

Э.А. СИМОНЯН

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ В МОДЕЛИ КОЛЛЕКТИВНОГО ПОЛЬЗОВАНИЯ

Рассмотрен широкий подкласс класса консервативных дисциплин модели $M_r | G_r | 1 | \infty$, где внутри промежутков сплошного обслуживания вызовов k -го типа, $k = \overline{1, r}$, используется разделение времени процессора в алгоритме коллективного пользования. В стационарном режиме для средних времен пребывания вызовов при условии того, что данный вызов уже получил x единиц времени на обслуживание, сформулирован и доказан закон сохранения.

Ключевые слова: консервативный, дисциплина, модель, обслуживание, вызов.

1. **Алгоритм коллективного пользования. Модель $M_r | G_r | 1 | \infty$.** В одноканальную систему обслуживания с ожиданием поступают независимые пуассоновские потоки 1-вызовов, 2-вызовов, ..., r -вызовов с параметрами $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, ..., $a_r > 0$ соответственно. Длительности обслуживания вызовов независимы, не зависят от процесса поступления и для k -вызовов, $k = \overline{1, r}$, имеют функцию распределения (ФР) $B_k(x)$, $B_k(+0) = 0$.

Вводится понятие k -промежутка, $k = \overline{1, r}$, в течение которого обслуживаются только k -вызовы. Именно поступающий в свободную модель k -вызов, $k = \overline{1, r}$, инициирует начало k -промежутка, который завершается первым моментом освобождения модели от k -вызовов. После завершения, скажем, j -промежутка, $j = \overline{1, r}$, по заранее заданному правилу на прибор выбирается вызов определенного потока. Если это k -вызов, $k = \overline{1, r}$, $k \neq j$, то начинается k -промежуток, который завершается первым моментом освобождения модели от k -вызовов.

Внутри k -промежутка, $k = \overline{1, r}$, действует алгоритм коллективного пользования. Именно для k -вызовов, $k = \overline{1, r}$, имеется система очередей и распределительный алгоритм, который определяет способ выбора на прибор следующего k -вызова и интервал времени (квант), предоставляемый ему для обслуживания. Если за квант вызов завершает обслуживание, то покидает модель. В противном случае, он возвращается в систему очередей и ожидает предоставления ему очередного кванта и т.д.

Предполагается, что описанный выше широкий класс алгоритмов (дисциплин обслуживания) является консервативным. Дисциплина обслуживания

консервативна, если работа (время обслуживания) не создается и не исчезает внутри модели, а лишь привносится в модель извне поступлением вызовов [1].

В теории информационно-вычислительных систем часто величину кванта при анализе моделей устремляют к нулю и говорят о разделении времени процессора в моделях коллективного пользования [1-3]. Таким образом, при разделении времени процессора внутри k -промежутка, $k = \overline{1, r}$, в любой момент времени одновременно обслуживаются все присутствующие в данный момент в системе очереди k -вызовы.

В настоящей работе изучается модель $M_r | G_r | 1 | \infty$ коллективного пользования с разделением времени процессора (прибора).

2. Закон сохранения. В модели $M_r | G_r | 1 | \infty$ коллективного пользования с разделением времени основной качественной характеристикой k -вызовов, $k = \overline{1, r}$, служит среднее время $T_k(x)$, $x \geq 0$, пребывания в модели k -вызова, которому для полного обслуживания требуется x единиц времени. Интерес представляет также величина

$$W_k(x) = T_k(x) - x, \quad k = \overline{1, r}, \quad x \geq 0, \quad (1)$$

называемая растраченным временем (временем ожидания) k -вызова.

Введем обозначения

$$\rho_k = a_k \beta_{k1}, \quad k = \overline{1, r}, \quad R = \rho_1 + \dots + \rho_r, \quad W_0 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r a_k \beta_{k2},$$

где

$$\beta_{ki} = \int_0^{\infty} x^i dB_k(x), \quad k = \overline{1, r}, \quad i = 1, 2.$$

Выше речь шла о стационарных средних $T_k(x)$ и $W_k(x)$, $k = \overline{1, r}$, $x \geq 0$, в определенном подклассе класса консервативных дисциплин, существование которых, как известно [1], обеспечивается условиями

$$R < 1 \quad \text{и} \quad W_0 < +\infty. \quad (2)$$

Величины R и W_0 интерпретируются следующим образом. Величина R есть среднее суммарное время обслуживания (всех) вызовов, поступающих в модель за единицу времени. Ее называют загрузкой модели. Величина W_0 есть среднее остаточное время обслуживания. Именно, если на приборе в рассматриваемый момент находится вызов, то W_0 есть время до завершения его обслуживания в предположении, что прерывания обслуживания не допускаются. В противном случае (если прибор свободен), $W_0 = 0$ [1].

Ниже сформулирован закон сохранения в модели $M_r | G_r | 1 | \infty$ коллективного пользования с разделением времени для $T_k(x)$, $k = \overline{1, r}$, $x \geq 0$. Из-за

простой связи (1) закон сохранения легко записывается и в терминах $W_k(x)$, $k = \overline{1, r}$, $x \geq 0$. Предполагаем выполненными условия (2).

Теорема. Имеет место следующий закон сохранения:

$$\sum_{k=1}^r a_k \cdot \int_0^{\infty} T_k(x) \cdot (1 - B_k(x)) dx = \frac{W_0}{1 - R}. \quad (3)$$

Отметим, что выражение в правой части (3) представляет собой стационарное среднее Mw , где w - стационарная величина накопленной и незавершенной работы в классе консервативных дисциплин модели $M_r | G_r | 1 | \infty$.

$$Mw = \frac{W_0}{1 - R} \quad [1]. \quad (4)$$

Здесь M - знак математического ожидания.

Доказательство теоремы дано в приложении.

ПРИЛОЖЕНИЕ. Введем обозначения:

$n_k(x)$, $k = \overline{1, r}$, $x \geq 0$, - плотность распределения числа k -вызовов, еще находящихся в модели, которые до рассматриваемого момента времени (внутри k -промежутка) получили x единиц времени обслуживания;

$\eta_k(x)$, $k = \overline{1, r}$, $x \geq 0$, - остаточное время обслуживания k -вызова, уже получившего x единиц времени обслуживания при условии недопущения его прерывания.

Величина Mw , определяемая формулой (4), может быть определена также по формуле полного математического ожидания

$$Mw = \sum_{k=1}^r \int_0^{\infty} M(\eta_k(x)) n_k(x) dx. \quad (5)$$

При $k = \overline{1, r}$ и $x \geq 0$ нетрудно видеть, что

$$M(\eta_k(x)) = \int_x^{\infty} (t - x) \frac{dB_k(t)}{1 - B_k(x)}. \quad (6)$$

Действительно, отношение $\frac{dB_k(t)}{1 - B_k(x)}$ при $t > x$ и $k = \overline{1, r}$ есть условная

вероятность того, что для полного обслуживания k -вызова требуется время, принадлежащее промежутку $[t, t + dt)$, при условии, что этот k -вызов уже получил x единиц времени обслуживания. Тогда в правой части (6) записано математическое ожидание этой условной ФР (по t).

Аналогично выводу формулы (4.11) из [1], с. 193, при $k = \overline{1, r}$ и $x \geq 0$ устанавливается следующая формула:

$$n_k(x) = a_k (1 - B_k(x)) \frac{dT_k(x)}{dx}. \quad (7)$$

Подставляя (6) и (7) в (5), получаем

$$\begin{aligned}
Mw &= \sum_{k=1}^r a_k \cdot \int_0^{\infty} (1 - B_k(x)) \frac{dT_k(x)}{dx} \left\{ \int_x^{\infty} (t-x) \frac{dB_k(t)}{1 - B_k(x)} \right\} dx = \\
&= \sum_{k=1}^r a_k \cdot \int_0^{\infty} dT_k(x) \cdot \int_x^{\infty} (t-x) dB_k(t).
\end{aligned} \tag{8}$$

Поскольку очевидно, что растраченное время $W_k(x)$ при каждом $k = \overline{1, r}$ с ростом x не убывает, то у $W_k(x)$ почти всюду по x существует производная $W_k^{(1)}(x) = \frac{dW_k(x)}{dx}$. Используя (1), (4) и (8), находим

$$\begin{aligned}
\frac{W_0}{1-R} &= \sum_{k=1}^r a_k \cdot \int_0^{\infty} (W_k^{(1)}(x) + 1) \left\{ \int_x^{\infty} (t-x) dB_k(t) \right\} dx = \\
&= \sum_{k=1}^r a_k \cdot \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^t (W_k^{(1)}(x) + 1)(t-x) dx \right\} dB_k(t),
\end{aligned} \tag{9}$$

где изменен порядок интегрирования.

Взяв внутренний интеграл правой части (9) по частям, при $k = \overline{1, r}$ и $t \geq 0$ имеем

$$\int_0^t (W_k^{(1)}(x) + 1)(t-x) dx = \int_0^t (W_k(x) + x) dx = \int_0^t T_k(x) dx.$$

Подстановка полученного выражения в правую часть (9) дает

$$\begin{aligned}
\frac{W_0}{1-R} &= \sum_{k=1}^r a_k \cdot \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^t T_k(x) dx \right\} dB_k(t) = \sum_{k=1}^r a_k \cdot \int_0^{\infty} T_k(x) dx \cdot \int_0^{\infty} dB_k(t) = \\
&= \sum_{k=1}^r a_k \cdot \int_0^{\infty} (1 - B_k(x)) T_k(x) dx,
\end{aligned}$$

что доказывает (3). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Клейнрок Л.** Вычислительные системы с очередями. - М.: Мир, 1979. – 600 с.
2. **Берген Ж., Риту М., Ружие Ж.** Работа ЭВМ с разделением времени. - М.: Наука, 1970. – 260 с.
3. **Уилкс М.** Системы с разделением времени. - М.: Мир, 1972. – 123 с.

ЕГУ. Материал поступил в редакцию 25.05.2002.

**Է.Ա. ՄԻՄՈՆՅԱՆ
ՊԱՀՊԱՆՄԱՆ ՕՐԵՆՔԸ ՄԻԱՄՆԱԿԱՆ
ՕԳՏԱԳՈՐԾՄԱՆ ՄՈԴԵԼՈՒՄ**

Դիտարկվում է $M_r | G_r | 1 | \infty$ մոդելի պահպանողական հերթակարգերի մի լայն դաս, որտեղ k -տիպի պահանջների՝ $k = \overline{1, r}$, առանձին վերցված անընդմեջ սպասարկման միջակայքերում օգտագործվում է սպասարկման պրոցեսորի ժամանակի բաժանման միասնական օգտագործման ալգորիթ: Մոդելի ստացիոնար $T_k(x)$, $k = \overline{1, r}$, $x \geq 0$ վիճակում k -տիպի պահանջի՝ մոդելում գտնվելու միջին պայմանական ժամանակի համար (այն պայմանի դեպքում, երբ նշված պահանջը ստացել է սպասարկման x միավոր ժամանակ), ձևակերպված և ապացուցված է պահպանման օրենք:

**E.A. SIMONYAN
CONSERVATION LAW IN THE
COLLECTIVE USE MODEL**

A wide subclass of conservative class disciplines is viewed for the model $M_r | G_r | 1 | \infty$ where inside intervals a time-sharing processor in collective use algorithm is applied. The conservative law is formulated and proved for mean time call arrival in stationary conditions provided the given call has already obtained X unit time for service.