ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 122 2022 № 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3
DOI: 10.54503/0321-1339-2022.122.2-141

**С. А. Аветисян**

# О контактном взаимодействии коллинеарной системы стрингеров с упругой неоднородной по экспоненциальному закону полосой

(Представлено чл.-кор. НАН РА С. М. Мхитаряном 10/IV 2022)

**Ключевые слова:** *экспоненциально неоднородная упругая полоса, касательные контактные напряжения, антиплоская деформация, интегральное уравнение.*

**Введение.** Задачи контактного взаимодействия тонкостенных элементов в виде стрингеров с массивными упругими телами различных геометрических форм представляют развитие и обобщение классических контактных задач теории упругости. Они будучи связаны с важными для инженерной практики вопросами передачи нагрузок от тонкостенных элементов к массивным деформируемым телам встречаются в строительной механике, в авиастроении при проектировании летательных апаратов, в тензоизмерении, в машиностроении и в других областях прикладной механики и инженерной практики. Первые исследования по задачам контактного взаимодействия между стрингерами и упругими телами восходят к известной работе Мелана [1]. В дальнейшем существенный прогресс в этом направлении был достигнут в [2-4]. Основные достижения в этой области теории упругости, полученные до 1976 г., подытоженны в коллективной монографии [5]. По обсуждаемой тематике укажем также на монографии [6-9].

В настоящей статье в модифицированной постановке [10], когда вместо задания действующих на стрингеры силовых факторов предварительно задаются горизонтальные упругие перемещения их точек, рассматривается задача о контактном взаимодействии коллинеарной системы стрингеров с упругой неоднородной полосой при антиплоской деформации, модуль сдвига которой по глубине изменяется по экспоненциальному закону. В такой постановке задачи представляют теоретический и практический интерес при исследовании вопросов жесткости систем стрингеры – упругие основания. Решение поставленной задачи сведено к решению сингулярного интегрального уравнения (СИУ) с ядром, представимым суммой сингулярного ядра Коши и регулярного ядра. Решение определяющего СИУ строится известным численно-аналитическим методом [11, 12], основанным на применении квадратурных формул Гауса для вычисления интегралов. После определения касательных контактных напряженийи под стрингерами остальные силовые факторы, действующие на стрингеры и обеспечивающие предварительно заданный режим их упругих перемещений, определяются из дифференциального уравнения деформирования стрингеров. Рассмотрены частные случаи.

**Постановка задачи и вывод основных уравнений.** Пусть отнесенный к правой прямоугольной системе координат $Oxy$ упругий слой $\Omega = \{-\infty < x, z < \infty; 0 \le y \le H\}$ имеет высоту $H$ и обладает модулем сдвига $G$, изменяющимся по глубине слоя по экспоненциальному закону $G = G_0 e^{\alpha y} \left( \alpha = const,\, 0 \le y \le H \right)$. Пусть далее нижняя грань $y = 0$ слоя жестко защемлена, а на верхней грани $y = H$ слой по системе отрезков $L = \bigcup_{k=1}^{n} L_k \left( L_k = a_k \le x \le b_k \right)$ усилен коллинеарной системой стрингеров в виде упругих полос $\omega_k = \{a_k \le x \le b_k\ ;\ 0 \le y \le h_k; -\infty < z < \infty\} \left( k = \overline{1,n} \right)$, с модулями сдвига $G_k$ и высот $h_k$. Предположим, что на верхней грани $y = h_k$ полосы $\omega_k$ в направлении оси $Oz$ действуют равномерно распределенные по оси $Oz$ касательные силы интенсивности $T_k(x)$, т.е.

$$\tau_{yz}\Big|_{y=h_k} = T_k(x) \quad \left( a_k < x < b_k\ ;\ k = \overline{1,n} \right),$$

где $\tau_{yz}$ – компонента касательных напряжений. Кроме того будем считать, что в граничных сечениях $x = a_k$ и $x = b_k$ полосы $\omega_k$ $\left( k = \overline{1,n} \right)$ в направлении оси $Oz$ действуют равномерно распределенные по этой оси касательные сосредоточенные силы $S_k^{(1)}$ и $S_k^{(2)}$, $\left( k = \overline{1,n} \right)$ соответственно.

Примем, что под воздействием этих силовых факторов система стрингеры – упругий слой находится в состоянии антиплоской деформации в направлении оси $Oz$ с базовой полосой $\Omega_0 = \{-\infty < x < \infty;\ 0 \le y \le H\}$. Описанную задачу о контактном взаимодействии коллинеарной системы стрингеров с упругой экспоненциально неоднородной полосой рассмотрим в модифицированной постановке, считая, что предварительно задан режим упругих перемещений точек стрингеров в направлении оси $Oz$, т. е. на верхной грани $y = H$ полосы $\Omega_0$ на системе отрезков $L = \bigcup_{k=1}^{n} [a_k, b_k]$

заданы перемещения $u_z\big|_{y=H} = w(x,y)\big|_{y=H} = f(x)$ $(x \in L)$, а на остальной части этой грани заданы нулевые касательные напряжения, т.е. $\tau_{yz}\big|_{y=H} = 0$ $x \in R \setminus L.$ Здесь $f(x)$–дважды непрерывно дифференцируемая функция $f(x) \in C^2(L)$. В силу условия контакта $w(x,y)\big|_{y=H} = w_s(x)$ $(x \in L)$, где $w_s(x)$ – упругие перемещения точек стрингеров в направлении оси $Oz$, функцией $f(x)$ даются упругие перемещения точек стрингеров.

Требуется определить касательные контактные напряжения $\tau_k(x)$ $\left(a_k < x < b_k;\ k = \overline{1,n}\right)$ под $k$-тым стрингером и действующие на стрингеры силовые факторы $T_k(x)$, $S_k^{(1)}$ и $S_k^{(2)}$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$, обеспечивающие заранее заданный режим их упругих перемещений в виде функции $f(x)$.

Кроме того будем считать, что заданы равнодействующие $T_k$ касательных контактных напряжений $\tau_k(x)$ под $k$-тым, стрингером:

$$\int_{a_k}^{b_k} \tau_k(s)\,ds = T_k \quad \left(k = \overline{1,n}\right). \tag{1}$$

Считая, что нижняя грань $y = 0$ полосы $\Omega_0$ жестко защемлена, выведем основные уравнения поставленной задачи. С этой целью воспользуемся выражением упругих перемещений граничных точек полосы $\Omega_0$ от действующих на ее грани $y = H$ касательных сил интенсивности $\tau(x)$ , направленных по оси $Oz$ [13]:

$$w(x,H) = \frac{2e^{-\alpha H}}{\pi G_0} \int_{-\infty}^{\infty} L(|x-s|)\tau(s)\,ds \quad (-\infty < x < \infty) \tag{2}$$

$$L(x) = \int_0^{\infty} \frac{sh(\mu H/2)\cos(\lambda x)\,d\lambda}{\mu\, ch(\mu H/2) - \alpha\, sh(\mu H/2)}\ ;\ \mu = \sqrt{\alpha^2 + 4\lambda^2}\ .$$

Исходя из (2) реализуем условие контакта

$$w(x,H) = w_s(x) f(x) \quad (x \in L),$$

в результате чего придем к следующему определяющему интегральному уравнению:

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} L(|x-s|)\tau_k(s)\,ds = \frac{G_0}{2} e^{\alpha H} f(x) \quad (x \in L). \tag{3}$$

После решения уравнения (3) можно определить действующие на стрингеры силовые факторы, обеспечивающие заданный режим их упругих перемещений. А именно, запишем дифференциальное уравнение деформирования $k$-того стрингера по модели одноосного напряженного состояния [14]:

$$h_k G_k \frac{d^2 w_s}{dx^2} = \tau_k(x) - T_k(x) \quad \left(a_k < x < b_k;\ k = \overline{1,n}\right). \tag{4}$$

Отсюда вследствие условия контакта находим

$$T_k(x) = \tau_k(x) - h_k G_k f^H(x) \quad \left(a_k < x < b_k;\ k = \overline{1,n}\right).$$

Далее введем в рассмотрение касательные усилия $S_k(x) = h_k \tau_{zx}$ в сечении $k$-того стрингера. По закону Гука $\tau_{zx}(x) = G_k \frac{dw_s}{dx}$, и, следовательно, для определения $S_k(x)$ согласно (3) получим следующую граничную задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{dS_k}{dx} = \tau_k(x) - T_k(x);\ a_k < x < b_k;\ k = \overline{1,n}; \\ S_k(x)\Big|_{x=a_k} = S_k^{(1)},\ S_k(x)\Big|_{x=b_k} = S_k^{(2)} \quad \left(k = \overline{1,n}\right). \end{cases}$$

Отсюда интегрированием находим

$$S_k(x) = \int_{a_k}^{x} \left[\tau_k(s) - T_k(s)\right] ds + S_k^{(1)} \quad a_k \le x \le b_k \quad \left(k = \overline{1,n}\right). \tag{5}$$

Уравнение (5) дает

$$S_k(a_k) = S_k^{(1)} = h_k G_k f'(a_k);\ S_k(b_k) = S_k^{(2)} = h_k G_k f'(b_k) \quad \left(k = \overline{1,n}\right). \tag{6}$$

Таким образом, после того как построено решение интегрального уравнения (2)-(1), действующие на стрингеры силы определяются формулами (5)-(6).

Продифференцировав обе части уравнения (3) по $x$, придем к интегральному уравнению

$$\frac{1}{\pi} \int_L M(s-x)\tau(s)\,ds = \frac{G_0}{2} e^{\alpha H} f'(x) \quad (x \in L) \tag{7}$$

$$M(x) = \int_0^\infty \frac{\lambda th(\mu H/2)\sin(\lambda x)\,d\lambda}{\mu - \alpha th(\mu H/2)}.$$

Введем безразмерные величины

$$\xi = x/a,\ \eta = s/a;\ \alpha_k = a_k/a,\ \beta_k = b_k/a \quad \left(k = \overline{1,n}\right); \quad L_0 = \bigcup_{k=1}^{n} [\alpha_k, \beta_k];\ \omega = \lambda a;$$

$$\tau_0(\xi)=\tau(a\xi)/G_0\ ;\ \tau_k^{(0)}(\xi)=\tau_k(a\xi)/G_0\ \ (\alpha_k<\xi<\beta_k)\ ;\ f_0(\xi)=e^{\alpha_0 H_0}f'(a\xi)\ ;$$

$$H_0=H/a\ ;\ \alpha_0=\alpha a\ ;\ \alpha H=\alpha_0 H_0\ ;\ \mu_0=\sqrt{\alpha_0^2+4\omega^2},$$

где $a$ – некоторый линейный размер, например $a=a_1$, если $a_1\neq 0$, и в интеграле Фурье функции $M(x)$ из (7) выделим ее главную сингулярную часть. В результате простых преобразований придем к определяющему СИУ рассматриваемой задачи

$$\frac{1}{\pi}\int_L\left[\frac{1}{\eta-\xi}+\frac{\pi\alpha_0}{4}sign(\eta-\xi)+M_0(\eta-\xi)\right]\tau_0(\eta)=f_0(\xi)\qquad(\xi\in L),\quad(8)$$

$$M_0(\xi)=\int_0^\infty G(\omega)\sin(\omega\xi)d\xi\ ;$$

$$G(\omega)=\frac{(\alpha_0+2\omega)\left[2\omega th(\mu_0 H_0/2)-\mu_0\right]+\alpha_0^2 th(\mu_0 H_0/2)}{2\omega\left[\mu_0-\alpha_0 th(\mu_0 H_0/2)\right]},$$

$$G(\omega)\sim-\frac{\alpha_0}{2\omega}\ (\omega\to 0)\ ;\ G(\omega)\sim\frac{\alpha_0^2}{8\omega^2}\ (\omega\to\infty).$$

При этом условие равновесия $k$-того стрингера (6) принимает вид

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k}\tau_0(\eta)d\eta=T_k^{(0)}\ \ \left(T_k^{(0)}=T_k/aG_0\ ;\ k=\overline{1,n}\right).\qquad(9)$$

Эти же безразмерные величины введем также в формулы (5)-(6). Будем иметь

$$S_k^{(0)}(\xi)=\int_{\alpha_k}^{\xi}\left[\tau_k^{(0)}(\eta)-T_k^{(0)}(\eta)\right]d\eta+T_k^{(1)}\quad \alpha_k\le\xi\le\beta_k\ ;\ k=\overline{1,n};$$

$$T_k^{(1)}=\lambda_k f_0'(\alpha_k)\ ;\ T_k^{(2)}=\lambda_k f_0'(\beta_k)\ ;\ T_k^{(0)}(\xi)=T_k(a\xi)/G_0\ ;$$

$$\lambda_k=h_k G_k/aG_0\ ;\ S_k^{(0)}(\xi)=S_k(a\xi)/aG_0\ ;\ T_k^{(j)}=S_k^{(j)}/aG_0.$$

**Решение определяющего СИУ (8)-(9).** Сначала все интервалы $(\alpha_k,\beta_k)$ преобразуем в стандартный интервал $(-1,1)$, полагая

$$\xi=\frac{\beta_k-\alpha_k}{2}t+\frac{\beta_k+\alpha_k}{2}\ ;\ \eta=\frac{\beta_k-\alpha_k}{2}u+\frac{\beta_k+\alpha_k}{2}\quad\left(-1<t,u<1\ ;\ k=\overline{1,n}\ ;\ \beta_k>\alpha_k\right).$$

Обратив эти формулы, имеем

$$t=\frac{2\xi-\beta_k-\alpha_k}{\beta_k-\alpha_k}\;;\;u=\frac{2\eta-\beta_k-\alpha_k}{\beta_k-\alpha_k}\;.$$

Пусть $\xi\in(\alpha_k,\beta_k)$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ и $\eta\in(\alpha_m,\beta_m)$ $\left(m=\overline{1,n}\right)$. Последовательно преобразуем:

$$1)\,\frac{d\eta}{\eta-\xi}=\frac{\frac{\beta_m-\alpha_m}{2}du}{\frac{\beta_m-\alpha_m}{2}u+\frac{\beta_m+\alpha_m}{2}-\frac{\beta_k-\alpha_k}{2}t-\frac{\beta_k+\alpha_k}{2}}=\frac{du}{u-\frac{\beta_k-\alpha_k}{\beta_m-\alpha_m}t+\frac{\beta_m+\alpha_m-\beta_k-\alpha_k}{\beta_m-\alpha_m}}.$$

Отсюда, если $k=m$,

$$\frac{d\eta}{\eta-\xi}=\frac{du}{u-t}\;.$$

$$2)\;sign(\eta-\xi)=sign\left(u-\frac{\beta_k-\alpha_k}{\beta_m-\alpha_m}t+\frac{\beta_m+\alpha_m-\beta_k-\alpha_k}{\beta_m-\alpha_m}\right);$$

$$3)\;M_0(\eta-\xi)=M_0\left(\frac{\beta_m-\alpha_m}{2}\left(u-\frac{\beta_k-\alpha_k}{\beta_m-\alpha_m}t+\frac{\beta_m+\alpha_m-\beta_k-\alpha_k}{\beta_m-\alpha_m}\right)\right)\;.$$

Далее введем обозначения

$$\gamma_{km}=\frac{\beta_k-\alpha_k}{\beta_m-\alpha_m}\;;\;\delta_{km}=\frac{\beta_m+\alpha_m-\beta_k-\alpha_k}{\beta_m-\alpha_m}\;;$$

$$Q_{km}=M_0\left(\frac{\beta_m-\alpha_m}{2}\left(u-\gamma_{km}t+\delta_{km}\right)\right);\;\tau_m(u)=\tau_0\left(\frac{\beta_m-\alpha_m}{2}u+\frac{\beta_m+\alpha_m}{2}\right).$$

В результате определяющее СИУ (8) запишется в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{u-t}+\frac{\pi\alpha_0}{4}sign(u-t)+Q_{kk}(t,u)\right]\tau_k(u)du+\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{m=1\\(m\neq k)}}^{n}\int_{-1}^{1}L_{km}(t,u)\tau_m(u)du=f_k(t)\quad\left(k=\overline{1,n}\right)\qquad(10)$$

$$L_{km}(u)=\frac{1}{u-\gamma_{km}t+\delta_{km}}+\frac{\pi\alpha_0}{u}sign\left(u-\gamma_{km}t+\delta_{km}\right)+Q_{km}(t,u)$$

$$\left(k\neq m;\,-1<t,u<1\right),$$

$$f_k(t)=f_0\left(\frac{\beta_k-\alpha_k}{2}t+\frac{\beta_k+\alpha_k}{2}\right);$$

а условия (9) – в виде

$$\int_{-1}^{1}\tau_k(u)\,du=\frac{2}{\beta_k-\alpha_k}T_k^{(0)}\quad\left(k=\overline{1,n}\right). \tag{11}$$

Положим

$$\tau_k(t)=\frac{\Omega_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}\quad\left(-1<t<1\,;\,k=\overline{1,n}\right),$$

где $\Omega_k(t)$ – гельдеровские функции на отрезке $-1\le t\le 1$. Тогда по известной процедуре [11, 12] СИУ (10)-(11) сведем к следующей системе систем линейных алгебраических уравнений (ССЛАУ):

$$\sum_{p=1}^{N}R_{rp}^{(km)}X_p^{(m)}=c_r^{(k)}\quad\left(r=\overline{1,N}\,;\,k=\overline{1,n}\,;\,m=\overline{1,n}\right) \tag{12}$$

$$R_{rp}^{(km)}=\begin{cases}M_{rp}^{(km)} & \left(p=\overline{1,N}\,;\,r=\overline{1,N-1}\,;\,k,m=\overline{1,n}\right);\\ \dfrac{\pi}{N} & p=\overline{1,N}\,;\,\left(r=N\,;\,k,m=\overline{1,n}\right);\end{cases}$$

$$c_r^{(k)}=\begin{cases}a_r^{(k)} & \left(r=\overline{1,N-1}\,;\,k=\overline{1,n}\right);\\ \dfrac{2}{\beta_k-\alpha_k} & T_k^{(0)}\,\left(r=N;\,k=\overline{1,n}\right);\end{cases}$$

$$M_{rp}^{(km)}=\begin{cases}\dfrac{1}{N}\left[\dfrac{1}{u_p-t_r}+\dfrac{\pi\alpha_0}{4}sign\left(u_p-t_r\right)+Q_{kk}\left(t_r,u_p\right)\right] & (m=k)\,;\\ \dfrac{1}{N}\sum\limits_{m=1}^{N}L_{km}\left(t_r,u_p\right)X_m^{(p)} & (m\ne k)\,;\end{cases}$$

$$a_r^{(k)}=f_k\left(t_r\right)\quad\left(r=\overline{1,N-1}\right);\quad X_p^{(m)}=\Omega_m\left(u_p\right);$$

$$u_p=\cos\left(\frac{(2p-1)\pi}{2N}\right)\quad\left(p=\overline{1,N}\right);\ t_r=\cos\left(\frac{\pi r}{N}\right)\ \left(r=\overline{1,N-1}\right).$$

Здесь $N$ – любое натуральное число, а $u_p$ и $t_r$ – чебышевские узлы, т.е. корни многочленов Чебышева первого $T_N(u)$ и второго $U_{N-1}(t)$ рода соответственно.

Таким образом, исходное определяющее СИУ (8)-(9) или (10)-(11) относительно $\tau_k(t)$ нескольких интервалов свелось к решению ССЛАУ (12).

*Частные случаи*. Рассмотрим два частных случая, когда ССЛАУ принимает более простой вид.

Пусть I. $n=1,\ a_1=-a,\ b_1=a\ \left(a>0\right)$. В этом случае $\alpha_1=-1,\ \beta_1=1$; $L_0=\left[-1,1\right]$ и, следовательно, СИУ (8) принимает вид

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\eta-\xi}+\frac{\pi\alpha_0}{4}sign\left(\eta-\xi\right)+M_0\left(\eta-\xi\right)\right]\tau_0\left(\eta\right)d\eta=f_0\left(\xi\right)\quad\left(-1<\xi<1\right)\ ,\tag{13}$$

а условие (9) – вид

$$\int_{-1}^{1}\tau_0\left(\eta\right)d\eta=T_1^{(0)}\ .\tag{14}$$

Далее, полагая

$$\tau_0\left(\eta\right)=\frac{\Omega_0\left(\eta\right)}{\sqrt{1-\eta^2}}\qquad\left(-1<\eta<1\right)\ ,$$

где $\Omega_0\left(\eta\right)$ – опять гельдеровская функция на отрезке $\left[-1,1\right]$, как выше, СИУ (13)-(14) сведем к следующей системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{m=1}^{N}K_{rm}X_m=a_r\quad\left(r=\overline{1,N}\right)\tag{15}$$

$$K_{rm}=\begin{cases}\dfrac{1}{N}\left[\dfrac{1}{\eta_m-\xi_r}+\dfrac{\pi\alpha_0}{4}sign\left(\eta_m-\xi_r\right)+M_0\left(\eta_m-\xi_r\right)\right] & \left(m=\overline{1,N}\ ;\ r=\overline{1,N-1}\right)\\ \dfrac{\pi}{N} & \left(m=\overline{1,N}\ ;\ r=N\right);\end{cases}$$

$$a_r=\begin{cases}f_0\left(\xi_r\right)\quad\left(r=\overline{1,N-1}\right); & \eta_m=\cos\left(\dfrac{\left(2m-1\right)}{2N}\right);\\ T_1^{(0)}\qquad\left(r=N\right); & \xi_r=\cos\left(\dfrac{\pi r}{N}\right)\ \left(m=\overline{1,N}\ ;\ r=1,N-1\right)\end{cases}$$

Отметим, что СЛАУ (15) намного проще ССЛАУ (12).

II. $n=2;\ a_1=-a,\ b_1=-b\ ;\ b_2=a\ \left(b<a\right)$. В этом случае в безразмерных величинах

$$\alpha_1=-1\ ,\ \beta_1=-\rho\ ,\ \alpha_2=\rho\ ,\ \beta_2=1\quad\left(\rho=b/a\ ,\ 0<\rho<1\right)$$

и, следовательно,

$$\beta_1-\alpha_1=1-\rho\ ;\ \beta_1+\alpha_1=-1-\rho;\ \beta_2-\alpha_2=1-\rho;\ \ \beta_2+\alpha_2=1+\rho;\ \gamma_{km}=1\ \ \left(k,m=1,2\right);$$

$$\delta_{11}=\frac{\beta_1+\alpha_1-\beta_1-\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1}=0\ ;\ \delta_{12}=\frac{\beta_2+\alpha_2-\beta_1-\alpha_1}{\beta_2-\alpha_2}=\frac{2(1+\rho)}{1-\rho}\ ;$$

$$\delta_{21}=\frac{\beta_1+\alpha_1-\beta_2-\alpha_2}{\beta_1-\alpha_1}=\frac{2(1+\rho)}{1-\rho}\ ;\ \delta_{22}=\frac{\beta_2+\alpha_2-\beta_2-\alpha_2}{\beta_2-\alpha_2}=0\cdot$$

В результате в данном случае определяющее СИУ (10) примет вид

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{u-t}+\frac{\pi\alpha_0}{4}sign(u-t)+Q_{kk}(t,u)\right]\tau_k(u)du+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}L_{km}(t,u)\tau_m(u)du=f_k(t)\quad(k=1,2;\ k\neq m);$$

$$L_{km}(t,u)=\frac{1}{u-t+\delta_{km}}+\frac{\pi\alpha_0}{4}sign(u-t+\delta_{km})+Q_{km}(t,u)\quad(m=1,2\ ;\ k\neq m)\ ; \tag{16}$$

$$f_k(t)=f_0\left(\frac{1-\rho}{2}t+(-1)^k\frac{1+\rho}{2}\right)\quad(k=1,2)\ ;\ Q_{km}=M_0\left(\frac{1-\rho}{2}(u-t+\delta_{km})\right),$$

$$\tau_k(u)=\tau_0\left(\frac{1-\rho}{2}u+(-1)^k\left(\frac{1+\rho}{2}\right)\right)\ (k=1,2)\ ;$$

а условие (11) запишется в виде

$$\int_{-1}^{1}\tau_k(u)du=\frac{2}{\beta_k-\alpha_k}T_k^{(0)}\quad(k=1,2)\ . \tag{17}$$

Далее, опять полагая

$$\tau_m(u)=\frac{\Omega_m(u)}{\sqrt{1-u^2}}\quad(-1<u<1)\ ,$$

СИУ (16)-(17) сведем к ССЛАУ:

$$\sum_{p=1}^{N}K_{rp}^{(km)}X_p^{(m)}=c_r^{(k)}\quad(k,m=1,2)$$

$$K_{rp}^{(km)}=\begin{cases}\dfrac{1}{N}\left[\dfrac{1}{u_p-t_r}+\dfrac{\pi\alpha_0}{4}sign(u_p-t_r)+Q_{kk}(t_r,u_p)\right] & (p=\overline{1,N};r=\overline{1,N-1};m=k);\\ \dfrac{1}{N}L_{km}(t_r,u_p) & (p=\overline{1,N};r=\overline{1,N-1};m\neq k);\\ \dfrac{\pi}{N} & p=\overline{1,N};r=N;(k,m=1,2);\end{cases}$$

$$c_r^{(k)}=\begin{cases}a_r^{(k)}\quad(r=\overline{1,N-1}\ ;\ k=1,2)\ ; & X_p^{(m)}=\Omega_m^{(u_p)}\ ;\\ \dfrac{2}{\beta_k-\alpha_k}T_k^{(0)}\ ; & a_r^{(k)}=f_k(t_r)\quad(r=\overline{1,N-1}).\end{cases}$$

В обсуждаемом случае вычислим коэффициент концентрации (КК) касательных контактных напряжений в ближних концах стрингеров:

$$K_b=\lim_{x\to b+0}\left[\sqrt{x-b}\,\tau(x)\right]=\lim_{\xi\to\rho+0}\left[\sqrt{a\xi-b}\,\frac{\tau(a\xi)}{G_0}\right]G_0=$$

$$=G_0\sqrt{a}\lim_{\xi\to\rho+0}\left[\sqrt{\xi-\rho}\,\tau_0(\xi)\right]=G_0\sqrt{a}\lim_{t\to-1+0}\left[\sqrt{\frac{1-\rho}{2}t+\frac{1+\rho}{2}-\rho}\,\tau_0(\xi)\right]=$$

$$=G_0\sqrt{a}\lim_{t\to-1+0}\left[\sqrt{\frac{1-\rho}{2}(t+1)}\,\tau_0\left(\frac{1-\rho}{2}t+\frac{1+\rho}{2}\right)\right]=G_0\sqrt{a}\,\frac{1-\rho}{2}\lim_{t\to-1+0}\left[\sqrt{1+t}\,\tau_2(t)\right]=$$

$$=G_0\sqrt{a}\,\frac{1-\rho}{2}\lim_{t\to-1+0}\left[\sqrt{1+t}\,\frac{\Omega_2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right]=\frac{G_0\sqrt{a}}{2}\sqrt{1-\rho}\,\Omega_2(-1)\ .$$

Отсюда для безразмерного КК

$$K_0=\sqrt{1-\rho}\ \Omega_2(-1);\quad K_0=2K_b\big/G_0\sqrt{a}$$

или, воспользовавшись интерполяционным многочленом Лагранжа [15], окончательно получим

$$K_0=\frac{\sqrt{1-\rho}}{N}\sum_{p=1}^{N}(-1)^{p+N}\,tg\left(\frac{(2p-1)\pi}{4N}\right)X_p^{(2)}\ .$$

Отметим, что в другом частном случае, когда полоса заменяется полуплоскостью, основные расчетные формулы для характеристик задачи еще более упрощаются.

**Заключение.** Обе постановки задач контактного взаимодействия между стрингерами и массивными упругими телами взаимосвязаны и имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Результаты исследования таких задач в обычной постановке, когда заданы действующие на стрингеры и упругие основания силовые факторы и требуется определить контактные напряжения под стрингерами и осевые напряжения в их сечениях, представляют интерес для изучения закономерностей изменения прочностных характеристик конструкций типа стрингеры – упругие основания. А в модифицированной постановке таких задач, когда заранее задаются упругие перемещения точек стрингеров и требуется определить действующие на них силовые факторы, обеспечивающие заданный режим перемещений, полученные результаты представляют интерес при исследовании вопросов жесткости систем стрингеры – упругие основания.

Национальный университет архитектуры
и строительства Армении
e-mail: siranushav@gmail.com

**С. А. Аветисян**

## О контактном взаимодействии коллинеарной системы стрингеров с упругой неоднородной по экспоненциальному закону полосой

В модифицированной постановке рассматривается задача о контактном взаимодействии коллинеарной системы стрингеров с упругой полосой (слоем), когда модуль сдвига по ее глубине изменяется по экспоненциальному закону, при антиплоской деформации. Решение задачи относительно неизвестных контактных касательных напряжений под стрингерами сведено к решению сингулярного интегрального уравнения с ядром, представимым суммой ядра Коши и регулярного ядра, которое в свою очередь известным численно-аналитическим методом, основанным на квадратурных формулах Гаусса для вычисления интегралов, сведено к решению конечной системы линейных алгебраических уравнений. В модифицированной постановке задачи о контакте стрингеров с массивными упругими телами представляют теоретический и практический интерес для исследований жесткости систем стрингеры – упругие основания.

Ս. Ա. Ավետիսյան

## Ստրինգերների համագիծ համակարգի և էքսպոնենցիալ օրենքով անհամասեռ շերտի կոնտակտային փոխազդեցության մասին

Ստրինգերների համագիծ համակարգի և առաձգական շերտի կոնտակտային փոխազդեցության խնդիրը հկահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ, երբ շերտի սահքի մոդուլը ըստ խորության փոփոխվում է ըստ էքսպոնենցիալ օրենքի, դիտարկվում է մոդիֆիկացված դրվածքով: Խնդրի լուծումը բերվում է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման լուծման, որի կորիզը ներկայացվում է Կոշիի կորիզի և ռեգուլյար կորիզի գումարի տեսքով: Որոշիչ ինտեգրալ հավասարման լուծումն իր հերթին հայտնի թվային վերլուծական մեթոդով՝ հիմնված ինտեգրալների հաշվման Գաուսի քառակուսացման բանաձևերի վրա, բերվում է գծային հանրահաշվական հավասարումների վերջավոր համակարգի լուծման: Ստրինգերների և առաձգական հոծ մարմինների կոնտակտային խնդիրների մոդիֆիկացված դրվածքը տեսականորեն և գործնականորեն հետաքրքիր է ստրինգերներ – առաձգական հիմքեր համակարգերի կարծրության ուսումնասիրությունների համար:

**S. A. Avetisyan**

## On Contact Interaction of Collinear System of Stringers with Elastic Inhomogeneous by Exponential Law Strip

The problem on contact interaction between the collinear system of stringers with elastic strip (layer), when the shear module by its depth changes by exponential law with anti-plane deformation is considered. The problem solutions are brought to the solution SIE with kernel, represented by Cauchy kernel sum and regular kernel. The solution of the determining SIE in its turn well known by numerical-analytical method,

based on quadratic Gauss formulae for the integrals calculation, is brought to the solution of final SLAE. In modified setting, the problems on the contact of the stringers with massive elastic bodies have theoretical and practical interest in the investigations on the questions of rigidity systems of stringers – elastic bases.

## Литература


1. *Melan E.* – Ing. Arch. 3, 1932. № 2. P. 123–129.
2. *Koiter W. J. T.* – Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1955. № 2. P. 164-178.
3. *Muki R., Sternberg E.* – J. of Appl. Mech. Trans. ASME, Ser. E. 1967. № 3. P. 233-242.
4. *Bufler H.* – Ing. Arch. 1964. № 3-4. P. 284–292.
5. Развитие теории контактных задач в СССР. М. Наука. 1976. 493 с.
6. *Черепанов Г. П.* Механика разрушения композиционных материалов. М. Наука. 1983. 296 с.
7. *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.* Контактные задачи теории пластин и оболочек. М. Машиностроение. 1980. 415 с
8. *Акопян В. Н.* Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван. Гитутюн. 2014. 322 с.
9. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М. Наука. 1983. 488 с.
10. *Mkhitaryan S. M., Kanetsyan E. G., Mkrtchyan M. S.* In: Construction Technologies and Architecture. V. 2. P. 19-30.
11. *Erdogan F., Gupta G. D., Cook T. S.* Leyden. Noordhoff Intern. Publ. 1973. P. 368–425.
12. *Theocaris P. S., Ioakimidis N. I.* – Quart. Appl Math. 1977. V. 35. № 1. P. 173–185.
13. *Аветисян С. А.* В кн.: Актуальные проблемы механики сплошной среды. Тр. IV междунар. конф., 21-26 сент. 2015, Цахкадзор, Армения. Ереван. 2015. С. 15-19.
14. *Мхитарян С. М.* В сб.: Механика деформируемого твердого тела. Ереван. Изд–во НАН Армении. 1993. С. 129–143.
15. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев. Наукова думка. 1976, 443 с.