

К.А. СОГОМОНЯН, К.А. ТУМАНЯН, ДЖ.Н. ДАЛЛАКЯН

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ПРОЕКЦИЙ
ПОВЕРХНОСТЕЙ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Предложен метод геометрического моделирования объектов с использованием возможностей и свойств четырехмерного пространства как расширенной среды проектирования. Разработан алгоритм осуществления этого метода в среде AutoCAD, для чего предложена программа (KPOV), написанная на графическом языке AutoLISP.

Ключевые слова: четырехмерное пространство, поверхность трехмерного пространства, гиперповерхность.

Переход от традиционных средств проектирования к компьютерным системам автоматизированного проектирования (САПР) открывает широкие возможности для использования методов геометрического моделирования, порождающих новые технологии. В настоящее время в САПР используют в основном два метода представления геометрической модели проектируемого объекта: 1) в виде плоского изображения, являющегося проекцией объекта трехмерного пространства (метод, ориентированный на чертеж); 2) в виде трехмерной модели, которая наглядно воспроизводит геометрические свойства трехмерного объекта (метод, ориентированный на объект).

Нами предлагается новый метод геометрического моделирования, в основе которого лежат следующие положения:

- предполагается, что основной объект расположен в четырехмерном пространстве (R^4);
- проектируемым является объект трехмерного пространства (R^3), модель которого представляет собой проекцию основного объекта на R^3 или на плоскость (R^2).

Основным преимуществом предлагаемого метода является расширение среды проектирования (R^4), которое позволяет, используя возможности и геометрические свойства R^4 , создать более простые, рациональные и универсальные способы конструирования геометрических объектов, в частности, поверхностей. Например, универсальным способом образования поверхностей в R^4 является пересечение двух гиперповерхностей, что в R^3 , естественно, невозможно реализовать.

Опишем геометрические закономерности одного из вариантов этого способа.

Пусть в R^4 имеем прямые T_1 , T_2 и плоскость R^2 , в которой заданы две линии g_1 , g_2 (рис. 1). Множество плоскостей, проходящих через прямую T_1 и пересекающих R^2 в точках линии g_1 (в R^4 две плоскости имеют одну общую точку [1]), образуют гиперповерхность, которую обозначим $(T_1 g_1)$. Таким же способом образуется гиперповерхность $(T_2 g_2)$.

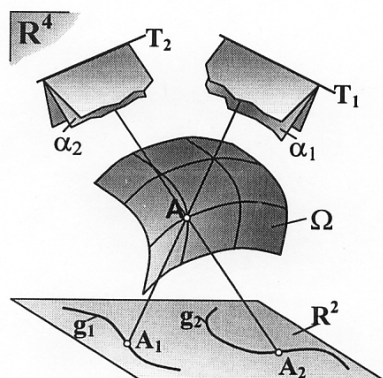


Рис.1

В результате пересечения этих двух гиперповерхностей образуется поверхность Ω . Каждая точка (A) этой поверхности получается пересечением двух плоскостей (α_1, α_2), принадлежащих вышеуказанным гиперповерхностям.

Теперь предположим, что в R^2 построена бинарная модель пространства R^4 посредством проецирования плоскостями, проходящими через прямые T_1 и T_2 . Очевидно, что в этой модели проекциями рассматриваемой поверхности Ω будут две линии g_1 и g_2 . Произвольная пара точек (A_1, A_2), где $A_1 \in g_1, A_2 \in g_2$, моделирует одну из точек

(A) поверхности Ω , а множество всевозможных пар таких точек (декартово произведение) – множество всех ее точек.

Итак, любой паре линий (g_1, g_2) плоскости R^2 можно сопоставить определенную поверхность (Ω) в пространстве R^4 . Проекцию этой поверхности в трехмерном пространстве (R^3) можно построить посредством перехода от плоской бинарной модели пространства R^4 к ее трехмерной аксонометрической модели.

Этот переход легче всего осуществляется методом сопоставления координат. Поэтому сначала рассмотрим координатный метод построения моделей (плоской и трехмерной) пространства R^4 .

Для получения бинарной плоской модели (комплексного чертежа) пространства R^4 необходимо построить ортогональные проекции точек этого пространства на две координатные плоскости, не имеющие общую ось координат. В качестве плоскостей проекций выбираем координатные плоскости **хоу** и **тоз** (рис. 2 а).

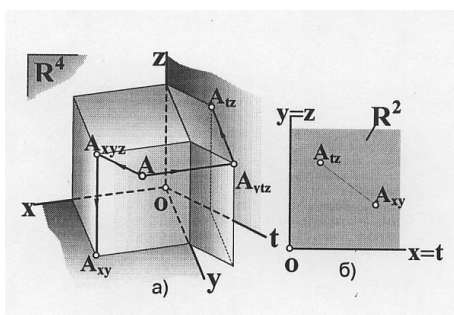


Рис. 2.

Проекцию A_{xy} точки $A \in R^4$ можно построить с помощью двух проецирований: сначала точку A проецируем на гиперплоскость **xyz** по направлению оси **t**, затем

полученную точку A_{xyz} проецируем на плоскость xy по направлению оси z . Точно таким же способом строится вторая проекция A_{tz} . Совмещая выбранные координатные плоскости (вместе с построенными проекциями) с плоскостью R^2 , получаем плоскую модель пространства R^4 (рис. 2 б).

Каждая произвольная пара точек (A_{xy}, A_{tz}) этой плоскости моделирует определенную точку (A) пространства R^4 .

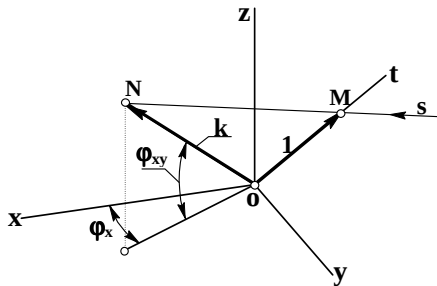


Рис.3

Трехмерную аксонометрическую модель пространства R^4 можно построить путем параллельного проецирования этого пространства на ее координатную гиперплоскость xyz (трехмерное пространство) по некоторому направлению s , непараллельную оси t (рис. 3). При этом аксонометрическая модель будет вполне определена, если задана проекция ON единичного вектора OM

координатной оси t . Эту проекцию более удобно задавать следующими тремя параметрами:

- 1) k – ее длина, которая фактически представляет собой коэффициент искажения t координат в пространстве модели;
- 2) φ_x – угол горизонтальной проекции (на $хоу$) вектора ON с осью x (в радианах);
- 3) φ_{xy} – угол наклона вектора ON относительно плоскости $хоу$ (в радианах).

С помощью этих параметров аксонометрические координаты вектора OA определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} X_{ON} &= k \cos \varphi_{xy} \cos \varphi_x, \\ Y_{ON} &= k \cos \varphi_{xy} \sin \varphi_x, \\ Z_{ON} &= k \sin \varphi_{xy}. \end{aligned} \quad (1)$$

Итак, трехмерная аксонометрическая модель четырехмерного пространства R^4 определяется тремя параметрами $(k, \varphi_x, \varphi_{xy})$, которые зависят от направления (s) проецирования. Произвольное задание этих параметров равносильно произвольному выбору направления проецирования.

Пусть известны параметры $k, \varphi_x, \varphi_{xy}$, тогда очевидно, что для любой точки $A(x, y, z, t) \in R^4$ можно построить единственную трехмерную модель $A_1(x_1, y_1, z_1)$, используя следующие зависимости между их координатами (формулы перехода):

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x + (k \cos \varphi_{xy} \cos \varphi_x) t, \\
 y_1 &= y + (k \cos \varphi_{xy} \sin \varphi_x) t, \\
 z_1 &= z + (k \sin \varphi_{xy}) t.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

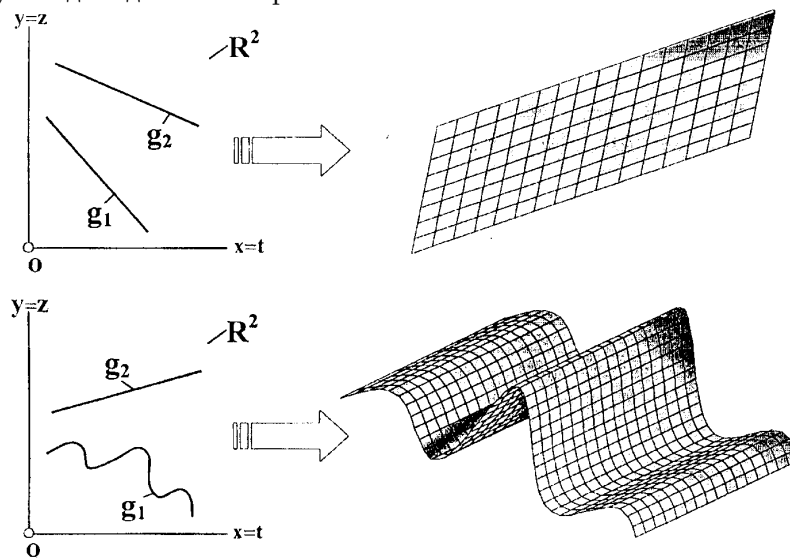
Используя вышеописанные модели, разработан алгоритм моделирования поверхностей трехмерного пространства, представляющих про-екции поверхностей Ω , расположенных в четырехмерном пространстве. Сущность этого алгоритма заключается в следующем.

Поверхность посредством двух линий (g_1 , g_2) задается в плоской бинарной модели, где определяются четыре координаты каждой “точки”. Затем, используя формулы перехода (2), строится ее трехмерная модель.

Алгоритм реализован в среде **AutoCAD**. Программа, разработанная средствами графического языка **AutoLISP**, приведена в конце статьи.

Если программа введена в **AutoCAD**, то ее можно запускать из командной строки вводом имени функции (команды) (**KPOV**). После запуска команды (**Command: (KPOV) ↵**) достаточно выбрать (указать) заранее построенные линии g_1 , g_2 (их необходимо построить в рабочей плоскости **xy** текущей системы координат), задать количество точек на каждой линии и численные значения трех параметров: k , φ_{xy} (**ang1**), φ_x (**ang2**). Тогда система **AutoCAD** построит трехмерную модель искомой поверхности в виде многоугольной сети, плотность которой зависит от количества точек, задаваемых на линиях g_1 и g_2 .

Основные геометрические свойства трехмерной модели поверхности зависят от видов и взаимного расположения двух линий g_1 и g_2 , определяющих плоскую бинарную модель данной поверхности.



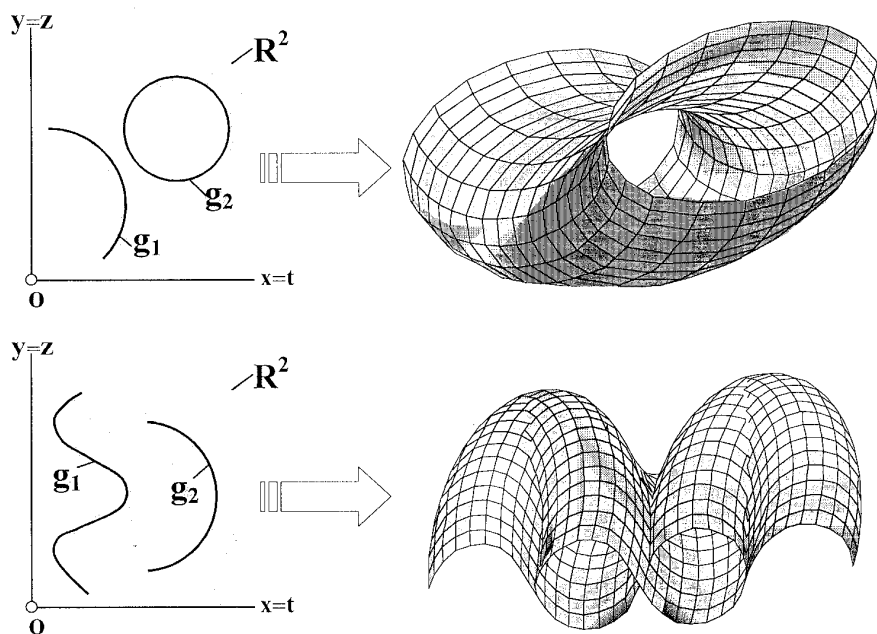


Рис. 4

На рис. 4 приведены некоторые примеры, которые выясняют принципиальную зависимость геометрической формы полученной поверхности от форм двух ее плоских проекций (g_1, g_2).

Нетрудно заметить, что каждая из этих линий определяет форму линий одной из серий сетчатого каркаса воспроизведенной поверхности. Например, если обе линии – прямые, то получаем плоскость, каркас которой состоит только из прямых линий.

ПРОГРАММА (КРОВ). Моделирование поверхностей

```
(defun kpov ()
  (setq g1 (car (entsel "\n Select object1:"))
        i1 (getint "\n enter i1:")
        g2 (car (entsel "\n Select object2:"))
        i2 (getint "\n enter i2:")
        k (getreal "\n enter k:")
        ang1 (getreal "\n enter ang1:")
        ang2 (getreal "\n enter ang2:"))
  (setq j1 0)
  (setq lst1 nil)
  (command "divide" g1 i1)
  (setq ss1 (ssget "p"))
  (repeat (- i1 1)
    (setq lst1 (cons (cdr (assoc 10 (entget (ssname ss1 j1)))) lst1)
          j1 (+ j1 1)))
  (setq j2 0)
  (setq lst2 nil)
```

```

(command "divide" g2 i2)
(setq ss2 (ssget "p"))
(repeat (- i2 1)
  (setq lst2 (cons (cdr (assoc 10 (entget (ssname ss2 j2)))) lst2)
    j2 (+ j2 1)))
(Command "erase" ss1 " " ) (command "erase" ss2 " " )
(setq n 0)
(command "3dmesh" (- i1 1) (- i2 1))
(repeat (- i1 1)
  (setq m 0)
  (repeat (- i2 1)
    (setq fx (+ (nth 0 (nth n lst1)) (* (* k (* (cos ang1) (cos ang2))) (nth 0 (nth m lst2)))))
      fy (+ (nth 1 (nth n lst1)) (* (* k (* (cos ang1) (sin ang2))) (nth 0 (nth m lst2)))))
      fz (+ (nth 1 (nth m lst2)) (* (* k (sin ang1)) (nth 0 (nth m lst2)))))
    (command (list fx fy fz))
    (setq m (+ m 1)))
  (setq n (+ n 1)))

```

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Согомонян К. А.** Линейно-конструктивные методы формообразования (геометрическое моделирование). – Ереван: Айастан, 1990. – 214 с.
2. **Хейфец А. Л.** Инженерная компьютерная графика. AutoCAD. Опыт преподавания и широта взгляда. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2002. – 432 с.
3. **Полежаук Х. Х.** Visual LISP и секреты адаптации AutoCAD. – СПб.: БХВ-Петербург, 2001. – 576 с.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 15.09.2002.

Կ.Հ. ՍՈՂՈՄՈՆՅԱՆ, Կ.Ա. ԹՈՒՄԱՆՅԱՆ, Ջ.Ն. ԴԱԼԼԱՅԱՆ

**ՔԱՌԱՉԱՓ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐԻ ԵՌԱՉԱՓ
ՊՐՈՅԵԿՑԻԱՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ԱԼԳՈՐԻԹՄԸ**

Առաջարկվում է օբյեկտների երկրաչափական մոդելավորման մեթոդ, որը թույլ է տալիս քառաչափ տարածության հնարավորություններն ու հատկություններն օգտագործել որպես նախագծման ընդլայնված միջավայր: Մշակված է AutoCAD միջավայրում այս մեթոդի իրականացման ալգորիթմը, որի համար առաջարկվում է գրաֆիկական AutoLISP լեզվով գրված (KPOV) ծրագիր:

K. H. SOGHOMONYAN, K.A. TUMANYAN, G. N. DALLAQYAN

**THREE-DIMENSIONAL PROJECTION CONSTRUCTION ALGORITHM ON
FOUR-DIMENSIONAL SPACE SURFACES**

A method of geometrical object modelling using the possibilities and characteristics of four-dimensional space as a widened projection medium is suggested. A realization algorithm of this method in AutoCAD is developed and a program written in AutoLISP graphical language is proposed.