ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 122 2022 № 2

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 510.64
DOI: 10.54503/0321-1339-2022.122.2-125

Л. А. Апинян[1], А. А. Чубарян[2]

Сравнение длин линейных и древовидных выводов некоторых семейств формул в ряде систем исчисления высказываний

(Представлено академиком Ю. Г. Шукуряном 5/V 2022)

Ключевые слова: *разновидности секвенциальных систем исчисления высказываний; система обобщенных расщеплений; количество шагов и длина вывода; экспоненциальное ускорение.*

1. Введение. Бурное развитие теории сложностей пропозициональных выводов было вызвано известным результатом Кука и Рекхау о равенстве множеств NP и $coNP$ в том и только том случае, если существует полиномиально ограниченная система выводов классических тавтологий [1]. За годы интенсивных исследований получено множество интересных оценок длины и количества шагов выводов в различных известных системах классического исчисления высказываний, а также определение новых систем. Одной из наиболее интересных является рассматривающая пропозициональные формулы с кванторами секвенциальная система, которая в настоящее время расположена на верхнем уровне известной иерархии пропозициональнх систем выводов. Некоторые из систем этой иерархии условно определены как «слабые» системы – системы, в которых для отдельных классов формул получены нижние экспоненциальные оценки длин выводов (например, секвенциальная система без правила сечения **PK¯** и монотонная секвенциальная система **Pmon),** а те системы, в которых ни для какого класса таковых оценок пока не найдено, считаются «сильными» (например, секвенциальная система с правилом сечения **PK,** та же система с добавлением правила подстановки **SPK,** а также та же система с добавлением кванторов **QPK**).

Особый интерес к изучению системы **QPK** вызвали результаты работы [2], в которой для одного из рассмотренных семейств формул выявлено отличительное свойство системы **QPK**, а именно доказано экспоненциальное ускорение шагов древовидного вывода по отношению к системам **SPK** и **PK,** которые в свою очередь имеют экспоненциальное ускорение по отношению к системе **PK**$^{-}$**.** Та же задача для *линейных* выводов (выводов, в которых формулы не повторяются) решена в [3], где показано отсутствие такого приоритета системы **QPK.**

В настоящей работе исследованы *длины* как *линейных,* так и *древовидных* выводов для тех же систем, которые рассмотрены в [2, 3], а также для системы обобщенных расщеплений. Сравнение полученных результатов с ранее полученными оценками для *шагов* тех же разновидностей выводов тех же формул и в тех же системах указывает на определенную значимость именно длины вывода как основной сложностной характеристики выводов.

2. Предварительные понятия. Для представления основных результатов напомним некоторые понятия и обозначения. Мы пользуемся общепринятыми определениями пропозициональной формулы, пропозициональной формулы с кванторами, свободной переменной в формуле с кванторами, секвенции, секвенциальных систем без сечения, секвенциальных систем с правилом подстановки, секвенциальных систем с кванторами, сложностей выводов [1-4].

Конкретный выбор языка для представления пропозициональной формулы, а значит, и системы доказательств, не имеет значения для наших рассмотрений, однако из технических соображений мы предполагаем, что он содержит пропозициональные переменные, логические связки $\neg$, &, $\vee$, $\supset$ и пару скобок (,). В некоторых системах будут использованы также знаки T «истина» и $\perp$ «ложь».

Длина формулы φ, определяемая как количество всех вхождений в нее логических связок, обозначается через $|\varphi|$. Очевидно, что линейной функцией от $|\varphi|$ оценивается и полная длина формулы, понимаемая как количество всех символов.

2.1. Описание рассматриваемых систем. Секвенцией называется выражение $\Gamma \to \Delta$, где Γ (антецедент) и Δ (сукцедент) являются конечной (может быть пустой) последовательностью пропозициональных формул. Следуя [2], определим следующие системы.

Схемой аксиом для классической системы **PK** является секвенция $p \to p$, $\to$ T, где p – произвольная пропозициональная переменная.

Для произвольных формул A , B и последовательностей формул Γ и Δ логическими правилами вывода являются:

$$\supset\to \frac{\Gamma \to \Delta,\ A \qquad B,\ \Gamma \to \Delta}{A \supset B,\ \Gamma \to \Delta} \qquad \to\supset \frac{A,\ \Gamma \to\ \ B,\ \Delta}{\Gamma \to A \supset B, \Delta}$$

$$\vee\to \frac{A,\ \ \Gamma \to \Delta \text{ и }\ B,\ \Gamma \to \Delta}{A \vee B,\ \ \Gamma \to \Delta} \qquad \to\vee \frac{\Gamma \to A,\ \ \Delta \text{ или }\ \ \Gamma \to B,\ \ \ \Delta}{\Gamma \to A \vee B,\ \Delta}$$

$$\& \to \frac{A,\ \ \Gamma \to \Delta \text{ или } B,\ \Gamma \to \Delta}{A\&B,\ \ \Gamma \to \Delta} \qquad \to \& \frac{\Gamma \to A, \Delta \text{ и } \Gamma \to B, \Delta}{\Gamma \to A\&B, \Delta}$$

$$\neg\to \frac{\Gamma\to\ \ A,\ \ \Delta}{\neg A,\ \ \Gamma\to\Delta} \qquad \to \neg \frac{A,\ \Gamma\to\ \ \ \Delta}{\Gamma\to\neg A,\ \ \Delta}.$$

Структурное правило

$$\frac{\Gamma \to \ \Delta}{\Gamma' \to \Delta'}, \Gamma' \supseteq \Gamma, \Delta' \supseteq \ \Delta.$$

Правило сечения

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A \quad A, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta}.$$

Система **PK¯** получается из системы **PK** удалением правила сечения.

Система **SPK** получается из системы **PK** добавлением правила подстановки

$$S_p^{\mathrm{B}} \quad \frac{\mathrm{C}(p), \Gamma \to \Delta, A(p)}{\mathrm{C}(\mathrm{B}), \Gamma \to \Delta, A(\mathrm{B})},$$

где переменная p не присутствует ни в Г, ни в Δ, В – формула, подставляемая вместо всех вхождений переменной p.

Система **QPK** получается из системы **PK** добавлением правил

$$\frac{A(q), \Gamma \ \to \ \Delta}{(\exists p)A(p), \Gamma \ \to \ \Delta}(\exists \to) \qquad \frac{\Gamma \ \to \ \Delta, A(\mathrm{B})}{\Gamma \ \to \ \Delta, (\exists p)A(p)}(\to \exists)$$

$$\frac{A(\mathrm{B})\Gamma \to \Delta}{(\forall p)A(p), \Gamma \to \Delta}(\forall\to) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, A(q)}{\Gamma \to \Delta, (\forall p)A(p)}(\to \forall),$$

где В – любая пропозициональная формула, быть может, с кванторами, а также выполнены следующие условия: в нижних секвенциях правил $(\exists \to)$ и $(\to \forall)$ не должно быть свободных переменных, которые не свободны в верхних, и все вхождения переменной q в *A(q)* должны быть заменены переменной p, а в правилах $(\to \exists)$ и $(\forall\to)$ формула В не должна содержать переменные, находящиеся в области действия каких-либо кванторов.

В системе **Pmon** и в антецедентах и в сукцедентах используются только монотонные функции, а потому нет правил введения и удаления импликации и отрицания.

2.2. Для описания системы ОР напомним следующие понятия. Для произвольной пропозициональной формулы ψ следующие тривиальные эквивалентности назовем правилами замещения:

$0 \,\&\, \psi = 0,$	$\psi \,\&\, 0 = 0,$	$1 \,\&\, \psi = \psi,$	$\psi \,\&\, 1 = \psi,$
$0 \vee \psi = \psi,$	$\psi \vee 0 = \psi,$	$1 \vee \psi = 1,$	$\psi \vee 1 = 1,$
$0 \supset \psi = 1,$	$\psi \supset 0 = \bar{\psi},$	$1 \supset \psi = \psi,$	$\psi \supset 1 = 1,$
$\bar{0} = 1,$	$\bar{1} = 0,$	$\bar{\bar{\psi}} = \psi,$	
$0 \equiv \psi = \bar{\psi},$	$\psi \equiv 0 = \bar{\psi},$	$1 \equiv \psi = \psi,$	$\psi \equiv 1 = \psi.$

Применение правил замещения к некоторому слову заключается в замене какого-либо его подслова, имеющего вид левой части одного из указанных эквивалентностей, правой частью.

Система обобщенных расщеплений **ОР** была введена в [4]. Обобщенный метод расщеплений (о.м.р.) позволяет каждой формуле φ сопоставить некоторое помеченное бинарное дерево расщепления (д.р.), корню которого приписана сама формула φ, конечным узлам приписаны значения 0 или 1, а сыновьям каждого узла v, которому приписана некоторая формула φ_v, приписаны результаты расщепления φ_v по некоторой переменной p, входящей в φ_v следующим образом:

1) при расщеплении тавтологии φ по литералу α делаем пометку α на ребре, ведущем от узла с пометкой φ к узлу с пометкой $\varphi[\alpha]$,

2) сама формула $\varphi[\alpha]$ строится по φ следующим образом: если $\alpha = p(\alpha = \bar{p})$, то всюду в φ вместо переменной p подставляем значение $1(0)$ и применяем правила замещения или до получения формулы, не содержащей константы, или до получения константы. Очевидно также, что тавтологиям соответствуют деревья, конечным узлам которых приписаны только единицы.

Соответствующая система, основанная на о.м.р. с одной аксиомой-тавтологией – 1 и одним правилом вывода $\varphi[p],\ \varphi[\bar{p}] \vdash \varphi$, обозначена через **OP.**

2.3. Некоторые характеристики тавтологий и систем выводов. Основными сложностными характеристиками выводов являются: *t*-сложность, определяемая как количество всех формул (секвенций) в выводе, и *l*-сложность, определяемая как сумма длин всех формул (секвенций) в выводе [1]. Пусть ϕ является некоторой системой выводов, а φ – некоторая тавтология. Через $\boldsymbol{t}^{\phi}(\varphi)\big(\boldsymbol{l}^{\phi}(\varphi)\big)$ обозначается минимально возможное значение *t*-сложности (*l-сложности*) всевозможных выводов тавтологии φ (секвенции $\rightarrow \varphi$) в системе ϕ. Если для двух систем ϕ_1 и ϕ_2 для одних и тех же последовательностей секвенций $\rightarrow \varphi_n$ для достаточно больших n имеет место $t^{\phi_1}(\varphi_n) = \Omega(2^{t^{\phi_2}(\varphi_n)})$, то считают, что для последовательности секвенций $\rightarrow \varphi_n$ система ϕ_2 имеет ***экспоненциальное ускорение*** по отношению к системе ϕ_1.

2.4. Результаты предыдущих работ. В [2] дано определение некоторого класса тавтологий длины $O(2^{2^n})$, для которых исследовано количество шагов выводов в виде дерева в ряде вышеперечисленных секвенциальных систем.

Для пропозициональной переменной p формула p^m определяется по индукции следующим образом: $p^0 \equiv p$ и $p^{i+1} \equiv (p^i \& p^i)$ для $i \geq 0$. Нетрудно проверить, что формула p^m содержит ровно $2^m - 1$ вхождений логических связок.

Для упрощения дальнейших записей введем следующие обозначения. Для сложностных характеристик древовидных выводов будем использовать индекс «д», а для линейных – индекс «л». Пусть Ф – некоторая секвенциальная система выводов, тогда *t*-сложность ((*l-сложность*) древовидного вывода секвенции $p \rightarrow p^m$ обозначим через $\boldsymbol{t}д^{\Phi}(\boldsymbol{m})\big(\boldsymbol{l}д^{\Phi}(\boldsymbol{m})\big)$, а соответственно для линейного вывода через $\boldsymbol{t}л^{\Phi}(\boldsymbol{m})\big(\boldsymbol{l}л^{\Phi}(\boldsymbol{m})\big)$.

Теорема [2]. *Для достаточно больших n и последовательности секвенций* $p \rightarrow p^{2^n}$

$\boldsymbol{t}д^{\mathbf{QPK}}(2^n)=O(n)$; $\boldsymbol{t}д^{\mathbf{SPK}}(2^n)=\Omega(2^n)$; $\boldsymbol{t}д^{\mathbf{PK}}(2^n)=\Omega(2^n)$; $\boldsymbol{t}д^{\mathbf{PK-}}(2^n)=\Omega\big(2^{2^n}\big)$.

Как видим, здесь очевидное преимущество системы **QPK.**

В [3] для количества шагов той же последовательности секвенций доказана.

Теорема [3]. *Для достаточно больших n и последовательности секвенций* $p \to p^{2^n}$

$$\boldsymbol{t}л^{\mathbf{QPK}}(2^n)=O(\mathrm{n});\ \boldsymbol{t}л^{\mathbf{SPK}}(2^n)=O(\mathrm{n});\ \boldsymbol{t}л^{\mathbf{PK}}(2^n)=\theta(2^n);\ \boldsymbol{t}л^{\mathbf{PK-}}(2^n)=\theta(2^n).$$

Эти результаты показывают, что при рассмотрении линейных (более используемых) форм выводов квантифицированные системы не имеют преимущества перед системой с правилом подстановки, которая имеет уже известное экспоненциальное ускорение по отношению к системам без правила подстановки, впервые установленное в [5].

3. Основные результаты. 3.1. Здесь оценены *l-сложности* **линейных** выводов семейства секвенций $p \to p^{2^n}$ в вышеопределенных секвенциальных системах.

Теорема 1. *Для достаточно больших n и последовательности секвенций* $p \to p^{2^n}$

$$lл^{\mathbf{QPK}}(2^n)=\theta(2^{2^n});\quad lл^{\mathbf{SPK}}(2^n)=\theta(2^{2^n});$$

$$lл^{\mathbf{PK}}(2^n)=\theta\left(2^{2^n}\right);\quad lл^{\mathbf{PK-}}(2^n)=\theta(2^{2^n})\ \text{ и }\ lл^{\mathbf{P}\boldsymbol{mon}}(2^n)=\theta\left(2^{2^n}\right).$$

Для **доказательства** нужно оценить длину линейного вывода $p \to p^{2^n}$ во всех указанных системах. Отметим, что $|\,p^{2^n}| = 2^{2^n} - 1$, а значит, нижняя оценка $\Omega(2^{2^n})$, для всех систем очевидна, так как хотя бы один раз в выводе присутствует сама формула. Для получения верхних оценок будут построены некоторые линейные выводы в указанных системах.

Линейный вывод в QPK

Нам полезен древовидный вывод секвенции $\to p \supset p^{2^n}$ в системе **QPK** с количеством шагов $O(n)$.

Сначала рассматривается вывод секвеции $\forall q(q \supset q^k) \to \forall q(q \supset q^{2k})$, где k – произвольное натуральное число и $q^{2k} = (q^k)^k$. Вывод этой секвенции не зависит от k и может быть получен за конечное число шагов следуюшим образом (справа выписаны соответствующие длины):

$p \to p \quad p^k \to p^k$	$2^{k+2}+2$
$p \supset p^k, p \to p^k$	$2^{k+2}+2$
$\forall q(q \supset q^k), p \to p^k \quad p^{2k} \to p^{2k}$	$2^{k+2}+2^{2k+2}+5$
$\forall q(q \supset q^k), p^k \supset p^{2k}, p \to p^{2k}$	$2^{k+2}+2^{2k+2}+5$
$\forall q(q \supset q^k), p^k \supset p^{2k} \to p \supset p^{2k}$	$2^{k+2}+2^{2k+2}+6$
$\forall q(q \supset q^k), \forall q(q \supset q^k) \to p \supset p^{2k}$	$2^{k+2}+2^{2k+1}+8$
$\forall q\left(q \supset q^k\right) \to p \supset p^{2k}$	$2^{k+1}+2^{2k+1}+5$
$\forall q(q \supset q^k) \to \forall q(q \supset q^{2k})$	$2^{k+1}+2^{2k+1}+7$

Следует отметить, что в этом выводе нет повторяющихся секвенций, а значит, этот вывод линейный. Повторяя этот вывод n раз, можно получить вывод секвенции

$$\forall q(q \supset q^2) \to \forall q\left(q \supset q^{2^n}\right),$$

а так как $\forall q(q \supset q^2)$ выводится за конечное число шагов, то $\forall q(q \supset q^{2^n})$, а следовательно, и $\to p \supset p^{2^n}$, выводится за $O(n)$ шагов.

В выписанном отрезке вывода количество всех вхождений логических символов равно $7*2^{k+2} + 9 * 2^{2k+1} + 40$, но так как эти шаги повторяются n раз со значениями $k = 2^i$, где $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, то общая длина вывода не будет превышать 2^{2^n+7}, а значит, верхняя оценка будет $O(2^{2^n})$. Следовательно, $l\text{л}^{\mathbf{QPK}}(2^n) = \theta(2^{2^n})$.

Линейный вывод в SPK

1	$p^0 \to p^0$ акс.	0
2	$p^0 \to p^1$ $(\to \&)$	2^1 - 1
3	$p^1 \to p^2$ подст.	$2^1 - 1 + 2^2 - 1$
4	$p^0 \to p^2$ сечение	$2^2 - 1$
…		
2n + 1	$p^{2^{n-1}} \to p^{2^n}$ подст.	$2^{2^{n-1}} - 1 + 2^{2^n} - 1$
2n + 2	$p^0 \to p^{2^n}$ сечение	$2^{2^n} - 1$

Нетрудно убедиться, что общее количество символов не будет превышать 2^{2^n+3}. Значит, верхняя оценка будет $O(2^{2^n})$. Следовательно, можем дать длине линейного вывода в **SPK** оценку, которая будет $\theta(2^{2^n})$.

Линейный вывод в **PK**

1	$p^0 \to p^0$	0
2	$p^0 \to p^1$ $(\to \&)$	2^1 - 1
3	$p^0 \to p^2$ $(\to \&)$	$2^2 - 1$
...		
2^n	$p^0 \to p^{2^n-1}$ $(\to \&)$	2^{2^n-1} −1
2^n+1	$p^0 \to p^{2^n}$ $(\to \&)$	2^{2^n} −1

Длина линейного вывода не будет превышать $\sum_{i=0}^{2^n} 2^i \leq 2^{2^n+1}$, т.е. верхняя оценка будет $O(2^{2^n})$, а значит, $l\text{л}^{\mathbf{PK}}(2^n) = \theta\left(2^{2^n}\right)$. В **PK**⁻ **(Pmon)** всё аналогично **PK**, так как выше не было применено правило сечения (было применено только правило $(\to \&)$), а значит, $l\text{л}^{\mathbf{PK}-}(2^n) = \theta(2^{2^n})$ и $l\text{л}^{\boldsymbol{Pmon}}(2^n) = \theta\left(2^{2^n}\right)$.

Теорема 1 полностью доказана. Получается, что, действительно, ни в какой из систем не наблюдается экспоненциального ускорения длин выводов по отношению к другим.

3.2. Здесь оценены *l-сложности* ***древовидных*** выводов семейства секвенций $p \to p^{2^n}$ в вышеопределенных секвенциальных системах

Теорема 2. *Для достаточно больших n и последовательности секвенций* $p \to p^{2^n}$

$$l\text{л}^{\mathbf{QPK}}(2^n) = \theta(2^{2^n}); \quad l\text{л}^{\mathbf{SPK}}(2^n) = \theta(2^{2^n});$$

$$\log_2(l\text{л}^{\mathbf{PK}}(2^n)) = \theta(2^n);\ \log_2(l\text{л}^{\mathbf{PK-}}(2^n)) = \theta(2^n) \text{ и}$$
$$\log_2(l\text{л}^{\mathbf{P}\boldsymbol{mon}}(2^n)) = \theta(2^n).$$

Для **доказательства** во всех вышеперечисленных системах линейные выводы преобразуются в древовидные повторением выводов формул, используемых дважды. Здесь оценки хоть и разнятся, совпадая по логарифмической шкале, однако ни в какой из систем не наблюдается экспоненциального ускорения по отношению к другим.

Длина линейного и древовидного вывода в ОР.

Теорема 3. *Для достаточно больших n и последовательности формул* $p \supset p^{2^n}$

$$t\text{л}^{\text{OP}}(2^n) = \theta(1);\quad t\text{д}^{\text{OP}}(2^n) = \theta(1);\ l\text{л}^{\text{OP}}(2^n) = \theta(2^{2^n});\ l\text{д}^{\text{OP}}(2^n) = \theta(2^{2^n}).$$

Доказательство очевидно в силу того, что формула $p \supset p^{2^n}$ содержит лишь одну переменную, а значит, только по ней и производится единственное расщепление.

Замечание. Анализ всех результатов указывает на важность именно *l*-сложности и линейности выводов.

[1]Российско-Армянский университет

[2]Ереванский государственный университет

e-mails: apinlev00@gmail.com, achubaryan@ysu.am

Л. А. Апинян, А. А. Чубарян

Сравнение длин линейных и древовидных выводов некоторых семейств формул в ряде систем исчисления высказываний

Для некоторых семейств формул исследованы длины как линейных, так и древовидных выводов в ряде систем исчисления высказываний: в разновидностях секвенциальных систем (с кванторами, с правилом подстановки, с правилом сечения, без правила сечения, монотонных), а также в системе обобщенных расщеплений. Сравнение полученных результатов с ранее полученными оценками для шагов тех же разновидностей выводов тех же формул и в тех же системах указывает на определенную значимость именно длины вывода как основной сложностной характеристики выводов.

Լ. Ա. Ափինյան, Ա. Ա. Չուբարյան

Ասույթային հաշվի մի շարք համակարգերում բանաձևերի որոշ ընտանիքների գծային և ծառատիպ արտածումների երկարությունների համեմատություն

Բանաձևերի որոշ ընտանիքների համար ուսումնասիրված են գծային և ծառատիպ արտածումների երկարությունները ասույթային հաշվի մի քանի համակարգերում՝ սեկվենցիալ համակարգերի տարատեսակներում (ծավալիչներով, տեղադրման կանոնով, հատույթի կանոնով, առանց հատույթի կանոնի, մոնոտոն), ինչպես նաև ընհանրացված տրոհումների համակարգում: Աշխատանքում ստացված

արդյունքների համեմատությունը նախկինում ստացված նույն բանաձևերի նշված համակարգերում արտածումների քայլերի համար ստացված արդյունքների հետ փաստում է արտածումների երկարության՝ որպես բարդության բնութագրիչի արժևորումը:

L. A. Apinyan, A. A. Chubaryan

Linear and Tree-Like Proofs Sizes Comparison for Any Formulae Families in Some Systems of Propositional Calculus

The sizes of linear and tree-like proofs for any formulae families are investigated in some systems of propositional calculus: in different sequent systems (with quantifier rules, with substitution rule, with cut rule, without cut rule, monotone) and in the generalization splitting system. The comparison of obtained here results with the bounds, wich are obtained for the steps of proofs for the same formulas in the mentioned systems former, shows the importance of the size of proof as complexities characteristic.

Литература

1. *Cook S. A., Reckhow A. R.* – Symbolic Logic. 1979. V. 44. P. 36-50.
2. *Carbone A.* – Studia Logica. 2000. V. 64. P. 315-321.
3. *Тамазян Акоп А., Чубарян Анаит А.* – Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники. 2020. Т. 54. Р. 138-146.
4. *Чубарян Ан. А., Чубарян Арм. А.* – Отечественная наука в эпоху изменений: постулаты прошлого и теории нового времени, НАУ, часть 10, 2(7). 2015. С.11-14.
5. *Цейтин Г., Чубарян Ан.* – ДАН Арм. ССР. 1972. Т. 55. №1. С. 10-12.