} - \frac{Z_{iab}}{Z_{iab} + Z_{(n-i)a}} \right), \quad (2)$$

где Z_{ia} и Z_{iab} - входные сопротивления левого четырехполюсника (рис. 3), соответственно, в режимах холостого хода и короткого замыкания; $Z_{(n-i)a}$ - входное сопротивление правого четырехполюсника; Z_{na} - входное сопротивление всей цепной схемы в режиме холостого хода. В (2) первые индексы у сопротивлений $(Z_{ia}, Z_{(n-i)a})$ означают количество четырехполюсников, объединенных в одном (рис.3).

Для сопротивлений Z_{ia} и Z_{iab} можно записать следующие рекуррентные соотношения [2]:

$$Z_{ia} = \frac{Z_{(i-1)a} + Z_{ab}}{Z_{(i-1)a} + Z_a} Z_a, \quad Z_{iab} = \frac{Z_{(i-1)ab} + Z_{ab}}{Z_{(i-1)ab} + Z_a} Z_a \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где $Z_{ab} = Z_{lab}$, $Z_a = Z_{la}$ - соответствующие входные сопротивления одного четырехполюсника (рис. 2).

Из соотношений (3) можно получить

$$Z_{ia} Z_{iab} = Z_a Z_{ab} = Z_c^2, \quad (4)$$

где Z_c - характеристическое сопротивление четырехполюсника.

Рассматривая цепную схему с бесконечным числом симметричных четырехполюсников ($n \rightarrow \infty$), будем иметь $Z_{\infty a} = Z_{\infty ab} = Z_c$. Пользуясь методом математической индукции, докажем справедливость соотношения (4). Покажем, что выражение (4) имеет место при $i = 2$. Исходя из равенств (3), запишем

$$Z_{2a} = \frac{Z_a + Z_{ab}}{Z_a + Z_a} Z_a = \frac{Z_a + Z_{ab}}{2},$$

$$Z_{2ab} = \frac{Z_{ab} + Z_{ab}}{Z_{ab} + Z_a} Z_a = \frac{2Z_{ab}}{Z_{ab} + Z_a} Z_a,$$

при умножении которых получим

$$Z_{2a} Z_{2ab} = Z_a Z_{ab}.$$

Приняв, что равенство (4) имеет место при $(i - 1)$, покажем, что оно будет иметь место также при i :

$$\begin{aligned} Z_{ia} Z_{iab} &= \frac{(Z_{(i-1)a} + Z_{ab})(Z_{(i-1)ab} + Z_{ab})}{(Z_{(i-1)a} + Z_a)(Z_{(i-1)ab} + Z_a)} Z_a^2 = \\ &= \frac{Z_{(i-1)a} Z_{(i-1)ab} + Z_{(i-1)a} Z_{ab} + Z_{ab} Z_{(i-1)ab} + Z_{ab}^2}{Z_{(i-1)a} Z_{(i-1)ab} + Z_{(i-1)a} Z_a + Z_a Z_{(i-1)ab} + Z_a^2} Z_a^2 = \\ &= \frac{Z_{ab}(Z_a + Z_{(i-1)a} + Z_{(i-1)ab} + Z_{ab})}{Z_a(Z_{ab} + Z_{(i-1)a} + Z_{(i-1)ab} + Z_a)} Z_a^2 = Z_a Z_{ab}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_{(n-i)a}}{Z_{na}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Z_{(n-i)a} = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_{(n-i)ab} = Z_c,$$

определим коэффициент передачи при $n \rightarrow \infty$.

Из выражения (2) будем иметь

$$\begin{aligned} K_{ui}^2 &= \frac{Z_{ia}}{Z_{ia} + \sqrt{Z_a Z_{ab}}} - \frac{Z_{iab}}{Z_{iab} + \sqrt{Z_a Z_{ab}}} = \frac{\sqrt{Z_a Z_{ab}}(Z_{ia} - Z_{iab})}{2Z_a Z_{ab} + \sqrt{Z_a Z_{ab}}(Z_{ia} + Z_{iab})} = \\ &= \frac{Z_{ia} - Z_{iab}}{2\sqrt{Z_a Z_{ab}} + Z_{ia} + Z_{iab}} = \frac{Z_{ia} - Z_{iab}}{(\sqrt{Z_{ia}} + \sqrt{Z_{iab}})^2} = \frac{\sqrt{Z_{ia}} - \sqrt{Z_{iab}}}{\sqrt{Z_{ia}} + \sqrt{Z_{iab}}}. \end{aligned}$$

Таким образом, при $n \rightarrow \infty$ коэффициент передачи определится из соотношения

$$K_{ui}^2 = \frac{\sqrt{Z_{ia}} - \sqrt{Z_{iab}}}{\sqrt{Z_{ia}} + \sqrt{Z_{iab}}}. \quad (5)$$

Учитывая, что рассматривается цепная схема с бесконечным числом звеньев, следует считать, что все четырехполюсники, входящие в состав цепной схемы, находятся в одинаковых условиях и загружены на характеристическое сопротивление.

Можно показать, что

$$\frac{\sqrt{Z_{ia}} - \sqrt{Z_{iab}}}{\sqrt{Z_{ia}} + \sqrt{Z_{iab}}} = \left(\frac{\sqrt{Z_a} - \sqrt{Z_{ab}}}{\sqrt{Z_a} + \sqrt{Z_{ab}}} \right)^i. \quad (6)$$

Таким образом, при $n \rightarrow \infty$ коэффициент передачи определится по формуле

$$K_{ui} = C^{i/2}, \quad (7)$$

где $C = \frac{\sqrt{Z_a} - \sqrt{Z_{ab}}}{\sqrt{Z_a} + \sqrt{Z_{ab}}}$

Рассмотрим совместно соотношения (4) и (6) и решим их относительно Z_{ia} и Z_{iab} . В результате получим

$$Z_{ia} = \frac{1 + C^i}{1 - C^i} Z_C, \quad (8)$$

$$Z_{iab} = \frac{1 - C^i}{1 + C^i} Z_C. \quad (9)$$

Полученные соотношения (8) и (9) дают возможность через параметры одного четырехполюсника (Z_a и Z_{ab}) определить входные сопротивления всей симметричной цепной схемы в зависимости от количества входящих в ее состав звеньев (четырёхполюсников).

Подставив (8) и (9) в (2), после преобразований получим

$$K_{ui} = \frac{1 + C^{n-i}}{1 + C^n} C^{i/2}. \quad (10)$$

Это выражение дает возможность определить промежуточные передаточные функции (U_{i+1}/U_i) симметричной цепной схемы по напряжению при работе ее в режиме холостого хода.

Теперь рассмотрим однородную цепную схему, нагруженную на сопротивление Z_0 (рис.1). Для определения входного сопротивления Z_{na}^0 нагруженной цепной схемы представим ее в виде рис. 4.

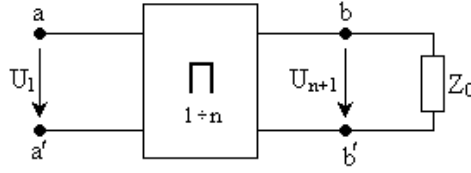


Рис. 4

Входное сопротивление такой цепи определяется по формуле [2]

$$Z_{na}^0 = \frac{Z_{nab}Z_{na} + Z_{na}Z_0}{Z_{na} + Z_0}.$$

Подставляя значения сопротивлений Z_{nab} , Z_{na} для цепной схемы с n звеньями, получим

$$Z_{na}^0 = \frac{1 + \alpha C^n}{1 - \alpha C^n} Z_C, \quad (11)$$

где $\alpha = (Z_0 - Z_C)/(Z_0 + Z_C)$.

Передаточную функцию по напряжению для цепной схемы, нагруженной на сопротивление Z_0 , запишем по аналогии с рассмотренным выше случаем (холостой ход цепной схемы) в виде выражения (2) с заменой в ней $Z_{(n-i)a}$ на $Z_{(n-i)a}^0$:

$$K_{ui}^2 = \frac{Z_{(n-i)a}^0}{Z_{na}^0} \left(\frac{Z_{ia}}{Z_{ia} + Z_{(n-i)a}^0} - \frac{Z_{iab}}{Z_{iab} + Z_{(n-i)a}^0} \right). \quad (12)$$

Подставляя значения входных сопротивлений из (8), (9) и (11) в (12) и производя алгебраические преобразования, получим

$$K_{ui} = \frac{1 + \alpha C^{n-i}}{1 + \alpha C^n} C^{i/2}. \quad (13)$$

Таким образом, получены выражения, определяющие: 1) входное сопротивление нагруженной симметричной цепной схемы в зависимости от числа звеньев и сопротивления нагрузки (11); 2) передачную функцию и все промежуточные передаточные функции нагруженной симметричной цепной схемы в зависимости от числа звеньев и сопротивления нагрузки (13).

В частных случаях:

- а) при режиме холостого хода $\alpha = 1$, и для определения передаточной функции получаем выражение (10);
- б) при режиме короткого замыкания $\alpha = -1$, и передаточные функции определяются из выражения

$$K_{ui} = \frac{1 - C^{n-i}}{1 - C^n} C^{i/2};$$

- в) при согласованной нагрузке ($Z_0 = Z_C$), $\alpha = 0$ и $K_{ui} = C^{i/2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Нейман Л.Р., Демирчян К.С.** Теоретические основы электротехники. - Л.: Энергоиздат, 1981. - 522 с.
2. **Беллерт С., Возняцки Г.** Анализ и синтез электрических цепей методом структурных чисел. - М.: Мир, 1972. - 332 с.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 26.12.2003.

Գ.Դ. ՀԱԿՈԲՋԱՆՅԱՆ, Վ.Ս. ՄԱՖԱՐՅԱՆ

ՀԱՄԱՄԵՌ ՇՂԹԱՅԱԿԱՆ ՄԽԵՄԱՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆ

Կառուցվածքային թվերի հանրահաշվի հիման վրա ստացվել են ընդհանուր արտահայտություններ համասեռ շղթայական սխեմայի մուտքային դիմադրության և լարման փոխանցման ֆունկցիայի որոշման համար: Մշակված ալգորիթմի հիման վրա կազմվել է համակարգչային ծրագիր՝ Delphi-7 ալգորիթմական լեզվով:

G. D. HAKOBIJANYAN, V. S. SAFARYAN

ON THE STUDY OF HOMOGENEOUS CHAIN CIRCUITS

Using algebra of structural numbers general formulas for determination of input resistance and transmission functions according to voltage homogeneous chain circuits are obtained. The algorithm is used as a program for solving tasks on a computer.