ISSN 0002-306X.   Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2004. Т. LVII, №2.

УДК 519.6

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И ИНФОРМАТИКА

С.А. ЭКСУЗЯН

УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ КОРРЕКТНОГО РАСПИСАНИЯ ДЛЯ ДВУХСТАНОЧНОЙ СИСТЕМЫ РАСКРОЯ ЛЕНТ

Доказана теорема существования корректного расписания раскроя, удовлетворяющего всем строго уменьшенным модифицированным предельным срокам для одномерного раскроя лент в двухстаночной системе.

Ключевые слова: раскрой, многостаночная система, корректное расписание, строго уменьшенные предельные сроки.

Введение. Задачи составления оптимальных расписаний для много-станочных систем одномерного раскроя лент эквивалентны задачам рас-писаний для многопроцессорных систем. Эти задачи возникают во многих отраслях и представляют большой теоретический и прикладной интерес [1-5].

1. Основные определения и обозначения. Пусть даны: W(множест-во подлежащих раскрою заказов из заготовок, имеющих одинаковые длины; два идентичных станка для одномерного раскроя заказов из W; отношение частичного порядка $\prec$ на множестве W; предельный срок d_i для раскроя заказа $J_i \in W$ (i=1,2,...,n); время раскроя каждого заказа, включая и время установки заготовки на станке, из W равно 1 (все заказы имеют одинаковое время раскроя).

При двухпроцессорной системе даны: W-множество подлежащих выполнению работ; два идентичных процессора, предназначенных для выполнения работ из W; отношение частичного порядка $\prec$ на множестве W; предельный срок d_i для выполнения работы $J_i \in W$ (i=1,2,...,n); время выполнения каждой работы из W равно 1.

Рассматриваемое отношение частичного порядка $\prec$ на W интер-претируется следующим образом: если $J \prec J'$, то заказ J' не может раскраиваться, пока не раскроен заказ J.

Заказ $J_i \in W$ называется предком заказа J_r (а J_r называется потомком J_i), если существует последовательность заказов $J_{i_1}, J_{i_2}, \ldots, J_{i_k} \in W$ такая, что $J_{i_1} = J_i$, $J_{i_k} = J_r$ и $J_{i_1} \prec J_{i_2} \prec \ldots \prec J_{i_k}$.

Для множества заказов W расписанием называется любая цело-численная функция $f: W \to [0,+\infty)$, где f(J) интерпретируется как начало выполнения раскроя заказа J.

Заказ $J \in W$ в момент времени t назовем свободным при расписании f, если для всех предков J' заказа J выполняется условие f(J')<t.

Расписание f назовем корректным, если оно удовлетворяет следующим усло-виям:

1) для $\forall t \in [0,+\infty)$ имеется $|\{J \in W / f(J)=t\}| \le 2$;

2) для $\forall J \prec J'$ имеется $f(J)+1 \leq f(J')$;

3) если $|\{J \in W / f(J)=t\}| = 0$, то $|\{J \in W / f(J)=t'\}| = 0$ для всех $t'>t$;

4) если для заказов $J, J' \in W$ существует $t \in [0,+\infty)$ такое, что $f(J)=t$, $|\{J^* \in W / f(J^*)=t\}| = 1$ и $f(J')>t$, то J’ является потомком J.

Это значит, расписание будет корректным, если в любой момент времени могут раскраиваться не более чем два заказа, соблюдается от-ношение частичного порядка и раскраивающие станки работают по принципу “немедленного подключения”, сущность которого заключается в том, что если в данный момент времени имеется свободный станок и свободные заказы, то немедленно вставляют заготовку на один из свободных станков и начинают раскрой одного из свободных заказов.

Корректное расписание удовлетворяет всем предельным срокам, если каждый заказ раскраивается до своего предельного срока, т.е. $f(J_i)+1 \leq d_i$ для всех $i=1,2,\ldots,n$.

В данной работе исследуется вопрос существования корректного расписания, удовлетворяющего всем строго уменьшенным модифициро-ванным предельным срокам.

Обозначим через [x] наименьшее целое число, превосходящее x.

Множество заказов W с отношением частичного порядка $\prec$ удобно представить в виде ориентированного графа, вершины которого - элементы множества W, а из вершины J_i имеется дуга к вершине J_r тогда и только тогда, когда $J_i \prec J_r$. Полученный ациклический граф называется графом зависимости заказов.

2. Основная теорема. В работе [4] предложен алгоритм построения корректного расписания для двухпроцессорной системы, удовлетворяющего всем предельным срокам (если такое расписание существует). Для построения такого алгоритма рассматривается некоторый алгоритм модификации всех предельных сроков и доказывается, что корректное расписание удовлетворяет всем предельным срокам тогда и только тогда, если оно удовлетворяет всем модифицированным предельным срокам. Отсюда следует, что всегда можно ограничиться рассмотрением только модифицированных предельных сроков.

Алгоритм получения модифицированных предельных сроков заключается в следующем:

M1. Вычислить транзитивное замыкание графа зависимости работ, т. е. каждую вершину соединить дугой со всеми ее потомками.

M2. Для всех работ, не имеющих потомков, в качестве модифицированных пре-дельных сроков брать их предельные сроки.

M3. Выбрать такую работу $J_i \in W$, все потомки которой уже имеют модифи-цированные предельные сроки, а сама работа J_i не имеет.

M4. Для каждого модифицированного предельного срока d’, приписанного сыну вершины J_i, определить $g(i,d')$- число сыновей вершины J_i, модифицированные предельные сроки которых не превосходят числа d’, и положить $d_i' \leftarrow \min\{d_i, d' - \lceil g(i,d')/2 \rceil\}$ (d_i' – модифицированный предельный срок работы J_i).

M5. Если не все работы имеют модифицированные предельные сроки, то перейти к

МЗ.

Для построения корректного расписания, удовлетворяющего всем модифицированным предельным срокам, Гэри и Джонсон предлагают следующий алгоритм [4].

Алгоритм GJ. Построить приоритетный список $L=(J_1,J_2,...,J_n)$ всех работ таким образом, чтобы работы были упорядочены по неубыванию модифицированных предельных сроков, т. е. $d_i' \le d_{i+1}'$ для всех $1 \le i \le n-1$. Как только один из процессоров освобождается, просмотреть список L слева направо и выбрать первую свободную работу.

Будем предполагать, что граф зависимости работ (заказов) имеет единственную вершину, куда не входит ни одна дуга. Работу (заказ) из W, которая соответствует этой вершине, назовем стартовой работой (заказом). Такое предположение не является существенным ограничением, поскольку если граф зависимости имеет не одну, а несколько стартовых работ (заказов) $J_{i_1}, J_{i_2}, \ldots, J_{i_k}$ (k>1), то к данному графу можно добавить фиктивную стартовую работу (заказ) J(и соединить ее с вершинами $J_{i_1}, J_{i_2}, \ldots, J_{i_k}$.

Пусть d_1' ,d_2' ,...,d_n' - произвольные модифицированные предельные сроки для работ (заказов) $J_1,J_2,...,J_n$ соответственно и J_{i_1} - стартовая работа (заказ). В [1] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Для существования корректного расписания, удов-летворяющего всем модифицированным предельным срокам, необходимо и достаточно, чтобы $d'_{i_1} \ge 1$.

В теореме 1 доказано, что корректное расписание, порожденное алгоритмом GJ при $d'_{i_1} \ge 1$, удовлетворяет всем модифицированным пре-дельным срокам.

Обозначим $d_i^*=d_i'-1$ (i=1,2,...,n). $d_1^*,d_2^*,...,d_n^*$ назовем уменьшенные модифицированные предельные сроки.

Для двухстаночной системы докажем лемму.

Лемма. Если для стартового заказа J_{i_1} справедливо условие $d'_{i_1} > 1$, то существует корректное расписание, удовлетворяющее уменьшенным модифицированным предельным срокам $d_1^*,d_2^*,...,d_n^*$.

Доказательство. Так как $d'_{i_1} > 1$, то, согласно теореме 1, существует корректное расписание, удовлетворяющее всем модифицированным предельным срокам $d'_1, d'_2, \ldots, d'_n$. Пусть f - корректное расписание, полученное алгоритмом GJ. По теореме 1 расписание f удовлетворяет всем модифицированным предельным срокам. Докажем, что корректное расписание f удовлетворяет всем предельным срокам $d_1^*,d_2^*,...,d_n^*$.

Очевидно, что $d_1^*,d_2^*,...,d_n^*$ являются модифицированными предельными сроками. Это вытекает из алгоритма получения модифицированных предельных сроков, где в качестве входных предельных сроков выбираем начальные предельные сроки, уменьшая каждую на 1.

Пусть f удовлетворяет не всем уменьшенным модифицированным предельным срокам d_i^* (i=1,2,...,n). Докажем лемму от противного. Тогда существует заказ J_i, для которого $f(J_i)+1>d_i^*$. Так как f удовлетворяет всем модифицированным предельным срокам $d'_1, d'_2, \ldots, d'_n$, то $f(J_i)+1 \le d'_i$. Из последних двух неравенств получаем $f(J_i)+1=d_i'$, следовательно, $f(J_i)=d_i' - 1=d_i^*$. Пусть J_i-первый заказ по расписанию f, для которого выполняется условие $f(J_i)+1>d_i^*$. Очевидно, что $i \neq i_1$, т. е. J_i -не стартовый заказ. При $i=i_1$ имеем $f(J_{i_1})+1=0+1>d^*_{i_1}$, $d^*_{i_1}<1$, $2>d^*_{i_1}+1 = d'_{i_1}$, $d'_{i_1} \le 1$, которое противоречит условию $d'_{i_1}>1$.

Докажем, что для любого t ($0 \le t< d_i^*$) существует заказ J_r, для которого $f(J_r)=t$ и $d_r^* \le d_i^*$. Так как $f(J_i)= d_i^*$, то $0 \le t< f(J_i)$.

Если в момент времени t раскраивается в точности один заказ J_r, то по принципу работы алгоритма GJ следует, что все заказы J_k, для которых $f(J_k)>t$, являются потомками заказа J_r. Поскольку $f(J_i)>t$, то J_i тоже является потомком для J_r, и, следовательно, $d_r^*< d_i^*$.

Если же в момент времени t раскраиваются в точности два заказа - J_k,J_m и d_k^*,d_m^* превосходят d_i^*, то эти заказы не являются потомками для J_i. Тогда по принципу работы алгоритма GJ следует, что $f(J_i)<f(J_k)=f(J_m)=t$, т.е. $f(J_i)<t$. Это противоречит условию $0 \le t<f(J_i)$.

Таким образом, доказано, что для произвольного t (0(t<d_i^*) существует заказ J_r, для которого $f(J_r)=t$ и d_r^*(d_i^*.

Рассмотрим следующие взаимоисключающие случаи:

а) для произвольного t ($0<t<d_i^*$) в момент времени t раскраиваются в точности два заказа, уменьшенные модифицированные предельные сроки которых не превосходят d_i^*. В этом случае очевидно, что число заказов, которые раскраиваются в интервале времени ($0,d_i^*$), равно $2d_i^*-1$, т. е. $|\{J \in W/0<f(J)<d_i^*\}| =2f(J_i)-1$.

Поскольку все эти заказы являются потомками стартового заказа J_{i_1}, то из алгоритма получения модифицированных предельных сроков (шаг M4) следует, что $d^*_{i_1} \le d^*_i - \lfloor(2d^*_i-1)/2\rfloor = d^*_i - d^*_i=0$. Из $d^*_{i_1} \le 0$ следует, что $d'_{i_1}-1 \le 0$, следовательно, $d'_{i_1} \le 1$, что противоречит условию теоремы;

б) этот случай, в свою очередь, состоит из следующих подслучаев:

б1) существует t ($0<t<d_i^*$) такое, что в момент времени t раскраивается в точности один заказ;

б2) существует t ($0<t<d_i^*$) такое, что в момент времени t раскраиваются в точности два заказа и у одного из них уменьшенный модифицированный предельный срок больше, чем d_i^*.

Так как $f(J_i)=d_i^*$, то $0<t<f(J_i)$. Пусть t - максимальное время, для которого выполняется одно из условий б1 или б2, а J_k - заказ, который раскраивается в момент времени t и $d_k^*<d_i^*$. Из условия максимальности t непосредственно следует, что для произвольного t' ($t < t' < f(J_i)$) в момент времени t' раскроются в точности два заказа и их уменьшенные модифицированные предельные сроки не превосходят d_i^*. Докажем, что все эти заказы являются потомками заказа J_k. Предположим, что существует $J_r \in W$ такое, что $t<f(J_r)<f(J_i)$ и J_r не является потомком заказа J_k. В качестве J_r возьмем первый заказ из интервала $(t,f(J_i))$, который удовлетворяет данному условию.

Если в момент времени t раскраивается один заказ J_k, то получится противоречие с принципом немедленного подключения. Если же в момент времени t, кроме J_k, раскраивается и заказ J_m, то $d_m^*>d_i^*$, согласно принципу выбора t. С другой стороны, поскольку $d_r^* \le d_i^*$, то получается противоречие с принципом работы алгоритма GJ (в момент времени t заказ J_r был свободным, $d_r^*<d_m^*$, но выбрался заказ J_m).Таким образом, доказано, что если $t<f(J_r)<f(J_i)$, то J_r является потомком для J_k. Поскольку число заказов, которые раскраиваются в интервале $(t,f(J_i))$, равно $2(f(J_i)-t)-1$, то, согласно шагу М4, имеем $d_k^* \le d_i^*-\lfloor(2(d_i^*-t)-1)/2\rfloor=d_i^*-d_i^*+t=t=f(J_k)$.

Следовательно, заказ J_k не удовлетворяет своему уменьшенному модифицированному предельному сроку d_k^* и по расписанию f встречается раньше, чем заказ J_i. Это противоречит тому, что по расписанию f заказ J_i является первым, который не удовлетворяет уменьшенному модифицированному предельному сроку. Следовательно, расписание f удовлетворяет всем уменьшенным модифицированным предельным срокам $d_1^*,d_2^*,\ldots,d_n^*$. Лемма доказана.

Предельные сроки $d_1'-d_{i_1}'+1,\ d_2'-d_{i_1}'+1,\ldots,d_n'-d_{i_1}'+1$ назовем строго уменьшенными модифицированными предельными сроками.

Теорема 2. Если $d_{i_1}'>1$, то существует корректное расписание, которое удовлетворяет всем строго уменьшенным модифицированным предельным срокам $d_1'-d_{i_1}'+1,\ d_2'-d_{i_1}'+1,\ldots,d_n'-d_{i_1}'+1$.

Доказательство*.* Доказательство теоремы непосредственно вытекает из леммы. Необходимо d_{i_1}' - 1 раз применить лемму.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Айрапетян Л.Р., Эксузян С.А.** Необходимое и достаточное условие существования корректного расписания для двухпроцессорной системы // Прикладная математика. – Ереван. - Вып. 3. – 1984. - С. 25-31.
2. **Burkard R.E., Graz and Hangzhau Y. He.** A Note on MULTIFIT Scheduling for Uniform Machines // Computing 61. – 1998. - P. 277-283.
3. **Burkard R.E., Graz, Hangzhau Y. He and Kellerer H., Graz.** A Linear Compound Algorithm for Uniform Machine Scheduling // Computing 61. – 1998. – С. 1-9.
4. **Garey M.R., Johnson D.S.** Scheduling tasks with nonuniform deadlines on two processors // Journal of the ACM. – 1976. – N 3. - P. 461-467.
5. **He Y. and Zhang G., Hangzhau.** Semi On-Line Scheduling on Two Identical Machines. // Computing 62.- 1999.- P. 179-*198.

Ванадзорский пед. инст-т. Материал поступил в редакцию 02.02.2004.

Ս.Հ. ԷՔՍՈՒԶՅԱՆ

ԺԱՊԱՎԵՆՆԵՐԻ ՁԵՎՄԱՆ ԵՐԿՈՒ ՀԱՍՏՈՑԻՑ ԿԱԶՄՎԱԾ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՀԱՄԱՐ ԿՈՌԵԿՏ ԴԱՍԱՑՈՒՑԱԿԻ ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆ

Ապացուցված է ժապավենների միաչափ ձևման երկու հաստոցից կազմված համա-կարգի համար բոլոր խիստ փոքրացված ձևափոխված սահմանային ժամանակներին բավարարող ձևման կոռեկտ դասացուցակի գոյության վերաբերյալ թեորեմ:

S.H. EKSUZYAN

CORRECT SCHEDULING EXISTENCE CONDITION OF THE TWO-MACHINE SYSTEM FOR BAND CUTTING OUT

The theorem of correct scheduling existence of band cutting out satisfying all the conditions of strictly diminished modified limited periods for one-dimensional band cutting out in two-machine system is proved.