ISSN 0002-306X. Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2004. Т. LVII, № 3.

УДК 539.3 СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Г.А. ГЕВОРКЯН , В.Р. МАНУСАДЖЯН

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Предлагается модификация метода конечных элементов треугольной формы, при котором решения двумерных задач теории поля сводятся к задачам квадратичного программирования. Приведен алгоритм их решения.

Ключевые слова: конечные элементы, квадратичное программирование, узловые функции, однородная функция второй степени, алгоритм.

Уравнение, описывающее поведение некоторой неизвестной физической величины Φ, зависящее от двух переменных, может быть записано в виде [3]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)+\Omega=0, \tag{1}$$

где Φ - искомая функция, которая должна удовлетворять граничному условию частной задачи; k_x, k_y и Ω - известные функции от x и y.

К этому уравнению в практике приводятся задачи: теплопроводности, фильтрации в пористой неоднородной среде, распределения электрического (или магнитного) потенциала, кручения анизотропных призматических стержней, изгиба призматических балок и т. д.

Уравнение (1) и граничное условие единственным образом определяют задачу. Известно [3], что с помощью вариационного исчисления формулируется эквивалентная к ней следующая задача: требуется найти неизвестную функцию Φ, для которой взятый по всей области двойной интеграл

$$\chi=\iint\left[\frac{1}{2}\left\{k_x\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2+k_y\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2\right\}-\Omega\Phi\right]dxdy, (k_x>0, k_y>0) \tag{2}$$

принимает минимальное значение, при условии, что Φ удовлетворяет граничным условиям рассматриваемой частной задачи.

Рассмотрим двумерную область, которая разделена на $s \in \overline{N}=\{1,2,\ldots,\overline{n}\}$ конечных элементов треугольной формы с узлами i, j, m. Узловые значения функции Φ для s-го конечного элемента зададим вектором $\Phi^s=(\Phi_i^s, \Phi_j^s, \Phi_m^s)^T$. Тогда для функции Φ внутри элемента имеем [3]

$$\Phi=(N_i, N_j, N_m)\Phi^s, \tag{3}$$

где

$$N_i=(a_i+b_i x+c_i y)/2\Delta, \tag{4}$$

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j, \quad b_i = y_j - y_m, \quad c_i = x_m - x_j, \tag{5}$$

$\Delta -$ площадь треугольника ijm.

Остальные величины, входящие в (3), можно получить циклической перестановкой индексов ijm в выражениях (4) и (5).

Так как векторы $\Phi^s\,(s \in \overline{N})$ однозначно определяют функцию во всей области, функционал χ может быть минимизирован по отношению к этим величинам [3].

Обозначим через χ^s величину функции (2) для $s-$го элемента. Принимая k_x, k_y и Ω за постоянные величины внутри элемента и произведя интегрирование, выражение (2) перепишем в виде

$$\chi^s = \frac{1}{2}(\Phi^s)^T h^s \Phi^s + (\Phi^s)^T P_s, \tag{6}$$

где

$$P^s = (P_i^s, \quad P_j^s, \quad P_m^s)^T = \left(-\frac{\Omega\Delta}{3}, \quad -\frac{\Omega\Delta}{3}, \quad -\frac{\Omega\Delta}{3}\right)^T, \tag{7}$$

$$h^s = \frac{k_x}{4\Delta}\begin{Vmatrix} b_i b_i & b_j b_i & b_m b_i \\ b_i b_j & b_j b_j & b_m b_j \\ b_i b_m & b_j b_m & b_m b_m \end{Vmatrix} + \frac{k_y}{4\Delta}\begin{Vmatrix} c_i c_i & c_j c_i & c_m c_i \\ c_i c_j & c_j c_j & c_m c_j \\ c_i c_m & c_j c_m & c_m c_m \end{Vmatrix}. \tag{8}$$

Очевидно, что для функции (2) имеет место

$$\chi = \sum_{s=1}^{\bar{n}} \chi^s. \tag{9}$$

Пусть $n-$ общее число узлов всей области; $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n)^T -$ вектор узловых функций; $P = (P_1, P_2, ..., P_n)^T -$ вектор внутренних распределенных нагрузок, связанных с заданной функцией Ω; $h = \|h_{ij}\| -$ матрица (8) для всей области. Тогда из соотношений (6) и (9) находим

$$\chi = \frac{1}{2}\Phi^T h \Phi + \Phi^T P. \tag{10}$$

Введем обозначения:

$$\begin{cases} \Phi_1 + h_{12}^{(0)}\Phi_2 + h_{13}^{(0)}\Phi_3 + \ldots + h_{1n}^{(0)}\Phi_n = \Phi_{n+1}, \\ \Phi_2 + h_{23}^{(1)}\Phi_3 + \ldots + h_{2n}^{(1)}\Phi_n = \Phi_{n+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_{n-1} + h_{(n-1)n}^{(n-1)}\Phi_n = \Phi_{2n-1} \end{cases} \tag{11}$$

и найдем произведение узловых функций. Подставив их в (10), определим

$$\chi = \frac{1}{2}(\Phi^T \hat{D}\Phi + \overline{\Phi}^T I \overline{\Phi}) + \Phi^T P,$$

где $\hat{D} = \left\| \hat{d}_{ij} \right\|$ – диагональная матрица порядка n; I – единичная матрица порядка $n-1$; $\overline{\Phi} = (\Phi_{n+1}, \Phi_{n+2}, ..., \Phi_{2n-1})^T$;

$$\begin{cases} h_{ii}^{(0)} = h_{ii}, i \in M = \{1,2,...,n\}, h_{1i}^{(0)} = h_{1i}, i \in \{2,3,...,n\}, \\ h_{ij}^{(r)} = h_{ij}^{(r-1)} - h_{i(j-1)}^{(r-1)} h_{ij}^{(r-1)}, r \in \overline{M} = \{1,2,...,n-1\}, i \in \{r,...,n\}, j \in \{r+1,...,n\}, \\ \hat{d}_{ii} = h_{ii}^{(0)} - \sum_{s=1}^{i-1} (h_{si}^{(s)})^2 - 1, i \in \overline{M}, \hat{d}_{nn} = h_{nn}^{(0)} - \sum_{i=1}^{3n-1} (h_{in}^{(n)})^2. \end{cases} \quad (12)$$

Пусть $X = \begin{pmatrix} \Phi \\ \overline{\Phi} \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}$ - векторы-столбцы порядка $2n-1$; $D = \left\| d_{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} \hat{D} & 0 \\ 0 & I \end{Vmatrix}$ - диагональная матрица порядка $2n-1$; $A = (A_1, A_2, ..., A_{2n-1})$ - матрица коэффициентов системы уравнений (11), где $A_J = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{n-1})^T$. Тогда определение искомого вектора X сводится к следующей задаче квадратичного программирования:

$$\min\{C^T X + \frac{1}{2} X^T DX \mid AX = 0, \text{граничные условия}\}. \quad (13)$$

Так как в задаче (13) отсутствуют условия неотрицательности искомых переменных, то ее решение сводится [2] к определению обратной матрицы $G^{-1} = \| g_{ij} \|$, где $G = AD^{-1}A^T$.

Алгоритм нахождения обратной матрицы G^{-1} дан в [2].

Зная обратную матрицу G^{-1}, последовательно находим векторы

$$B = AD^{-1}C,\ Z = G^{-1}B,\ X = D^{-1}(A^T Z - C). \quad (14)$$

При решении физических задач, описываемых уравнением (1), встречаются такие задачи, в которых требуется удовлетворение дополнительных условий вида

$$L = L(\Phi, \dot{\Phi}) \le 0. \quad (15)$$

Как следует из (8), матрица h^s не зависит от положения внутри элемента, и поэтому для s-го конечного элемента функция $L^S = L(\Phi^S, \dot{\Phi}^S), s \in N$ постоянная. Следовательно, условие (15) перепишется в виде

$$Y \ge 0, \quad (16)$$

где

$$Y = (y_1, y_2, ..., y_{\bar{n}})^T, y_i = -\sum_r L_r^s, i \in \overline{N}. \quad (17)$$

Здесь знак суммы распространяется на все соединяемые в узле стороны соответствующих конечных элементов $s \in \overline{N}$, и определение искомого вектора X сводится к следующей задаче:

$$\min\{C^T X + \frac{1}{2} X^T D X \mid AX = 0, Y \geq 0, \text{граничные условия}\}. \tag{18}$$

Для ее решения используем следующий алгоритм.

Нулевой шаг. Решая задачу (13), находим матрицу G_0^{-1} и вектор $X^{(0)}$. В дальнейшем вычисления аналогичны вычислениям в $k-$ом шаге. Поэтому перейдем непосредственно к рассмотрению $k-$го шага. На этом шаге предполагаются заданными множества $Q^{(k)} = \{s \in \overline{N} \mid y_s^{(k)} < 0\}$, $\overline{Q}^{(k)} = \{i \in N \mid \Phi_i^{(k)} = 0\}$, матрица $G_k^{-1} = \left\| g_{ij}^{(k)} \right\|$ и векторы $X^{(k)}$, $Y^{(k)}$. Отметим, что при $k = 0$ $Q^{(0)} \in \varnothing$, $\overline{Q}^{(0)} \in \varnothing$. На основе заданных величин находим элемент q по критерию

$$y_q^{(k)} = \min_{i \in \overline{N} \setminus Q^{(k)}} \left\{ y_i^{(k)} \right\}.$$

Рассмотрим два возможных случая.

1^0. Пусть $y_q^{(k)} \geq 0$. Тогда условие (16) выполняется, и параметры $k-$го шага, т. е. векторы $X^{(k)}$, $Y^{(k)}$, определяют решение задачи (18).

2^0. Пусть $y_q^{(k)} < 0$. Тогда перейдем к $(k+1)-$му шагу, для которого

$$Q^{(k+1)} = Q^{(k)} \cup \{q\}. \tag{19}$$

На основе (19) формируем множество $\overline{Q}^{(k+1)}$ (содержит узловые значения функции Φ всех вершин треугольников, задаваемых множеством $Q^{(k+1)}$) и определяем

$$R^{(k+1)} = \overline{Q}^{(k+1)} \setminus \overline{Q}^{(k)}.$$

Зафиксируем некоторый элемент $q \in R^{(k+1)}$, в соответствии с которым последовательно найдем вектор $\overline{A}_q$ и матрицу $G_{k+1,q}^{-1}$ по формулам [2]

$$\overline{A}_q = G_k^{-1} d_{qq}^{-1} A_q, \quad g_{ij}^{(k,q)} = g_{ij}^{(k)} + \frac{\overline{A}_q^i \overline{A}_q^j}{1 - A_q^T \overline{A}_q}, i \in \overline{M}, j \in \overline{M}. \tag{20}$$

Эту процедуру повторим для всех векторов $A_j, j \in R^{(k+1)}$, при этом для каждого нового элемента q, начиная со второго, в рекуррентных соотношениях (20) вместо матрицы G_k^{-1} нужно взять предыдущую матрицу $G_{k,q}^{-1}$. Очевидно, что в последнем шаге этой процедуры получим $G_{k+1}^{-1} = G_{k,q}^{-1}$.

Зная обратную матрицу G_{k+1}^{-1}, по формулам (14) находим вектор $X^{(k+1)}$. Далее из равенств (17) определим значения величин $y_i^{(k+1)}, i \in Q^{(k)}$ и сформируем множества $Q^{(k+1)}$, $\overline{Q}^{(k+1)}$.

Как следует из соотношения (19), при переходе от $k-$го шага к $(k+1)-$му увеличивается количество элементов множества $Q^{(k+1)}$. Однако такое увеличение возможно до выполнения условия $Q^{(k+1)} = \overline{N}$, при котором не выполняется условие (16) и задача (18) не имеет решения. Таким образом, для решения (18) необходимо выполнить не более $\overline{n}$ шагов.

Отметим, что данный алгоритм можно использовать только для необратимых процессов.

Как известно, дифференциальное уравнение, описывающее кручение призматических стержней, имеет вид [1]

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+2G\Theta=0,$$

где $\Phi-$ функция напряжения; $G-$модуль сдвига; $\Theta-$угол закручивания на единицу длины стержня.

В качестве примера рассмотрим эту задачу для стержня с поперечным сечением, состоящим из четырех треугольников: AOB, BOC, COD и DOA (см. рис.). При этом треугольник AOB изготовлен из чугуна, BOC - из стали, COD - из меди, а DOA - из дюралюминия. Соответствующие модули сдвига для них следующие: $G_{AOB}=5\cdot10^5$, $G_{BOC}=8\cdot10^5$, $G_{COD}=4\cdot10^5$, $G_{DOA}=3\cdot10^5$. Составим таблицу координат вершин треугольников. Учитывая, что площадь всех треугольников равна $\Delta=a^2$,и исходя из соотношений (5), (7) и (8), для всех элементов I, II ,…,XV,XVI находим соответствующие матрицы жесткостей и компоненты вектора нагрузок. Учитывая, что на внешней границе необходимо, чтобы $\Phi=0$, граничные условия будут иметь вид

$$\Phi_6=\Phi_7=\Phi_8=\Phi_9=\Phi_{10}=\Phi_{11}=\Phi_{12}=\Phi_{13}=0.$$

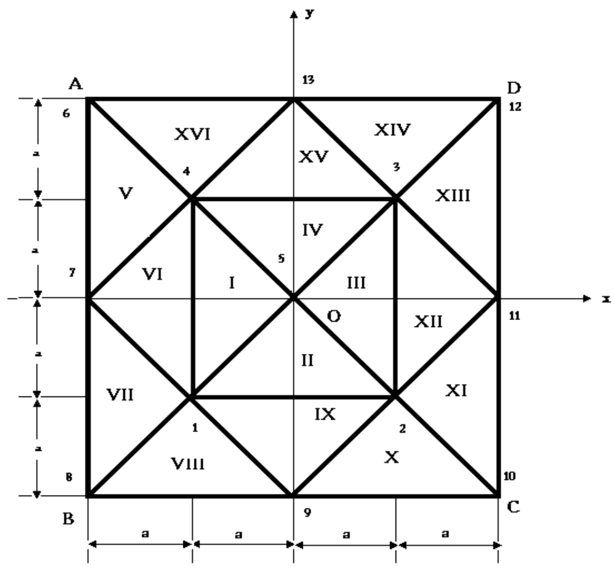

Рис.

Формируем матрицу жесткости и вектор P для всей области . Имеем

$$h=\begin{Vmatrix} 0{,}65 & 0 & 0 & 0 & -0{,}1625 \\ 0 & 0{,}75 & 0 & 0 & -0{,}1875 \\ 0 & 0 & 0{,}916667 & 0 & -0{,}291667 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}066667 & -0{,}266667 \\ -0{,}1625 & -0{,}1875 & -0{,}291667 & -0{,}266667 & 0{,}908333 \end{Vmatrix},$$

$$P=(-2\ \ -2\ \ -2\ \ -2\ \ -1{,}3333)^{T}\omega,$$

где $\omega=10^{5}\Theta a^{2}$.

Используя формулы (12) и обозначения (11), находим матрицы A и D. На основе этих величин вычисляем обратную матрицу:

$$G^{-1}=\begin{Vmatrix} -0{,}550038 & -0{,}00826891 & -0{,}00350801 & 0{,}00220506 \\ -0{,}00826891 & -0{,}33924 & -0{,}00250572 & 0{,}00157504 \\ -0{,}00350801 & -0{,}00250572 & -0{,}0919717 & 0{,}000668196 \\ 0{,}00220506 & 0{,}00157504 & 0{,}000668196 & 0{,}0620803 \end{Vmatrix}.$$

Далее по формулам (14) поочередно находим векторы

$$B=(6{,}02803\ \ 8{,}36201\ \ 24{,}5632\ \ -29{,}485)^{T}\omega,$$

$$Z=(-3{,}53597\ \ -2{,}99456\ \ -2{,}32092\ \ -1{,}78756)^{T}\omega,$$

$$\Phi=(4{,}38849\ \ 3{,}97824\ \ 3{,}85109\ \ 3{,}18657\ \ 5{,}24628)^{T}\omega.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л.** Кручение упругих тел. - М.: Гос.изд-во физ.-мат. лит, 1963. – 686 с.
2. **Геворкян Г.А.** Об одном методе расчета усилий в элементах ферм // Изв. НАН РА. Механика. - 2002. - Т. 55, №. 2. - С. 56-62.
3. **Зенкевич О., Чанг И.** Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред . - М.: Недра, 1974. - 240 с.

ЕрГУАС. Материал поступил в редакцию 10.06.2003.

Գ.Ա. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ, Վ.Ռ. ՄԱՆՈՒՍԱՋՅԱՆ

ԴԱՇՏԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԵՐԿՉԱՓ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՏԱՐՐԵՐԻ ՄԵԹՈԴԻ ՄԵԿ ՏԱՐԲԵՐԱԿԻ ՄԱՍԻՆ

Առաջարկվում է եռանյունաձև վերջավոր տարրերի մեթոդի տարբերակ, որում դաշտերի տեսության երկչափ խնդիրների լուծումը հանգեցվում է քառակուսային ծրագրավորման խնդիրների: Բերվում է լուծման ալգորիթմը:

G.A. GEVORGYAN, V.R. MANUSAJYAN

A MODIFIED FINITE - ELEMENT METHOD FOR SOLVING TWO-DIMENSIONAL FIELD THEORY PROBLEMS

A modified triangie-form finite-element method is proposed where two – dimensional field theory problem solutions are reduced to quadratic programming. The algoritm of their solution is given.