

С.О. СИМОНЯН, А.Г. АВЕТИСЯН, А.В. МЕЛИКЯН

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ТЕЙЛОРОВСКИЙ АНАЛОГ
МЕТОДА ЖИРАРА-ВИЕТА**

Предложен численный метод параллельного определения всех корней алгебраических многочленов с переменными коэффициентами на основе использования дифференциально-тейлоровских преобразований.

Ключевые слова: алгебраические многочлены с переменными коэффициентами, корни, соотношения Жирара-Виета, дифференциально-тейлоровские преобразования.

Введение. Дифференциально-тейлоровские преобразования [1] имеют вид

$$X(K) = \frac{H^k}{K!} \cdot \frac{\partial^K x(t)}{\partial t^k} \Big|_{t=t_v}, \quad K \in \overline{0, \infty} \quad x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t - t_v}{H} \right)^k X(K), \quad (1)$$

где $X(K)$ - изображение (дискрета) оригинала $x(t)$ - функция целочисленного аргумента $K \in \overline{0, \infty}$; H - некоторая постоянная (масштабный коэффициент); $t_v \neq 0$ - центр аппроксимации.

При $t_v = 0$ ДТ-преобразования (1) вырождаются в дифференциально-маклореновские (ДМ) преобразования:

$$X(K) = \frac{H^k}{K!} \cdot \frac{\partial^K x(t)}{\partial t^k} \Big|_{t=0}, \quad K \in \overline{0, \infty} \quad x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{H} \right)^k X(K). \quad (2)$$

Математический аппарат. Рассмотрим применение этих преобразований для параллельного определения всех корней алгебраических многочленов с переменными коэффициентами.

Допустим, имеем полином

$$P(\lambda(t)) = p_0(t)\lambda^n(t) + p_1(t)\lambda^{n-1}(t) + \dots + p_{n-1}(t)\lambda(t) + p_n(t) = 0 \quad (3)$$

с бесконечно гладкими по аргументу t переменными коэффициентами $p_i(t)$, $i \in \overline{0, n}$, имеющий корни $\lambda_i(t)$, $i \in \overline{1, n}$. Известно, что для каждого полинома порядка n имеют место следующие соотношения Жирара-Виета [2]:

$$\begin{cases} \lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \dots + \lambda_n(t) = -\frac{p_1(t)}{p_0(t)}, \\ \lambda_1(t) \cdot \lambda_2(t) + \lambda_1(t) \cdot \lambda_3(t) + \dots + \lambda_{n-1}(t) \cdot \lambda_n(t) = \frac{p_2(t)}{p_0(t)}, \\ \dots \\ \lambda_1(t) \cdot \lambda_2(t) \cdot \dots \cdot \lambda_n(t) = (-1)^n \cdot \frac{p_n(t)}{p_0(t)}. \end{cases} \quad (4)$$

Нетрудно убедиться, что матрично-векторное представление этой симметричной системы имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \sum_{\substack{i \in 1, n \\ i \neq 1}} \lambda_i(t) & \dots & \sum_{\substack{i \in 1, n \\ i \neq m}} \lambda_i(t) & \dots & \sum_{\substack{i \in 1, n \\ i \neq n}} \lambda_i(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{\substack{i, j, \dots, k \in 1, n \\ i \neq j \neq \dots \neq k \\ i, j, \dots, k \neq 1}} \lambda_i(t) \cdot \lambda_j(t) \cdot \dots \cdot \lambda_k(t) & \dots & \sum_{\substack{i, j, \dots, k \in 1, n \\ i \neq j \neq \dots \neq k \\ i, j, \dots, k \neq m}} \lambda_i(t) \cdot \lambda_j(t) \cdot \dots \cdot \lambda_k(t) & \dots & \sum_{\substack{i, j, \dots, k \in 1, n \\ i \neq j \neq \dots \neq k \\ i, j, \dots, k \neq n}} \lambda_i(t) \cdot \lambda_j(t) \cdot \dots \cdot \lambda_k(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \prod_{\substack{i \in 1, n \\ i \neq 1}}^n \lambda_i(t) & \dots & \prod_{\substack{i \in 1, n \\ i \neq m}}^n \lambda_i(t) & \dots & \prod_{\substack{i \in 1, n \\ i \neq n}}^n \lambda_i(t) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \dots \\ \lambda_m(t) \\ \dots \\ \lambda_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^1 \cdot 1 \cdot \frac{p_1(t)}{p_0(t)} \\ (-1)^2 \cdot 2 \cdot \frac{p_2(t)}{p_0(t)} \\ \dots \\ (-1)^m \cdot m \cdot \frac{p_m(t)}{p_0(t)} \\ \dots \\ (-1)^n \cdot n \cdot \frac{p_n(t)}{p_0(t)} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

С другой стороны, при $t = t_v$ из системы (5) имеем

$$\begin{bmatrix}
1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\
\sum_{\substack{i \in 1, n \\ i \neq 1}} \lambda_i(0) & \dots & \sum_{\substack{i \in 1, n \\ i \neq m}} \lambda_i(0) & \dots & \sum_{\substack{i \in 1, n \\ i \neq n}} \lambda_i(0) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\sum_{\substack{i, j, \dots, k \in 1, n \\ i \neq j \neq \dots \neq k \\ i, j, \dots, k \neq 1}} \lambda_i(0) \cdot \lambda_j(0) \cdot \dots \cdot \lambda_k(0) & \dots & \sum_{\substack{i, j, \dots, k \in 1, n \\ i \neq j \neq \dots \neq k \\ i, j, \dots, k \neq m}} \lambda_i(0) \cdot \lambda_j(0) \cdot \dots \cdot \lambda_k(0) & \dots & \sum_{\substack{i, j, \dots, k \in 1, n \\ i \neq j \neq \dots \neq k \\ i, j, \dots, k \neq n}} \lambda_i(0) \cdot \lambda_j(0) \cdot \dots \cdot \lambda_k(0) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\prod_{\substack{i \in 1, n \\ i \neq 1}}^n \lambda_i(0) & \dots & \prod_{\substack{i \in 1, n \\ i \neq m}}^n \lambda_i(0) & \dots & \prod_{\substack{i \in 1, n \\ i \neq n}}^n \lambda_i(0)
\end{bmatrix} \times \\
\times \begin{pmatrix} \lambda_1(0) \\ \lambda_2(0) \\ \dots \\ \lambda_m(0) \\ \dots \\ \lambda_n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^1 \cdot 1 \cdot \frac{p_1(t)}{p_0(t)} \\ (-1)^2 \cdot 2 \cdot \frac{p_2(t)}{p_0(t)} \\ \dots \\ (-1)^m \cdot m \cdot \frac{p_m(t)}{p_0(t)} \\ \dots \\ (-1)^n \cdot n \cdot \frac{p_n(t)}{p_0(t)} \end{pmatrix} \Big|_{t=t_v} \quad (6)$$

или, в компактной записи,

$$\Lambda(\lambda(0)) \cdot \lambda(0) = \left((-1)^1 \cdot 1 \cdot \frac{p_1(t)}{p_0(t)}, \dots, (-1)^n \cdot n \cdot \frac{p_n(t)}{p_0(t)} \right)^T \Big|_{t=t_v}, \quad (7)$$

где $\lambda(0) = (\lambda_1(0), \dots, \lambda_n(0))^T$ - n -мерный вектор начальных дискрет, а $\Lambda(\lambda(0))$ - функциональная матрица порядка n .

Формальное рекуррентно-аналитическое решение системы (7) имеет вид:

если $\text{rang} \Lambda(\lambda(0))_p = n$, то

$$\lambda(0)_{p+1} = \Lambda^{-1}(\lambda(0)_p) \cdot \left((-1)^1 \cdot 1 \cdot \frac{p_1(t)}{p_0(t)}, \dots, (-1)^n \cdot n \cdot \frac{p_n(t)}{p_0(t)} \right)_{|t=t_v}^T, \quad (8)$$

если $\text{rang} \Lambda(\lambda(0)_p) < n$, то

$$\lambda(0)_{p+1} = \Lambda^+(\lambda(0)_p) \cdot \left((-1)^1 \cdot 1 \cdot \frac{p_1(t)}{p_0(t)}, \dots, (-1)^n \cdot n \cdot \frac{p_n(t)}{p_0(t)} \right)_{|t=t_v}^T, \quad (9)$$

где p – номер итераций (заметим, что для решения нелинейной системы (7) могут быть использованы также численные методы нелинейной алгебры).

Имея значения векторов начальных дискрет $\lambda(0)$ (заметим, что из-за нелинейности системы (6) (или (7)), в общем случае, она может иметь несколько решений (см. пример 1)), систему (7) переведем из области оригиналов $\lambda(t)$ в область ДТ-изображений $\lambda(K)$, $K = \overline{1, \infty}$ при центре аппроксимации $t = t_v$. Имеем следующую систему:

$$\begin{aligned} \Lambda(\lambda(0)) \cdot \lambda(K) + \Lambda(\lambda(0), \dots, \lambda(K)) \cdot \lambda(0) = & - \sum_{m=1}^{K-1} \Lambda(\lambda(m)) \cdot \lambda(K-m) + \\ & + \frac{H^K}{K!} \cdot \left(\frac{\partial^K}{\partial t^K} \left((-1)^1 \cdot 1 \cdot \frac{p_1(t)}{p_0(t)} \right), \dots, \frac{\partial^K}{\partial t^K} \left((-1)^n \cdot n \cdot \frac{p_n(t)}{p_0(t)} \right) \right)_{|t=t_v}^T, \quad K = \overline{1, \infty}, \quad (10) \end{aligned}$$

где $\Lambda(\lambda(0))$, $\Lambda(\lambda(0), \dots, \lambda(K))$, $\Lambda(\lambda(m))$ – матрицы начальных, m -ых ($m = \overline{0, K}$) и m -ых ($m = \overline{1, K-1}$) дискрет порядка n , порожденных матрицей системы (5), а $\lambda(K) = (\lambda_1(K), \dots, \lambda_n(K))^T$, $\lambda(K-m) = (\lambda_1(K-m), \dots, \lambda_n(K-m))^T$ – векторы K -ых и $(K-m)$ -ых дискрет с размерами $n \times 1$.

Раскрыв систему (10) и суммируя подобные члены, содержащие компоненты $\lambda_i(0)$, $i = \overline{1, n}$ вектора $\lambda(0)$, убеждаемся, что она может быть представлена в виде следующей, линейной относительно вектора дискрет $\lambda(K)$ алгебраической системы уравнений:

$$\begin{aligned} \Lambda(\lambda(0)) \cdot \lambda(K) = & - (1^{-1}, 2^{-1}, 3^{-1}, \dots, n^{-1})^T \circ \\ & \circ \left[\sum_{m=1}^{K-1} \Lambda(\lambda(m)) \cdot \lambda(K-m) + F(\lambda(0), \lambda(1), \dots, \lambda(K-m)) \right] + \\ & + \frac{H^K}{K!} \cdot \left((-1)^1 \cdot \frac{\partial^K}{\partial t^K} \left(\frac{p_1(t)}{p_0(t)} \right), \dots, (-1)^n \cdot \frac{\partial^K}{\partial t^K} \left(\frac{p_n(t)}{p_0(t)} \right) \right)_{|t=t_v}^T, \quad (11) \end{aligned}$$

где знак $\circ$ указывает на прямое (покомпонентное) произведение двух n -мерных векторов-столбцов [1], а $F(\lambda(0), \lambda(1), \dots, \lambda(K-m))$ – n -мерный вектор, порожденный от произведения $\Lambda(\lambda(0), \dots, \lambda(K)) \cdot \lambda(0)$. Отсюда рекуррентно можно вычислить все дискреты $\lambda(K)$, $K = \overline{1, \infty}$, начиная с начального вектора дискрет $\lambda(0)$.

В соответствии с (11) будем иметь

$$\begin{aligned} \lambda(K) = & -\Lambda^{-1}(\lambda(0)) \cdot (1^{-1}, 2^{-1}, 3^{-1}, \dots, n^{-1})^T \circ \\ & \circ \left[\sum_{m=1}^{K-1} \Lambda(\lambda(m)) \cdot \lambda(K-m) + F(\lambda(0), \lambda(1), \dots, \lambda(K-m)) \right] + \\ & + \frac{H^K}{K!} \cdot \left((-1)^1 \cdot \frac{\partial^K}{\partial t^K} \left(\frac{p_1(t)}{p_0(t)} \right), \dots, (-1)^n \cdot \frac{\partial^K}{\partial t^K} \left(\frac{p_1(t)}{p_0(t)} \right) \right)^T \Big|_{t=t_v}, \quad (12) \end{aligned}$$

если $\text{rang} \Lambda(\lambda(0))_p = n$,

$$\begin{aligned} \lambda(K) = & -\Lambda^+(\lambda(0)) \cdot (1^{-1}, 2^{-1}, 3^{-1}, \dots, n^{-1})^T \circ \\ & \circ \left[\sum_{m=1}^{K-1} \Lambda(\lambda(m)) \cdot \lambda(K-m) + F(\lambda(0), \lambda(1), \dots, \lambda(K-m)) \right] + \\ & + \frac{H^K}{K!} \cdot \left((-1)^1 \cdot \frac{\partial^K}{\partial t^K} \left(\frac{p_1(t)}{p_0(t)} \right), \dots, (-1)^n \cdot \frac{\partial^K}{\partial t^K} \left(\frac{p_1(t)}{p_0(t)} \right) \right)^T \Big|_{t=t_v}, \quad (13) \end{aligned}$$

если $\text{rang} \Lambda(\lambda(0))_p < n$.

Ввиду того, что обычная обратная матрица является частным случаем псевдообратной матрицы (при квадратных полноранговых матрицах), в дальнейших выкладках можно ограничиться лишь вычислительной схемой (13).

Исходя из практических соображений, представим также матрицы $\Lambda(\lambda(0))$ и $\Lambda^{-1}(\lambda(0))$ для $n=2, 3, 4$. Нетрудно убедиться, что:

при $n=2$:

$$\Lambda(\lambda(0)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_2(0) & \lambda_1(0) \end{bmatrix}, \quad \Lambda^{-1}(\lambda(0)) = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1(0) & -1 \\ -\lambda_2(0) & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Delta = \lambda_1(0) - \lambda_2(0);$$

при $n=3$:

$$\Lambda(\lambda(0)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (\lambda_2(0) + \lambda_3(0)) & (\lambda_1(0) + \lambda_3(0)) & (\lambda_1(0) + \lambda_2(0)) \\ (\lambda_2(0) \cdot \lambda_3(0)) & (\lambda_1(0) \cdot \lambda_3(0)) & (\lambda_1(0) \cdot \lambda_2(0)) \end{bmatrix},$$

$$\Lambda^{-1}(\lambda(0)) = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} (\lambda_2(0) - \lambda_3(0)) & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_3(0) - \lambda_1(0)) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_1(0) - \lambda_2(0)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1^2(0) & -\lambda_1(0) & 1 \\ \lambda_2^2(0) & -\lambda_2(0) & 1 \\ \lambda_3^2(0) & -\lambda_3(0) & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Delta = \lambda_1^2(0) \cdot (\lambda_2(0) - \lambda_3(0)) + \lambda_2^2(0) \cdot (\lambda_3(0) - \lambda_1(0)) + \lambda_3^2(0) \cdot (\lambda_1(0) - \lambda_2(0));$$

при n=4:

$$\Lambda(\lambda(0)) = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \left(\begin{matrix} \lambda_2(0) + \\ + \lambda_3(0) + \\ + \lambda_4(0) \end{matrix} \right) \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ \left(\begin{matrix} \lambda_1(0) + \\ + \lambda_3(0) + \\ + \lambda_4(0) \end{matrix} \right) \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ \left(\begin{matrix} \lambda_1(0) + \\ + \lambda_2(0) + \\ + \lambda_4(0) \end{matrix} \right) \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ \left(\begin{matrix} \lambda_1(0) + \\ + \lambda_2(0) + \\ + \lambda_3(0) \end{matrix} \right) \end{matrix} \\ \begin{matrix} \left(\begin{matrix} \lambda_2(0) \cdot \\ \cdot \lambda_3(0) + \\ + \lambda_2(0) \cdot \\ \cdot \lambda_4(0) + \\ + \lambda_3(0) \cdot \\ \cdot \lambda_4(0) \end{matrix} \right) \end{matrix} & \begin{matrix} \left(\begin{matrix} \lambda_1(0) \cdot \\ \cdot \lambda_3(0) + \\ + \lambda_1(0) \cdot \\ \cdot \lambda_4(0) + \\ + \lambda_3(0) \cdot \\ \cdot \lambda_4(0) \end{matrix} \right) \end{matrix} & \begin{matrix} \left(\begin{matrix} \lambda_1(0) \cdot \\ \cdot \lambda_2(0) + \\ + \lambda_1(0) \cdot \\ \cdot \lambda_4(0) + \\ + \lambda_2(0) \cdot \\ \cdot \lambda_4(0) \end{matrix} \right) \end{matrix} & \begin{matrix} \left(\begin{matrix} \lambda_1(0) \cdot \\ \cdot \lambda_2(0) + \\ + \lambda_1(0) \cdot \\ \cdot \lambda_3(0) + \\ + \lambda_2(0) \cdot \\ \cdot \lambda_3(0) \end{matrix} \right) \end{matrix} \\ \begin{matrix} \left(\begin{matrix} \lambda_2(0) \cdot \\ \cdot \lambda_3(0) \cdot \\ \cdot \lambda_4(0) \end{matrix} \right) \end{matrix} & \begin{matrix} \left(\begin{matrix} \lambda_1(0) \cdot \\ \cdot \lambda_3(0) \cdot \\ \cdot \lambda_4(0) \end{matrix} \right) \end{matrix} & \begin{matrix} \left(\begin{matrix} \lambda_1(0) \cdot \\ \cdot \lambda_2(0) \cdot \\ \cdot \lambda_4(0) \end{matrix} \right) \end{matrix} & \begin{matrix} \left(\begin{matrix} \lambda_1(0) \cdot \\ \cdot \lambda_2(0) \cdot \\ \cdot \lambda_3(0) \end{matrix} \right) \end{matrix} \end{bmatrix},$$

$$\Lambda^{-1}(\lambda(0)) = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1^3(0) & -\lambda_1^2(0) & \lambda_1(0) & -1 \\ \lambda_2^3(0) & -\lambda_2^2(0) & \lambda_2(0) & -1 \\ \lambda_3^3(0) & -\lambda_3^2(0) & \lambda_3(0) & -1 \\ \lambda_4^3(0) & -\lambda_4^2(0) & \lambda_4(0) & -1 \end{bmatrix},$$

$$\Delta = \lambda_1^3(0) \cdot a + \lambda_2^3(0) \cdot b + \lambda_3^3(0) \cdot c + \lambda_4^3(0) \cdot d,$$

где

$$\begin{aligned}
a &= \lambda_2^2(0) \cdot (\lambda_3(0) - \lambda_4(0)) + \lambda_3^2(0) \cdot (\lambda_4(0) - \lambda_2(0)) + \lambda_4^2(0) \cdot (\lambda_2(0) - \lambda_3(0)), \\
b &= \lambda_1^2(0) \cdot (\lambda_4(0) - \lambda_3(0)) + \lambda_3^2(0) \cdot (\lambda_1(0) - \lambda_4(0)) + \lambda_4^2(0) \cdot (\lambda_3(0) - \lambda_1(0)), \\
c &= \lambda_1^2(0) \cdot (\lambda_2(0) - \lambda_4(0)) + \lambda_2^2(0) \cdot (\lambda_4(0) - \lambda_1(0)) + \lambda_4^2(0) \cdot (\lambda_1(0) - \lambda_2(0)), \\
d &= \lambda_1^2(0) \cdot (\lambda_3(0) - \lambda_2(0)) + \lambda_2^2(0) \cdot (\lambda_1(0) - \lambda_3(0)) + \lambda_3^2(0) \cdot (\lambda_2(0) - \lambda_1(0)).
\end{aligned}$$

После вычисления дискрет $\lambda_i(K)$, $K = \overline{0, \infty}$, $\forall i = \overline{1, n}$ оригиналы-корни $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ восстанавливаются в соответствии с разложениями

$$\lambda_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t - t_v}{H} \right)^k \lambda_i(K), \quad \forall i = \overline{1, n}. \quad (14)$$

Пример 1 (матрица с отличными друг от друга собственными значениями при действительных начальных дискретах). Рассмотрим матрицу [3]

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1+t & 1-t \\ -t & t^2 \end{bmatrix},$$

для которой

$$\begin{aligned}
P(t) &= \lambda^2(t) - (1+t+t^2)\lambda(t) + t(1+t^2) = 0, \\
p_0(t) &= 1, \quad p_1(t) = -1-t-t^2, \quad p_2(t) = t+t^3.
\end{aligned}$$

Очевидно, что $\lambda_1(t) = 1+t^2$, $\lambda_2(t) = t$.

Примем центр аппроксимации $t_v = 0$, т.е. воспользуемся дифференциально-маклореновскими преобразованиями (2). Тогда:
при $K = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_2(0) & \lambda_1(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1(0) \\ \lambda_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда имеем следующие два решения:

$$\begin{aligned}
\text{а) } \lambda_1(0) &= 0, \quad \lambda_2(0) = 1, \quad \Lambda(\lambda(0)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Lambda^{-1}(\lambda(0)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \\
\text{б) } \lambda_1(0) &= 1, \quad \lambda_2(0) = 0, \quad \Lambda(\lambda(0)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda^{-1}(\lambda(0)) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Для случая а) получим:

при $K = 1$:

$$\begin{cases} \lambda_1(1) + \lambda_2(1) = 1 \cdot H, \\ \lambda_1(1) = 1 \cdot H, \end{cases}$$

откуда $\lambda_1(1) = 1 \cdot H$, $\lambda_2(1) = 0$;

при $K = 2$:

$$\begin{cases} \lambda_1(2) + \lambda_2(2) = 1 \cdot H^2, \\ \lambda_1(2) = 0, \end{cases}$$

откуда $\lambda_1(2) = 0$, $\lambda_2(2) = 1 \cdot H^2$;

при $K = 3$:

$$\begin{cases} \lambda_1(3) + \lambda_2(3) = 0, \\ \lambda_1(3) = 0, \end{cases}$$

откуда $\lambda_1(3) = 0$, $\lambda_2(3) = 0$.

Можно убедиться, что $\forall K \geq 4$ дискреты $\lambda_1(K) = 0$, $\lambda_2(K) = 0$. Таким образом, окончательно имеем

$$\begin{cases} \lambda_1(t) = 0 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 = t, \\ \lambda_2(t) = 1 + 0 \cdot t + 1 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 = 1 + t^2, \end{cases}$$

что полностью совпадает с точными результатами, полученными в [3].

Для случая б) соответственно имеем:

при $K = 1$:

$$\begin{cases} \lambda_1(1) + \lambda_2(1) = 1 \cdot H, \\ \lambda_2(1) = 1 \cdot H, \end{cases}$$

откуда $\lambda_1(1) = 0$, $\lambda_2(1) = 1 \cdot H$;

при $K = 2$:

$$\begin{cases} \lambda_1(2) + \lambda_2(2) = 1 \cdot H^2, \\ \lambda_2(2) = 0, \end{cases}$$

откуда $\lambda_1(2) = 1 \cdot H^2$, $\lambda_2(2) = 0$;

при $K = 3$:

$$\begin{cases} \lambda_1(3) + \lambda_2(3) = 0, \\ \lambda_1(3) = 0, \end{cases}$$

откуда $\lambda_1(3) = 0$, $\lambda_2(3) = 0$.

В этом случае также $\forall K \geq 4$ дискреты $\lambda_1(K) = 0$, $\lambda_2(K) = 0$.

Поэтому

$$\begin{cases} \lambda_1(t) = 1 + 0 \cdot t + 1 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 = 1 + t^2, \\ \lambda_2(t) = 0 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 = t, \end{cases}$$

что и следовало ожидать.

Пример 2 (матрица с отличными друг от друга собственными значениями при комплексно-сопряженных начальных дискретах). Рассмотрим еще одну матрицу [3], для которой также была решена полная проблема собственных значений:

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1+t & 1-t \\ -1 & t \end{bmatrix}.$$

Имеем

$$P(t) = \lambda^2(t) - (1 + 2 \cdot t)\lambda(t) + (1 + t^2) = 0,$$

$$p_0(t) = 1, \quad p_1(t) = -1 - 2 \cdot t, \quad p_2(t) = 1 + t^2$$

и, следовательно,

$$\lambda_{1,2}(t) = \frac{(1 + 2t) \pm \sqrt{4t - 3}}{2},$$

$$\text{откуда при } t_v = 0 \text{ получим } \lambda_{1,2}(0) = \frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Последовательность решения этой задачи такова:

при $K = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_2(0) & \lambda_1(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1(0) \\ \lambda_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{откуда } \lambda_{1,2}(0) = \frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\Lambda(\lambda(0)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \left(\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{6}\right) & \left(\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \end{bmatrix}, \quad \Lambda^{-1}(\lambda(0)) = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{6}\right) & j \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \left(\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{6}\right) & -j \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix};$$

при $K = 1$:

$$\begin{cases} \lambda_1(1) + \lambda_2(1) = 2 \cdot H, \\ \left(\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \lambda_1(1) + \left(\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \lambda_2(1) = 0, \end{cases}$$

$$\text{откуда } \lambda_1(1) = \left(1 - j \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot H, \quad \lambda_2(1) = \left(1 + j \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot H;$$

при $K = 2$:

$$\begin{cases} \lambda_1(2) + \lambda_2(2) = 0, \\ \left(\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \lambda_1(2) + \left(\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \lambda_2(2) = -\frac{H^2}{3}, \end{cases}$$

$$\text{откуда } \lambda_1(2) = -j \frac{\sqrt{3}}{9} \cdot H^2, \quad \lambda_2(2) = j \frac{\sqrt{3}}{9} \cdot H^2;$$

при $K = 3$:

$$\begin{cases} \lambda_1(3) + \lambda_2(3) = 0, \\ \left(\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \lambda_1(3) + \left(\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \lambda_2(3) = \frac{1}{9} \cdot H^2, \end{cases}$$

$$\text{откуда } \lambda_1(3) = -j \frac{2\sqrt{3}}{27} \cdot H^3, \quad \lambda_2(3) = j \frac{2\sqrt{3}}{27} \cdot H^3 \text{ и т.д.}$$

Следовательно, для $\lambda_{1,2}(t)$ имеем

$$\lambda_{1,2}(t) = \left(\frac{1}{2} + t\right) \pm j \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}t - \frac{\sqrt{3}}{9}t^2 - \frac{2\sqrt{3}}{27}t^3 - \dots\right),$$

что также полностью совпадает с результатами, полученными в [4].

Пример 3 (матрица с отличными друг от друга собственными значениями при действительных начальных дискретах). Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 3-t^2 & 0 & 2t-1 \\ 1 & 2+t-t^2 & 0 \\ t & 0 & 1+t^2 \end{bmatrix}.$$

Для этой матрицы имеем

$$P(t) = -\lambda^3(t) - (-6-t+t^2)\lambda^2(t) - (11+5t-4t^2-t^4)\lambda(t) - (-6-5t+2t^2+t^3+2t^4+t^5-t^6) = 0,$$

$$p_0(t) = -1, \quad p_1(t) = 6+t-t^2, \quad p_2(t) = -11-5t+4t^2+t^4,$$

$$p_3(t) = 6+5t-2t^2-t^3-2t^4-t^5+t^6.$$

Собственные значения матрицы следующие:

$$\lambda_1(t) = 2+t-t^2, \quad \lambda_2(t) = 2+\sqrt{1-t+t^4}, \quad \lambda_3(t) = 2-\sqrt{1-t+t^4}.$$

При $t_v = 0$ имеем

$$\begin{cases} \lambda_1(0) + \lambda_2(0) + \lambda_3(0) = 6, \\ \lambda_1(0) \cdot \lambda_2(0) + \lambda_1(0) \cdot \lambda_3(0) + \lambda_2(0) \cdot \lambda_3(0) = 11, \\ \lambda_1(0) \cdot \lambda_2(0) \cdot \lambda_3(0) = 6, \end{cases}$$

откуда $\lambda_1(0) = 2$, $\lambda_2(0) = 3$, $\lambda_3(0) = 1$.

Следовательно,

$$\Lambda(\lambda(0)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix},$$

а также

$$\Lambda^{-1}(\lambda(0)) = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 4,5 & -1,5 & 0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Тогда при $K = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1(1) \\ \lambda_2(1) \\ \lambda_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot H \\ 5 \cdot H \\ 5 \cdot H \end{pmatrix},$$

откуда $\lambda_1(1) = 1 \cdot H$, $\lambda_2(1) = -1/2 \cdot H$, $\lambda_3(1) = 1/2 \cdot H$;

при $K = 2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1(2) \\ \lambda_2(2) \\ \lambda_3(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^{-1} \\ 2^{-1} \\ 3^{-1} \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \cdot H^2 \\ -1 \cdot H^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \cdot H^2 \end{pmatrix} \right) + \frac{H^2}{2!} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix},$$

откуда $\lambda_1(2) = -1 \cdot H^2$, $\lambda_2(2) = -1/8 \cdot H^2$, $\lambda_3(2) = 1/8 \cdot H^2$;

при $K = 3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1(3) \\ \lambda_2(3) \\ \lambda_3(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^{-1} \\ 2^{-1} \\ 3^{-1} \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1/8 \cdot H^3 \\ 1 \cdot H^3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1/8 \cdot H^3 \\ -7/4 \cdot H^3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -H^3 \end{pmatrix} \right) + \frac{H^3}{3!} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix},$$

откуда $\lambda_1(3) = 0$, $\lambda_2(3) = -1/16 \cdot H^3$, $\lambda_3(3) = 1/16 \cdot H^3$ и т.д.

Следовательно,

$$\begin{cases} \lambda_1(t) = 2 + t - t^2, \\ \lambda_2(t) = 3 - 0,5t - 0,125t^2 - 0,0625t^3 \dots \approx 2 + \sqrt{1-t+t^4}, \\ \lambda_3(t) = 1 + 0,5t + 0,125t^2 + 0,0625t^3 \dots \approx 2 - \sqrt{1-t+t^4}. \end{cases}$$

Пример 4 (случай кратных собственных значений с различными, в общем случае, начальными дискретами). Пусть дана матрица

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ t & 1-t & t^2 \\ t^3 & 0 & 2+t^2 \end{bmatrix},$$

для которой

$$P(t) = -\lambda^3(t) + (4 - 2t + t^2)\lambda^2(t) + (1 - 5 + 6t - 3t^2 + 2t^3)\lambda(t) + (2 - 4t + 3t^2 - 2t^3 + t^4) = 0,$$

$$p_0(t) = -1, \quad p_1(t) = 4 - 2t + t^2, \quad p_2(t) = -5 + 6t - 3t^2 + 2t^3, \\ p_3(t) = 2 - 4t + 3t^2 - 2t^3 + t^4.$$

Корни этого полинома следующие:

$$\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = 1 - t, \quad \lambda_3(t) = 2 + t^2.$$

При $t_v = 0$ имеем

$$\begin{cases} \lambda_1(0) + \lambda_2(0) + \lambda_3(0) = 4, \\ \lambda_1(0) \cdot \lambda_2(0) + \lambda_1(0) \cdot \lambda_3(0) + \lambda_2(0) \cdot \lambda_3(0) = 5, \\ \lambda_1(0) \cdot \lambda_2(0) \cdot \lambda_3(0) = 2, \end{cases}$$

откуда $\lambda_1(0) = \lambda_2(0) = 1, \quad \lambda_3(0) = 2$, при которых

$$\det \Lambda(\lambda(0)) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 0, \quad \text{rang} \Lambda(\lambda(0)) = 2.$$

Следовательно, $\Lambda^{-1}(\lambda(0))$ не существует. Поэтому воспользуемся псевдообратной матрицей $\Lambda^+(\lambda(0))$, которая имеет следующий вид:

$$\Lambda^+(\lambda(0)) = \begin{bmatrix} -0,5 & 0 & 0,5 \\ -0,5 & 0 & 0,5 \\ 5/3 & 1/3 & -4/3 \end{bmatrix}.$$

Тогда при $K = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1(1) \\ \lambda_2(1) \\ \lambda_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot H \\ -6 \cdot H \\ -4 \cdot H \end{pmatrix},$$

откуда $\lambda_1(1) = \lambda_2(1) = -1 \cdot H$, $\lambda_3(1) = 0$;

при $K = 2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1(2) \\ \lambda_2(2) \\ \lambda_3(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^{-1} \\ 2^{-1} \\ 3^{-1} \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \cdot H^2 \\ -4 \cdot H^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \cdot H^2 \end{pmatrix} \right) + \frac{H^2}{2!} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix},$$

откуда $\lambda_1(2) = \lambda_2(2) = 0$, $\lambda_3(2) = 1 \cdot H^2$.

Можно убедиться, что $\forall K \geq 3$ дискреты $\lambda_{1,2,3}(K) = 0$, следовательно, имеем

$$\begin{cases} \lambda_1(t) = 1 - 1 \cdot t - 0 \cdot t^2 = 1 - t, \\ \lambda_2(t) = 1 - 1 \cdot t - 0 \cdot t^2 = 1 - t, \\ \lambda_3(t) = 2 + 0 \cdot t + 1 \cdot t^2 = 2 + t^2, \end{cases}$$

которые полностью совпадают с вышеприведенными точными результатами.

Пример 5 (случай кратных собственных значений с одинаковыми начальными дискретами). Пусть дана следующая матрица:

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1-2t & 0 & 0 \\ t^3 & 1-2t & t \\ t^2 & 0 & 1+t^2 \end{bmatrix},$$

для которой

$$P(t) = -\lambda^3(t) + (3 - 4t + t^2)\lambda^2(t) + (-3 + 8t - 6t^2 + 4t^3)\lambda(t) + (1 - 4t + 5t^2 - 4t^3 + 4t^4) = 0,$$

$$p_0(t) = -1, \quad p_1(t) = 3 - 4t + t^2, \quad p_2(t) = -3 + 8t - 6t^2 + 4t^3,$$

$$p_3(t) = 1 - 4t + 5t^2 - 4t^3 + 4t^4.$$

При этом корнями полинома являются

$$\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = 1 - 2t, \quad \lambda_3(t) = 1 + t^2.$$

При $t_v = 0$ имеем

$$\begin{cases} \lambda_1(0) + \lambda_2(0) + \lambda_3(0) = 3, \\ \lambda_1(0) \cdot \lambda_2(0) + \lambda_1(0) \cdot \lambda_3(0) + \lambda_2(0) \cdot \lambda_3(0) = 3, \\ \lambda_1(0) \cdot \lambda_2(0) \cdot \lambda_3(0) = 1, \end{cases}$$

откуда $\lambda_1(0) = \lambda_2(0) = \lambda_3(0) = 1$, с учетом которых

$$\det \Lambda(\lambda(0)) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0, \quad \text{rang} \Lambda(\lambda(0)) = 1.$$

Следовательно,

$$\Lambda^+(0) = \begin{bmatrix} 1/18 & 1/9 & 1/18 \\ 1/18 & 1/9 & 1/18 \\ 1/18 & 1/9 & 1/18 \end{bmatrix}.$$

Тогда при $K = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1(1) \\ \lambda_2(1) \\ \lambda_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \cdot H \\ -8 \cdot H \\ -4 \cdot H \end{pmatrix},$$

откуда $\lambda_1(1) = \lambda_2(1) = -2 \cdot H$, $\lambda_3(1) = 0$;

при $K = 2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1(2) \\ \lambda_2(2) \\ \lambda_3(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^{-1} \\ 2^{-1} \\ 3^{-1} \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \cdot H^2 \\ -8 \cdot H^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \cdot H^2 \end{pmatrix} \right) + \frac{H^2}{2!} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix},$$

откуда $\lambda_1(2) = \lambda_2(2) = 0$, $\lambda_3(2) = 1 \cdot H^2$.

Можно убедиться, что $\forall K \geq 3$ дискреты $\lambda_{1,2,3}(K) = 0$, следовательно, окончательно имеем

$$\begin{cases} \lambda_1(t) = 1 - 2 \cdot t - 0 \cdot t^2 = 1 - 2 \cdot t, \\ \lambda_2(t) = 1 - 2 \cdot t - 0 \cdot t^2 = 1 - 2 \cdot t, \\ \lambda_3(t) = 1 + 0 \cdot t + 1 \cdot t^2 = 1 + 1 \cdot t^2, \end{cases}$$

что и должно быть.

Вычислительная схема. Таким образом, для решения полной проблемы собственных значений неавтономных матриц (или определения корней алгебраических многочленов с переменными коэффициентами) необходимо реализовать нижеприведенные этапы вычислительных операций.

Первый этап: составить характеристическое уравнение матрицы.

Второй этап: вычислить вектор $\lambda(0) = (\lambda_1(0), \dots, \lambda_n(0))^T$ каким-либо численным методом в соответствии с (12) или (13) и матрицей $\Lambda^{-1}(\lambda(0))$ или $\Lambda^+(\lambda(0))$, которые остаются постоянными на всех шагах итерационных процедур.

Третий этап: вычислить необходимое количество дискрет $\lambda_i(K)$, $i = \overline{1, n}$ в соответствии с процедурой (12) или (13).

Четвертый этап: восстановить оригиналы $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ в соответствии с обратными ДТ-преобразованиями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – Киев: Наукова думка, 1984. – 420 с.
2. **Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.** Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высшая школа, 1998. – 574 с.
3. **Симонян С.О., Аветисян А.Г.** Решение полной проблемы собственных значений неавтономных матриц // Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН.- 2002.-Т. 55, №3.-С. 426-434.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 07.04.2004.

Ս.Հ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ, Ա.Գ. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ, Ա.Վ.ՄԵԼԻԿՅԱՆ ԺԻՐԱՐ-ՎԻԵՏԻ ՄԵԹՈԴԻ ԴԻՖԵՐԵՆՏԻԱԼ-ԹԵՑԼՈՐՅԱՆ ՆՄԱՆԱԿԸ

Առաջարկված է փոփոխական գործակիցներով հանրահաշվական բազմանդամների բոլոր արմատների զուգահեռ որոշման թվային մեթոդ՝ հիմնված դիֆերենցիալ-թեյլորյան ձևափոխությունների վրա:

S.H.SIMONYAN, A.G. AVETISSYAN, A.V.MELIKYAN DIFFERENTIAL-TAYLOR ANALOGUE OF THE JIRAR-VIET METHOD

A numerical method of parallel definition of all roots of algebraic polynomials with floating factors by applying differential-taylor transformations is proposed.