

А.Г. СААКЯН

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПРИНЯТИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Рассматривается многокритериальная задача принятия оптимальных решений (МДЗПОР). Разнообразные данные в коммерции, экономике, социологии и технике поступают в виде многомерных образов, в которых наблюдения зависят от времени [1, 2]. Моделирование ситуаций, описываемых в виде многомерных динамических образов, обуславливает необходимость решения задач многокритериальной динамической оптимизации. С одной стороны, применение методов моделирования, основанных на использовании моделей задач многокритериальной оптимизации, позволяет описать состояние объекта в зависимости от времени, с другой - обуславливает необходимость решения проблем, связанных с доказательством существования оптимальных решений задачи многокритериальной динамической оптимизации, чему и посвящена данная работа.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, аппроксимация, кусочно-параболическая стратегия.

1. Определения и обозначения

1.1. Определение МДЗПОР.

Пусть заданы:

система уравнений движения

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad (1)$$

система ограничений

$$G_l(x(t)) \leq b_l, \quad l = 1, 2, \dots, r, \quad (2)$$

заданных в сегменте $[t_0, T]$,

система критериев

$$\min_{u(t)} d((x_\xi(t))_{\xi=1, \dots, k}, (M_\xi)_{\xi=1, \dots, k}) = \min_{u(t)} \sqrt{\sum_{\xi=1}^k (x_\xi(t) - M_\xi)^2} \quad (3)$$

для любого $t \in [t_0, T]$.

Краевые условия:

$$x(t_0) = x_0, \quad (4)$$

где $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t))$ - вектор состояния системы;

$u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$ - вектор управления системы, $t \in [t_0, T]$.

1.2. Определения и обозначения из теории сплайнов

Пусть $C^k[t_0, T]$ – множество непрерывных на $[t_0, T]$ функций, имеющих непрерывные производные k -го порядка, $k \geq 0$, $x(t), u(t) \in C[t_0, T]$ и заданы множества узлов:

$$\begin{aligned}\Delta_n &= t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T, \quad n \geq 2, \\ \Delta'_n &= t_0 < \bar{t}_1 < \bar{t}_2 < \dots < \bar{t}_n < \bar{t}_{n+1} = T.\end{aligned}\quad (5)$$

Пусть P_2 – множество полиномов второй степени.

Определение. Функция $a(g, t)$ называется интерполяционным параболическим сплайном для функции $g(t)$, если

- а) $a(g, t) \in P_2, t \in (\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}), i = 0, 1, \dots, n$; б) $a(g, t) \in C^2[t_0, T]$;
в) $a(g_i, t_i) = g(t_i), i = 0, 1, \dots, n$.

Сплайн $a(g, t)$ называется $(T-t_0)$ – периодическим, если он удовлетворяет следующим условиям:

$$\text{г) } a^{(k)}(g, t_0) = a^{(k)}(g, T), \quad k = 1, 2. \quad (6)$$

В общем случае [3] наиболее применительными являются следующие краевые условия:

$$\text{д) } a'(g, t_0) = a_n, a'(g, T) = b_n; \quad (7)$$

$$\text{е) } a''(g, t_0) = A_n, a''(g, T) = B_n; \quad (8)$$

$$\text{ж) } a''(g, z - t_0) = a''(g, z - a), \quad z = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

где a_n, b_n, A_n, B_n являются заданными числами.

Положим,

$$m_i = a'(g, t_i), \quad M_i = a''(g, t_i), \quad h_i = t_{i+1} - t_i,$$

$$\bar{h}_i = t_{i+1} - \bar{t}_{i+1}, \quad \bar{t}_i = \frac{t_{i+1} - t_i}{2}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (10)$$

Пусть $0 < \bar{h}_i < h_i, i = 0, 1, \dots, n-1, n > 2$. Тогда интерполяционные параболические сплайны для функций $x_i(t), i = 1, \dots, k, u_j(t), j = 1, \dots, m$, удовлетворяющие одному из краевых условий (6)-(9), в силу теоремы 1 ([3], с.35) существуют и определяются следующим единственным образом.

Положим $m_{i\xi} = S'_{2\xi}(t_i), M_{i\xi} = S''_{2\xi}(t_i), m_{i\eta}^{(2)} = V'_{2\eta}(t_i), M_{i\eta}^{(2)} = V''_{2\eta}(t_i),$
 $i = 0, 1, \dots, n, \eta = 1, 2, \dots, m, \xi = 1, 2, \dots, K$. Тогда для $t \in [t_i, t_{i+1}], i = 1, 2, \dots, n-1$ сплайны для функций $x_\xi(t)$ и $u_\eta(t), \xi = 1, 2, \dots, K, \eta = 1, 2, \dots, m$ допускают следующие представления:

$$S_{2\xi}(t) = x_\xi(t_i) + m_{i\xi}^{(1)}(t - t_i) + c_{i\xi}^{(1)}(t - t_i)^2 + d_{i\xi}^{(1)}(t - \bar{t}_{i+1})_+^2,$$

$$V_{2\eta}(t) = u_\eta(t_i) + m_{i\eta}^{(2)}(t - t_i) + c_{i\eta}^{(2)}(t - t_i)^2 + d_{i\eta}^{(2)}(t - \bar{t}_{i+1})_+^2$$

соответственно, где $(t - \bar{t})_+^m = [\max(0, t - \bar{t})]^m$.

2. Формулировка основных понятий

Всюду далее будем использовать понятия и обозначения:

а) из [3]: определение интерполяционного сплайна, модуль непрерывности функции, условия Липшица, краевые условия;

б) из [4]: допустимые управления лица, принимающего решение (ЛПР), допустимые стратегии ЛПР, стратегия ЛПР, кусочно-программная стратегия ЛПР.

Если в определении кусочно-программной стратегии ЛПР допустимое управление $u(t)$ - параболическая функция, то стратегия называется кусочно-параболической.

3. Решение задачи

Решение задачи (1)-(4) будет основано на применении алгоритма случайного поиска [5-7] и сплайн-параболической аппроксимации оптимальной кусочно-программной стратегии [3-7].

Пусть в точке t_{i+1} имеем $u_{\eta}(t_{i+1}) = u_{\eta}(t_i) + \Delta u_{\eta}(t_{i+1})$,

где $\Delta u_{\eta}(t_{i+1})$ - приращение управления $u_{\eta}(t)$, $\eta = 1, 2, \dots, m$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Положим,

$$x_{\xi}(t_{i+1}) = x_{\xi}(t_i) + f_{\xi}(x(t_i), u(t_{i+1}))\Delta t_{i+1}, \quad (11)$$

где $\xi = 1, 2, \dots, k$, $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Известно [5-6], что если производится L выборок случайных точек, то вероятность попадания хотя бы одной точки в заданную Δ - окрестность оптимума равна $P_{\Delta}(L) = 1 - (1 - \Delta^n)^L$. Отсюда $L \approx \frac{\ln(1 - P_{\Delta}(L))}{\ln(1 - \Delta^n)}$.

Определим условие A : $d(x(t_{i+1}), M) < d(x(t_i), M)$. Тогда общий шаг можно сформулировать следующим образом. Определяем

$$\Delta u_{\eta}(t_{i+1}) = \begin{cases} \alpha \beta_{\eta}, \eta = 1, \dots, m, & \text{если выполнены условия (2) и } A, \\ -\Delta u_{\eta}(t_i) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$i = 0, 1, \dots, n-1$.

Если выполнены условия (2) и A , то положим

$$x_{\xi}(t_{i+1}) = x_{\xi}(t_i) + f_{\xi}(x(t_{i+1}), u(t_{i+1}), t)\Delta t_{i+1}.$$

Если $d(x(t_{i+1}), M) < d(x(t_i), M)$, то переходим к следующей точке t_{i+2} . В противном случае полагаем $\Delta u_{\eta}(t_{i+1}) = -\Delta u_{\eta}(t_i)$, $\eta = 1, \dots, m$ и повторяем этот шаг.

Для практических целей количество шагов s для каждого интервала разбиения $[t_i, t_{i+1})$ берется равным размерности k вектора:

$$x(t) = (x_{\xi}(t_{i+1}))_{\xi=1,\dots,k} \quad [5,6].$$

Пусть нами получены точки $(x_{\xi}(t_{i+1}))_{\xi=1,\dots,k}$ и $(u_{\eta}(t_i))_{\eta=1,\dots,m}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Тогда из допущения 1 следует существование кусочно-параболических сплайн-аппроксимаций траекторий и управлений.

Пример.

Рассмотрим задачу [8] в следующей постановке:

а) система уравнений движения задана в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= u(t); \end{aligned} \quad (12)$$

б) система ограничений

$$3 - |x_1(t)| \geq 0, |u(t)| \leq 1; \quad (13)$$

в) начальные условия

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = 0; \quad (14)$$

г) время $t \in [0, T]$.

Пусть на плоскости заданы точки $(M_1, M_2) = (2, 1)$. Под оптимальной траекторией будем понимать траекторию $\{x(t) = (x_1(t), x_2(t)), t \in [0, T]\}$, удовлетворяющую системе ограничений (13), являющуюся решением (12) и удовлетворяющую требованию

$$\min_{u(t)} \sqrt{\sum_{i=1}^2 (x_i(t) - M_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (x_i(t) - M_i)^2}. \quad (15)$$

Решение задачи (12) - (15)

Разобьем отрезок $[0, T]$ на n частей

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_{n-1} = T,$$

$$\text{где } t_i = \frac{i \times T}{n-1}, i = 0, 1, \dots, n-1, \quad \Delta t_i = t_{i+1} - t_i = \frac{T}{n}, i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Положим $u(0) = \Delta u(0) = 0$. Пусть α - шаг. В качестве случайных чисел рассмотрим сгенерированную в соответствии с алгоритмом [9] последовательность: $\beta_1 = 0,137; \beta_2 = 0,27; \beta_3 = 0,8; \beta_4 = 0,29; \beta_5 = 0,4; \beta_6 = 0,6; \beta_7 = 0,48, \dots$

Решим следующую задачу.

Задача. Определить величину шага α и количество точек разбиения n , достаточные для решения задачи (12)-(15).

Определим условие А: $d(x(t_{i+1}), M) < d(x(t_i), M)$.

Определим общий шаг:

$$\Delta u(t_i) = \begin{cases} \alpha \beta_i, & \text{если выполнено условие А,} \\ -\Delta u(t_{i-1}) & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (16)$$

При выполнении условия А положим

$$u(t_i) = u(t_{i-1}) + \Delta u(t_i) = \sum_{j=1}^i \Delta u(t_j) \leq 1, j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Отсюда

$$x_2(t_i) = \left(\sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^k \Delta u(t_j) \right) \Delta t, \quad (17)$$

$$x_1(t_i) = \left[\sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^k \Delta u(t_j) + \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=1}^k \Delta u(t_j) \right] (\Delta t)^2 \leq 3.$$

Из (13), (16) следует

$$u(t_i) = \alpha \sum_{j=1}^i \beta_j \leq 1, i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (18)$$

$$x_2(t_i) = \frac{T}{n} \times \alpha \sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^k \beta_j. \quad (19)$$

Отсюда и из (17) следует:

$$x_1(t_i) = \left(\frac{T}{n} \right)^2 \alpha \left[\sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^k \beta_j + \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=1}^k \beta_j \right] \leq 3. \quad (20)$$

Из (18) следует

$$x_1(t_i) = \left(\frac{T}{n} \right)^2 \left[\sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^k \alpha \beta_j + \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=1}^k \alpha \beta_j \right] \leq \left(\frac{T}{n} \right)^2 [i + i - 1] \leq (2i - 1) \left(\frac{T}{n} \right)^2.$$

Таким образом, для выполнения условия (13) достаточно, чтобы имело

$$\text{место } (2i - 1) \left(\frac{T}{n} \right)^2 \leq 3 \text{ или } i \leq \frac{1}{2} \left(3 \left(\frac{n}{T} \right)^2 + 1 \right).$$

Шаг α должен удовлетворять условию

$$\alpha \leq \min \left\{ \frac{1}{\sum_{j=1}^i \beta_j}, 3 \left(\frac{n}{T} \right)^2 \left/ \left[\sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^k \beta_j + \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=1}^k \beta_j \right] \right. \right\}.$$

Отсюда, если $\frac{n}{T} = 1$, то $i = 2$; если $\frac{n}{T} = 2$, то $i = 6$; если $\frac{n}{T} = 3$, то $i = 14$.

Пример, если $\frac{n}{T} = 1$, то $i = 2$. Отсюда

$$\alpha \leq \min \left\{ \frac{1}{\beta_1 + \beta_2}, 3 / (2\beta_1 + \beta_2) \right\} = \min \{2,46; 5,51\} = 2,46.$$

Следовательно,

$$u(t_1) = \alpha \beta_1 = 0,34; u(t_2) = \alpha(\beta_1 + \beta_2) = 1; x_2(t_1) = 2,46 \times 0,137 = 0,34;$$

$$x_1(t_1) = 2,46 \times 0,137 + 1 = 1,34; x_2(t_2) = 2,46(2\beta_1 + \beta_2) = 1,34;$$

$$x_1(t_2) = 2,46(3\beta_1 + \beta_2) = 1,68.$$

$$\text{Тогда } d(x(t_1), M) = \sqrt{(2 - 1,34)^2 + (1 - 0,34)^2} = 0,93;$$

$$d(x(t_2), M) = \sqrt{(2 - 1,68)^2 + (1 - 1,34)^2} = \sqrt{0,1 + 0,12} = 0,32.$$

Отсюда $d(x(t_2), M) \leq d(x(t_1), M)$.

Решение:

$$u(t_0) = 0, \quad u(t_1) = 0,34, \quad u(t_2) = 1;$$

$$x_1(t_0) = 1, \quad x_1(t_1) = 1,34, \quad x_1(t_2) = 1,68;$$

$$x_2(t_0) = 0, \quad x_2(t_1) = 0,34, \quad x_2(t_2) = 1,34.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Fair R.C.** The effect of economics events on votes for president // The Review of Economics and Statistics. May 1978.-V. LX, № 2.- P. 159-173.
 2. **Fracisco A., Meltzer A.** The effect of Aggregate Economic Variables in Congressional Elections//The American Political Science Review 69 (Dec. 1975 a).-P-1232-1239.
 3. **Стечкин С.Б., Субботин Ю.Г.** Сплаины в вычислительной математике.- М.:Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1976.-284 с.
 4. **Петросян Л.А., Данилов Н.Н.** Кооперативные дифференциальные игры и их приложения. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985.-276 с.
 5. **Растринин Л.А.** Статические методы поиска.-М.: Наука, 1968.-376 с.6. Растринин Л.А. Случайный поиск в задачах оптимизации многопараметрических систем. – Рига: Знание, 1965.-190 с.
 6. Թերզյան Հ.Ս. Ավտոմատացված նախագծման համակարգերի տեսություն: Երևան, Լուս-Անջելո, Արենք, 1995.- 433 էջ:
 7. **Саликвдзе М.Е.** Задачи векторной оптимизации в теории управления.-Тбилиси: Мецниереба, 1975.- 201 с.
 8. **Голенко Д.И.** Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на вычислительных машинах.-М.: Физматгиз, 1965.- 227с
- ГИУА. Материал поступил в редакцию 05.05.2002.

Հ.Գ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ՕՊՏԻՄԱԼ ՈՐՈՇՈՒՄՆԵՐԻ ԸՆԴՈՒՆՄԱՆ ԲԱԶՄԱԿՐԻՏԵՐԻԱԼ ԴԻՆԱՄԻԿ ԽՆԴԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԻ ՄԵԹՈԴԻ ՄԱՍԻՆ

Աշխատանքը նվիրված է օպտիմալ որոշումների ընդունման բազմակրիտերիալ դինամիկ խնդրի լուծման մեթոդի մշակմանը: Սահմանվում են քառակուսային կտոր առ կտոր ծրագրային ստրատեգիաները և մշակվում այդ ստրատեգիաների կառուցման ալգորիթները:

H.G. SAHAKYAN

ON THE METHOD OF DYNAMIC MULTIPLE CRITERIA OPTIMAL DECISION MAKING PROBLEM SOLUTION

The method of the solution of Dynamic multiple criteria optimal decision making problem is considered. The concept of the piecewise quadratic programmable strategies is defined and algorithms of those strategies are developed.