ISSN 0002-306X. Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2005. Т. LVIII, № 1.

УДК 621.396.671 ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

М.А. АРАМЯН, А.М. АРАМЯН

О МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Предложен физический метод исследования электромагнитного поля, позволяющий из линейных уравнений $M = kN$ установить полную систему электродинамики Максвелла.

Ключевые слова: уравнение, среда, напряженность, поле, электродинамика.

Введение. Принято, что исторически завершенной областью, полностью поддающейся дедуктивному рассмотрению, является классическая электродинамика Максвелла [1-12]. На основе экспериментальных законов Ома, Кирхгофа, Био-Савара и опираясь на результаты Фарадея, Максвелл в своих трудах обобщил известные к тому времени сведения об электричестве и магнетизме. Его основные уравнения

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{1.1}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1.2}$$

включают в себя не только все полученные ранее данные, но и экспериментальные данные последующих десятилетий.

В уравнениях Максвелла векторы магнитной $\vec{H}$ и электрической $\vec{E}$ напряженностей, магнитной индукции $\vec{B}$ и электрического смещения $\vec{D}$ предполагаются во всем пространстве конечными. Кроме того, они во всех обыкновенных точках (в окрестностях которых свойства среды остаются неизменными) являются непрерывными функциями координат и времени, обладающими непрерывными производными.

Первое уравнение Максвелла является обобщением закона полного тока и утверждает, что плотность тока смещения $\partial \vec{D}/\partial t$ связана с магнитным полем так же, как и плотность тока проводимости $\vec{\delta}$. Второе уравнение Максвелла представляет собой закон электромагнитной индукции Фарадея в дифференциальной форме записи.

Первое дополнительное уравнение (третье уравнение Максвелла) выражает отсутствие источников у векторов магнитной индукции $\vec{B}$:

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0. \tag{1.3}$$

Второе дополнительное уравнение (четвертое уравнение Максвелла), которое представляет собой теорему Гаусса в дифференциальной форме, утверждает, что источником вектора электрического смещения $\vec{D}$ является плотность заряда ρ:

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho. \tag{1.4}$$

Если диэлектрическая ε и магнитная μ проницаемости, а также удельная электропроводность σ являются постоянными величинами, не зависящими от температуры и векторов поля $\vec{B}$ и $\vec{D}$, то между векторами $\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{H}$, $\vec{\delta}$, $\vec{E}$ существуют линейные соотношения, зависящие от той среды, где исследуется поле

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}, \qquad \vec{\delta} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_c), \tag{1.5}$$

где $\vec{E}_c$ - сторонняя напряженность поля, образующая электродвижущую силу.

В систему уравнений Максвелла включают и уравнения плотности энергии электромагнитного поля:

$$w = \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{H}\vec{B}. \tag{1.6}$$

В развитие электромагнитного поля внесли свой весомый вклад Герц, Лоренц и другие великие ученые. При этом усреднение микроскопических уравнений Максвелла было произведено Лоренцом.

Достаточно иметь систему уравнений (1.1)-(1.6), чтобы однозначно определить электромагнитное поле. А это означает, решить в первую очередь главную задачу – определить подлежащие измерению величины H и E векторов $\vec{H}$ и $\vec{E}$. Это является основной проблемой электромагнитного и других векторных полей, хотя выражения физических законов в векторной форме отличаются изяществом и лаконичностью.

В наших исследованиях [13-20] при решении некоторых задач по определению усредненных параметров неоднородных материалов регулярных структур оказалось возможным установить не векторые, а скалярные уравнения между макроскопическими величинами напряженности магнитного поля H и электрического смещения D:

$$\frac{1}{k}H = D, \tag{1.7}$$

а также между макроскопическими величинами напряженности электрического поля E и магнитной индукции B:

$$\frac{1}{k}E = B. \tag{1.8}$$

Дальнейшие исследования показали, что линейные функции (1.7) и (1.8) позволяют установить полную систему уравнений электромагнитного

поля и являются аналогом уравнений Максвелла (1.1) и (1.2) в скалярной форме записи.
Вид уравнений макроскопической электродинамики и входящих в них физических величин существенно зависит от физической природы исследуемой материальной среды и характера изменения поля во времени. Поэтому рассмотрим электромагнитное поле в различных материальных средах.

1. Электромагнитное поле в вакууме с электрической ε_0 и магнитной μ_0 постоянными. Для вывода системы уравнений электромагнитного поля в исследуемом пространстве воспользуемся принципом постоянства скорости света. Согласно этому принципу, скорость света c в вакууме, как одна из основных физических постоянных, не зависит от движения его источника или приемника [11]. Тогда в декартовой системе координат в движущейся S' и "покоящейся" (ньютоновой) S инерциальных системах отсчета вдоль оси абсцисс существуют линейные зависимости [11]:

$$x' = ct', \tag{2.1}$$

$$x = ct, \tag{2.2}$$

где x' и t' - координата абсцисс и время, измеренные наблюдателем в системе S'; x и t - аналогичные величины, измеренные в системе S.
Предполагается, что источник света (или электромагнитной волны) в момент времени $t' = t = 0$ неподвижно расположен в совпадающих в этот момент времени началах отсчета систем S и S'.
Итак, для двух произвольных физических величин (координат и времени) имеют место линейные зависимости (2.1) и (2.2).
Однородность и изотропность межгалактического пространства (вакуума) позволяют утверждать, что аналогичные (2.1) и (2.2) линейные зависимости должны иметь место и между двумя соответствующими физическими величинами, входящими в уравнения электромагнитного поля (и других физических законов). При этом, если нами определена одна физическая величина, то в природе существует другая физическая величина, и между ними имеют место линейные зависимости, аналогичные (2.1) и (2.2). Причиной таких зависимостей являются именно линейные функции (1.1) и (1.2), в которых для однородных и изотропных материальных сред коэффициент пропорциональности равен скорости v, меньшей скорости света $v < c$. При этом линейные зависимости между напряженностью магнитного поля H и электрическим смещением D для вакуума равны

$$\frac{1}{c}H = D = \varepsilon_0 E, \tag{2.3}$$

а для материальной среды:

$$\frac{1}{v}H = D = \varepsilon E. \tag{2.4}$$

Линейные зависимости между напряженностью электрического поля E и магнитной индукцией B для вакуума равны

$$\frac{1}{c}E = B = \mu_0 H, \tag{2.5}$$

а для материальной среды:

$$\frac{1}{v}E = B = \mu H \tag{2.6}$$

и т.д., т.е. исходят именно из зависимостей между x и t для вакуума:

$$\frac{1}{c}x = t \tag{2.7}$$

и для материальной среды:

$$\frac{1}{v}x = t. \tag{2.8}$$

Покажем это, учитывая границы раздела макроскопической электродинамики и квантовой механики [10].

Пусть теперь нами определена одна физическая величина M, которая представляет собой энергию массы покоя элементарной частицы $M = W$, *Дж.* Тогда другая физическая величина N будет представлять собой импульс этой частицы $N = P$, *Дж(с/м.* Если же определенная нами физическая величина M представляет собой плотность тока проводимости $M = \delta$, *А/м*, то другая физическая величина N будет представлять собой объемную плотность заряда $N = \rho$, *А(с/м³* и т.д.

Предположим, что физическая величина M представляет собой напряженность магнитного поля $M = H$, *А/м.* Тогда величина N представляет собой электрическое смещение $N = D$, *А(с/м²*. Действительно, умножая обе части уравнений (2.7) и (2.8) на напряженность магнитного поля H

$$\frac{1}{c}Hx = Ht, \tag{2.9}$$

$$\frac{1}{v}Hx = Ht, \tag{2.10}$$

можно установить аналогичные (2.7) и (2.8) уравнения между H и D:

$$\frac{1}{c}H = D = \varepsilon_0 E, \tag{2.11}$$

$$\frac{1}{v}H = D = \varepsilon E. \tag{2.12}$$

Если предположить, что определенная нами физическая величина M представляет собой напряженность электрического поля $M = E$, *В/м*, то величина N будет представлять собой магнитную индукцию $N = B$, *В-с/м²*.

Действительно, теперь умножая обе части уравнений (2.7) и (2.8) на напряженность электрического поля

$$\frac{1}{c}Ex = Et, \tag{2.13}$$

$$\frac{1}{v}Ex = Et, \tag{2.14}$$

можно установить уравнения между E и B:

$$\frac{1}{c}E = B = \mu_0 H, \tag{2.15}$$

$$\frac{1}{v}E = B = \mu H. \tag{2.16}$$

Аналогичным образом можно установить уравнения между двумя соответствующими физическими величинами M и N для вакуума:

$$\frac{1}{c}M = N \tag{2.17}$$

и для материальной среды:

$$\frac{1}{v}M = N. \tag{2.18}$$

Покажем теперь, что уравнения (1.7) и (1.8) позволяют установить всю систему уравнений электромагнитного поля в исследуемой среде.

Сначала покажем что, преобразуя уравнения (1.7) и (1.8), можно получить соответственно первое и второе уравнения Максвелла (1.1) и (1.2) для вакуума.

С этой целью представим векторы $\vec{H}$ и $\vec{E}$ в декартовой системе координат:

$$\vec{H} = \hat{i}H_X + \hat{j}H_Y + \hat{k}H_Z, \tag{2.19}$$

$$\vec{E} = \hat{i}E_X + \hat{j}E_Y + \hat{k}E_Z. \tag{2.20}$$

Векторы $\vec{H}$ и $\vec{E}$ будут функцией только одной координаты x, так как рассматриваем распространение световой электромагнитной волны вдоль оси абсцисс (2.1) и (2.2). Тогда все производные этих величин по координатам y и z будут равны нулю. Поэтому для производных по x, y и z, с учетом (2), будем иметь

$$\pm\frac{\partial}{\partial x} = \pm\frac{\partial}{c\partial t}, \qquad \pm\frac{\partial}{\partial y} = 0, \qquad \pm\frac{\partial}{\partial z} = 0. \tag{2.21}$$

Отрицательный знак соответствует плоской волне, распространяющейся в положительном направлении оси абсцисс, а положительный знак - волне, распространяющейся в отрицательном направлении этой же оси.

Как известно [10], в рассматриваемом нами случае векторы $\hat{i}, \vec{E}, \vec{H}$ или, после циклической перестановки, $\vec{E}, \vec{H}, \hat{i}$ образуют ортогональную правую систему. Теперь $\vec{H}$ и $\vec{D}$ можно представить в виде

$$\vec{H} = \hat{k} H, \tag{2.22}$$

$$\vec{D} = \hat{j} D. \tag{2.23}$$

Так как векторное произведение $\hat{i}$ и $\hat{k}$ равно

$$-\left[\hat{i} \times \hat{k}\right] = \hat{j}, \tag{2.24}$$

то уравнение (1.7) можно представить в векторной форме записи:

$$-\frac{1}{c} H \left[\hat{i} \times \hat{k}\right] = \vec{D}. \tag{2.25}$$

Если учесть, что в плоскости, перпендикулярной оси абсцисс, величины H и E постоянны, то соотношение (2.25) можно переписать в эквивалентном виде:

$$-\frac{1}{c}\left[\hat{i} \times \vec{H}\right] = \vec{D}. \tag{2.26}$$

В декартовой системе координат векторное произведение единичного вектора $\hat{i}$ и вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}$ равно

$$\left[\hat{i} \times \vec{H}\right] = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ H_X & H_Y & H_Z \end{vmatrix}. \tag{2.27}$$

Тогда условия (2.21) позволяют из (2.26), с учетом (2.27), получить

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[\hat{i} \times \vec{H}\right] = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ H_X & H_Y & H_Z \end{vmatrix} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \tag{2.28}$$

Определитель в этом выражении представляет собой ротор вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}$ для плоской электромагнитной волны, распространенной вдоль оси абсцисс:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \tag{2.29}$$

При выводе (2.29) имеем

$$\vec{D} = \hat{j}\,D = \hat{j}\,D_Y, \tag{2.30}$$

$$\vec{H} = \hat{k}\,H = \hat{k}\,H_Z. \tag{2.31}$$

При рассмотрении распространения световой электромагнитной волны вдоль оси ординат y аналогичным образом можно получить уравнение

$$\vec{D} = \hat{k}\,D = \hat{k}\,D_Z, \tag{2.32}$$

$$\vec{H} = \hat{i}\,H = \hat{i}\,H_X. \tag{2.33}$$

Подобным образом можно вывести уравнение (2.28), если исследовать распространение плоской волны вдоль оси z. В этом случае для электрического смещения и напряженности магнитного поля можно получить

$$\vec{D} = \hat{i}\,D = \hat{i}\,D_X, \tag{2.34}$$

$$\vec{H} = \hat{j}\,H = \hat{j}\,H_Y. \tag{2.35}$$

Пользуясь принципом суперпозиции, согласно (2.19) и (2.20), для $\vec{H}$ и $\vec{D}$ имеем

$$\vec{D} = \hat{i}\,D_X + \hat{j}\,D_Y + \hat{k}\,D_Z = \frac{1}{c}(\hat{i}\,H_Y + \hat{j}\,H_Z + \hat{k}\,H_X) = \frac{1}{c}\vec{H}, \tag{2.36}$$

где

$$\vec{H} = -([\hat{k}\times\hat{j}]H_Y + [\hat{i}\times\hat{k}]H_Z + [\hat{j}\times\hat{i}]H_X). \tag{2.37}$$

Подставляя значения составляющих вектора электрического смещения в (2.36), получим

$$\vec{D} = -\frac{1}{c}([\hat{k}\times\hat{j}]H_Y + [\hat{i}\times\hat{k}]H_Z + [\hat{j}\times\hat{i}]H_X). \tag{2.38}$$

Производное этого выражения по времени дает постулированное Максвеллом первое уравнение для вакуума:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \partial\vec{D}/\partial t. \tag{2.39}$$

Теперь покажем, что, проводя аналогичное преобразование, можно из (1.8) получить второе уравнение Максвелла. Учитывая указанную выше ортогональную систему векторов $\vec{E}, \vec{H}, \hat{i}$, при рассмотрении распространения световой волны вдоль оси абсцисс векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ можно представить в виде

$$\vec{E} = \hat{j}\,E = \hat{j}\,E_Y, \tag{2.40}$$

$$\vec{B} = \hat{k}\,B = \hat{k}\,B_Z. \tag{2.41}$$

Если учесть, что $[\hat{i}\times\hat{j}]=\hat{k}$, то уравнение (1.8) в векторной форме примет вид

$$\frac{1}{c}E[\hat{i}\times\hat{j}]=-\hat{k}B$$

или

$$\frac{1}{c}[\hat{i}\times\vec{E}]=-\vec{B}. \qquad (2.42)$$

Производное этого выражения по времени дает второе уравнение Максвелла для плоской электромагнитной волны, распространяемой вдоль оси абсцисс:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}=-\partial\vec{B}\big/\partial t. \qquad (2.43)$$

К аналогичному результату можно прийти, рассматривая распространение световой волны вдоль оси y, где для $\vec{E}$ и $\vec{B}$ имеем

$$\vec{E}=\hat{k}E=\hat{k}E_Z, \qquad (2.44)$$

$$\vec{B}=\hat{i}B=\hat{i}B_X, \qquad (2.45)$$

и вдоль оси z, где $\vec{E}$ и $\vec{B}$ равны

$$\vec{E}=\hat{i}E=\hat{i}E_X, \qquad (2.46)$$

$$\vec{B}=\hat{j}B=\hat{j}B_Y. \qquad (2.47)$$

Наложение составляющих напряженности электрического поля (типа (2.42)) позволяет получить

$$-\frac{1}{c}([\hat{k}\times\hat{i}]E_X+[\hat{i}\times\hat{j}]E_Y+[\hat{j}\times\hat{k}]E_Z)=-\vec{B}. \qquad (2.48)$$

Производное этого выражения по времени дает второе уравнение Максвелла при рассмотрении электромагнитной волны вдоль произвольно направленного единичного вектора.

Итак, представляя (1.7) и (1.8) в векторной форме, можно прийти к первому и второму уравнениям Максвелла.

Теперь приведем выводы остальных уравнений (1.3)-(1.6) системы электромагнитного поля. Дополнительные уравнения Максвелла можно получить из выражений (2.29) и (2.42), которые являются соответственно уравнениями (1.7) и (1.8) в векторной форме записи. Действительно, проводя с обеих сторон (2.26) или (2.42) операцию дивергенции, получим третье и четвертое уравнения для вакуума:

Теперь можно привести выводы уравнений для среды (вакуума) (1.5)

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E},$$

или

$$B = \mu_0 H, \qquad D = \varepsilon_0 E.$$

Для этого представим (1.7) и (1.8) в виде

$$H = cD = c\varepsilon_0 E, \tag{2.49}$$

$$E = cB = c\mu_0 H. \tag{2.50}$$

Подставляя одно уравнение в другое, из соотношений (2.49) и (2.50) можно получить

$$H = c^2 \varepsilon_0 \mu_0 H,$$

$$E = c^2 \varepsilon_0 \mu_0 E.$$

Из этих выражений следует, что постулированная в теории электродинамики Максвелла скорость света в вакууме равна

$$c = 1 \Big/ \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\,. \tag{2.51}$$

Тогда, подставляя (2.51) в (2.49) и (2.50), можно получить уравнения для среды (1.5):

$$H = c^2 \varepsilon_0 B = B / \mu_0, \tag{2.52}$$

$$E = c^2 \mu_0 D = D / \varepsilon_0. \tag{2.53}$$

Заметим, что подставляя (2.51) в (1.7) и (1.8), для величин напряженностей магнитного и электрического полей получим

$$H = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E, \tag{2.54}$$

$$E = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H. \tag{2.55}$$

Величина же вектора Пойнтинга будет равна

$$\left|\vec{S}\right| = EH = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E^2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H^2 = \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{H}\vec{B}. \tag{2.56}$$

Итак, уравнения (1.7) и (1.8) позволяют установить полную систему уравнений электромагнитного поля (1.1)-(1.6) для вакуума. Заметим также, что уравнения (1.7) и (1.8) позволяют получить результаты (2.51), (2.54)-(2.55), которые являются решением волнового уравнения для плоской электромагнитной волны [10].

2. Материальная среда – идеальный диэлектрик с относительными диэлектрической ε_r и μ_r проницаемостями. Для рассматриваемой материальной среды в уравнениях (1.7) и (1.8) величины D и B равны

$$D = \varepsilon_r \varepsilon_0 E = \varepsilon E,$$
$$B = \mu_r \mu_0 H = \mu H.$$

Действительно, эти уравнения, которые следуют также из (2.1) при замене скорости c на скорость v, имеют место при скорости распространения электромагнитной волны, равной

$$v = c \Big/ \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}\,. \tag{3.1}$$

Покажем это, представляя (1.7) и (1.8) в виде

$$H = v\varepsilon E. \tag{3.2}$$
$$E = v\mu H. \tag{3.3}$$

Подставляя (3.3) в (3.2), а (3.2) в (3.3), из полученных выражений действительно следует, что скорость v определяется уравнением (3.1).

Вывод системы уравнений электромагнитного поля аналогичен выводу уравнений поля для вакуума с той разницей, что скорость света c (2.50) заменяется на скорость v (3.1), а электрическая ε_0 и магнитная μ_0 постоянные – на $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ и $\mu = \mu_r \mu_0$.

Однако можно провести обратные преобразования и из основных уравнений Максвелла (1.1) и (1.2) перейти к уравнениям (1.7) и (1.8). Приведем эти преобразования.

Если учесть значения векторов $\vec{D}$ и $\vec{B}$:

$$\vec{D} = \hat{j}\varepsilon E,$$
$$\vec{B} = \hat{k}\mu H,$$

то первое и второе уравнения Максвелла примут вид

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}(\hat{j}D), \tag{3.4}$$
$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\hat{k}B). \tag{3.5}$$

Представляя $\operatorname{rot}\vec{H}$ и $\operatorname{rot}\vec{E}$ в декартовой системе координат

$$\operatorname{rot}\vec{H} = -\frac{\partial}{\partial x}[\hat{i}\times\vec{H}] = -\frac{1}{v}\frac{\partial H}{\partial t}[\hat{i}\times\hat{k}], \tag{3.6}$$
$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial x}[\hat{i}\times\vec{E}] = \frac{1}{v}\frac{\partial E}{\partial t}[\hat{i}\times\hat{j}] \tag{3.7}$$

и приравнивая (3.4) и (3.5), можно получить

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{j}D) = -\frac{1}{v}\frac{\partial H}{\partial t}[\hat{i}\times\hat{k}], \tag{3.8}$$
$$-\frac{\partial}{\partial t}(\hat{k}B) = \frac{1}{v}\frac{\partial E}{\partial t}[\hat{i}\times\hat{j}]. \tag{3.9}$$

Из равенства (3.8) следует уравнение (1.7):

$$\frac{1}{v}H = D,$$

а из (3.9) - уравнение (1.8):

$$\frac{1}{v}E = B,$$

что и требовалось доказать.

К такому результату можно прийти при произвольном направлении распространения световой волны.

3. Однородная и изотропная материальная среда с параметрами ε и μ с конечной проводимостью σ. В общем случае уравнения (1.7) и (1.8) имеют вид

$$\frac{1}{v}H = D + \sigma,$$

$$\frac{1}{v}E = B,$$

где σ - поверхностная плотность свободного заряда, *А·с/м²*.

С учетом того, что величина плотности тока проводимости равна изменению плотности заряда σ:

$$\delta = \partial\sigma/\partial t, \tag{4.1}$$

уравнения (1.7) и (1.8) примут вид

$$\frac{1}{v}H = D + \int \delta \partial t, \tag{4.2}$$

$$\frac{1}{v}E = B. \tag{4.3}$$

При наличии обьемного заряда с плотностью ρ в (4.1) появляется слагающая ρv. Рассматривая (как и выше) направления распространения электромагнитной волны по оси абсцисс, в декартовой системе координат векторы $\vec{H}$ и $\vec{E}$ будут равны

$$\vec{H} = \hat{k}H, \qquad \vec{E} = \hat{j}E.$$

Тогда соотношения (4.2) и (4.3) можно представить в векторной форме:

$$-\frac{1}{v}[\hat{i}\times\vec{H}] = \vec{D} + \int \vec{\delta}\, \partial t, \tag{4.4}$$

$$\frac{1}{v}[\hat{i}\times\vec{E}] = -\vec{B}. \tag{4.5}$$

Производные по времени этих выражений дают уравнения Максвелла (1.1) и (1.2). Вид этих уравнений при произвольном направлении распространения электромагнитной волны из-за однородности и изотропности среды остается неизменным. Вывод остальных уравнений (1.3)-(1.4) электромагнитного поля не представляет особого труда.

Итак, уравнения (1.7) и (1.8), являющиеся прямым следствием принципа постоянства скорости света для вакуума $\frac{1}{c}x = t$ и постоянства скорости распространения электромагнитной волны в материальной среде $\frac{1}{v}x = t$, позволяют установить систему уравнений электромагнитного поля. Они включают в себя удивительно много информации, часть которой была выведена для однородной, изотропной диэлектрической среды. При распространении электромагнитной волны вдоль оси абсцисс (условия (2.21)) имеем

$$\frac{1}{v}H_X = \varepsilon E_Z, \qquad \frac{1}{v}H_Y = \varepsilon E_X, \qquad \frac{1}{v}H_Z = \varepsilon E_Y,$$

$$\frac{1}{v}E_X = \mu H_Y, \qquad \frac{1}{v}E_Y = \mu H_Z, \qquad \frac{1}{v}E_Z = \mu H_X.$$

Производные этих уравнений по времени дают

$$\frac{\partial H_X}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial E_Z}{\partial t}, \qquad (4.6)$$

$$\frac{\partial H_Y}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial E_X}{\partial t}, \qquad (4.7)$$

$$\frac{\partial H_Z}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial E_Y}{\partial t}, \qquad (4.8)$$

$$\frac{\partial E_X}{\partial x} = \mu \frac{\partial H_Y}{\partial t}, \qquad (4.9)$$

$$\frac{\partial E_Y}{\partial x} = \mu \frac{\partial H_Z}{\partial t}, \qquad (4.10)$$

$$\frac{\partial E_Z}{\partial x} = \mu \frac{\partial H_X}{\partial t}. \qquad (4.11)$$

Вторые производные этих уравнений по координате x с учетом того, что результаты не зависят от порядка дифференцирования, позволяют получить волновые уравнения для рассматриваемого случая:

$$\frac{\partial^2 H_X}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 H_X}{\partial t^2}, \qquad (4.12)$$

$$\frac{\partial^2 H_Y}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 H_Y}{\partial t^2}, \qquad (4.13)$$

$$\frac{\partial^2 H_Z}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 H_Z}{\partial t^2}, \qquad (4.14)$$

$$\frac{\partial^2 E_X}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_X}{\partial t^2}, \qquad (4.15)$$

$$\frac{\partial^2 E_Y}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_Y}{\partial t^2}, \qquad (4.16)$$

$$\frac{\partial^2 E_Z}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_Z}{\partial t^2}. \qquad (4.17)$$

В частности, из (4.6) и (4.11) можно получить уравнение (4.12):

$$\frac{\partial^2 H_X}{\partial x^2} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_Z}{\partial t}\right) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E_Z}{\partial x}\right) = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 H_X}{\partial t^2},$$

а из (4.9) и (4.7) - уравнение (4.15):

$$\frac{\partial^2 E_X}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H_Y}{\partial t}\right) = \mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H_Y}{\partial x}\right) = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_X}{\partial t^2}.$$

Уравнения (4.7) и (4.9), (4.8) и (4.10) позволяют получить остальные волновые уравнения (4.13), (4.14), (4.16) и (4.17).

При рассмотрении распространения волны вдоль оси y имеем

$$\partial/\partial x = 0, \quad \partial/\partial y \neq 0, \quad \partial/\partial z = 0, \tag{4.18}$$

а вдоль оси z:

$$\partial/\partial x = 0, \quad \partial/\partial y = 0, \quad \partial/\partial z \neq 0. \tag{4.19}$$

Для случая (4.18) имеем

$$\begin{cases} \frac{1}{v} H_Y = \varepsilon E_X, \frac{1}{v} H_Z = \varepsilon E_Y, \frac{1}{v} H_X = \varepsilon E_Z, \\ \frac{1}{v} E_Y = \mu H_X, \frac{1}{v} E_Z = \mu H_X, \frac{1}{v} E_X = \mu H_X, \end{cases}$$

для случая (4.19):

$$\begin{cases} \frac{1}{v} H_Z = \varepsilon E_Y, \frac{1}{v} H_X = \varepsilon E_Z, \frac{1}{v} H_Y = \varepsilon E_X, \\ \frac{1}{v} E_Z = \mu H_X, \frac{1}{v} E_X = \mu H_Y, \frac{1}{v} E_Y = \mu H_Z. \end{cases}$$

Полученные соотношения позволяют получить волновые уравнения для рассматриваемых случаев. При рассмотрении распространения электромагнитной волны вдоль произвольного направления волновые уравнения можно получить наложением уравнений, полученных для случаев (2.21), (4.18) и (4.19).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Максвелл Дж.К.** Статьи и речи. -М.: Наука, 1968. – 416 с.
2. **Максвелл Дж.К.** Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. -М.: Гостехиздат, 1954.- 633 с.
3. **Стрэттон Дж.А.** Теория электромагнетизма. -М. Гостехиздат, 1948. - 539 с.
4. **Смайт У.Р.** Электростатика и электродинамика. –М.: ИЛ, 1954. - 492 с.
5. **Тамм И.Е.** Основы теории электричества. -М.: Физматгиз, 2003. – 658 с.
6. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теория поля. -М.: Физматгиз, 2001.- 502 с.
7. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Электродинамика сплошных сред. -М.: Физматгиз, 2001. – 421 с.
8. **Зоммерфельд А.** Электростатика и электродинамика. -М.: ИЛ, 1954. - 495с.
9. **Гринберг Г.А.** Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. –М.: Изд-во АН СССР, 1948.
10. **Шимони К.** Теоретическая электротехника. –М.: Мир, 1964. - 760 с.
11. **Эйнштейн А.** К электродинамике движущихся тел: Собрание научных трудов. –М.: Наука, 1965.
12. **Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.** Электродинамика. –М.: Мир, 1966.
13. **Арамян М.А.** Расчет поля в кубической пространственной системе сферических частиц, помещенных во внешнее однородное поле // Теоретическая электротехника / Львовск. гос. ун-т.- 1990.-Вып. 49.- С.107-119.
14. **Арамян М.А.** Уточнение в теории расчета диэлектрической проницаемости Максвелла-Вагнера // Коллоидный журнал. - 1992. -Т.54, N5. - С.24-32.

15. **Арамян М.А.** К расчету полей в слоистых структурах и вычисление интегральных параметров//ИФЖ. - 1994. -Т. 67, N1-2. - С. 132-140.
16. **Арамян М.А.** Расчет потенциальных полей и средних параметров дисперсных систем регулярных структур с различными формами включений// Электричество. -1997. - N2. - С.64-69.
17. **Арамян М., Карапетян Г.** Расчет усредненных параметров неоднородных сред с переменными свойствами включений // ИФЖ. – Минск. - 2001. - Т.74, N1. -С.92-98.
18. **Арамян М., Карапетян Г.** Расчет диэлектрической проницаемости неоднородных материалов периодических структур усреднением уравнений потенциальных полей // ИФЖ. – Минск. - 2001.- Т.74, N1. - С. 99-102.
19. **Карапетян Г., Арамян М.** Об усреднении потенциальных полей в неоднородных средах // Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН.-2001. – Т.4, N3. -С.395-398.
20. **Арамян М., Арамян А.** К электродинамике движущихся зарядов// Материалы науч. конф. ГИУА.- Ереван, 2002. - Т.1. - С. 99-101.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 10.07.2003.

Մ.Ա. ԱՐԱՄՅԱՆ, Ա.Մ.ԱՐԱՄՅԱՆ

ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ ՀԵՏԱԶՈՏՄԱՆ ՄԵԹՈԴԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Էլեկտրամագնիսական դաշտի հետազոտման համար առաջարկվում է ֆիզիկական մեթոդ, որը հնարավորություն է ընձեռում $M = kN$ գծային հավասարումներից սահմանել Մաքսվելի էլեկտրադինամիկայի լրիվ համակարգը:

M.A. ARAMYAN, A.M. ARAMYAN

ON ELECTROMAGNETIC FIELD INVESTIGATION METHOD

A physical method for investigating the electromagnetic field allowing to set a full Maxwell equation system from linear equation $M = kN$ is proposed.