ISSN 0002-306X. Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2002. Т. LV, № 3.

УДК 621-52+511.92

АВТОМАТИЗАЦИЯ И
СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

С.О. СИМОНЯН, А.Г. АВЕТИСЯН

РЕШЕНИЕ ПОЛНОЙ ПРОБЛЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ МАТРИЦ

Предложен регулярный численный метод решения полной проблемы собственных значений неавтономных матриц.

Ключевые слова: полная проблема собственных значений, дифференциальные преобразования.

Введение. Проблема определения собственных значений неавтономных матриц достаточно часто встречается при решении различных важных научно-практических задач, в частности, при исследовании устойчивости систем управления, расщеплении динамических систем, изучении переходных процессов и пр. Однако эта, кажущаяся с первого взгляда, обыкновенная задача в действительности оказывается достаточно сложной, содержащей множество затруднений вычислительного характера, связанных с различными инвариантами рассматриваемой матрицы. Известные численные методы [1], предназначенные для решения полной проблемы собственных значений автономных матриц, очевидно, непригодны для решения рассматриваемой задачи. Это, во-первых, связано с функциональностью неавтономных матриц и, во-вторых, с отсутствием регулярного подхода к решению проблемы ветвления собственных значений при использовании метода замороженных коэффициентов [2] для некоторого конечного множества автономных матриц, порожденных исходной матрицей при соответствующем множестве изолированных значений временного параметра.

Для решения рассматриваемой проблемы в настоящей работе предлагаются две вычислительные схемы, обусловленные неявным и явным представлениями определителя неавтономных матриц, основанные на дифференциально-тейлоровских (ДТ) преобразованиях [3]:

$$\mathbf{X(K)} = \frac{\mathbf{H^K}}{\mathbf{K!}} \frac{\partial^{\mathbf{K}} \mathbf{x(t)}}{\partial \mathbf{t^K}}\Big|_{\mathbf{t}=\mathbf{t}_\upsilon}, \quad \mathbf{K} = \overline{\mathbf{0},\infty} \;\; \risingdotseq \;\; \mathbf{x(t)} = \sum_{\mathbf{K=0}}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{t} - \mathbf{t}_\upsilon}{\mathbf{H}} \right)^{\mathbf{K}} \mathbf{X(K)}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{X(K)}$ - изображение (дискрета) оригинала; $\mathbf{x(t)}$ - функция целочисленного аргумента $\mathbf{K} = \overline{\mathbf{0},\infty}$; $\mathbf{H}$ - некоторая постоянная (масштабный коэффициент); $\mathbf{t}_\upsilon$ - центр аппроксимации.

При $\mathbf{t}_\upsilon\mathbf{=0}$ ДТ-преобразования (1) вырождаются в дифференциально-маклореновские (ДМ) преобразования :

$$\mathbf{X(K)=\frac{H^K}{K!}\frac{\partial^K x(t)}{\partial t^K}}_{|t=0}\mathbf{,\quad K=\overline{0,\infty}}\ \Xi\ \mathbf{x(t)=\sum_{K=0}^{\infty}\left(\frac{t}{H}\right)^K X(K)}. \qquad (2)$$

Математический аппарат. Допустим, что задана неавтономная матрица

$$\mathbf{A(t)=(a_{ij}(t)),\quad i,j=\overline{1,n},} \qquad (3)$$

элементы которой обладают бесконечной гладкостью в некоторой точке ***t= t(***.

<u>Неявная схема</u>. Характеристическое уравнение матрицы в неявном виде записывается так:

$$\mathbf{P(\lambda(t))=det\left[A(t)-\lambda(t)\cdot E\right]=det(D(t))=0,} \qquad (4)$$

где **((t)** - собственные значения этой матрицы, а **E** - единичная матрица порядка **n**.

В соответствии с полученным в [4] соотношением для нахождения определителя неавтономной матрицы для (4) будем иметь

$$\mathbf{det(D(t))=\sum_{K=0}^{\infty}det(K)\left(\frac{t-t_\upsilon}{H}\right)^k}\ \Xi$$

$$\Xi\ \mathbf{det(K)=\sum_{\substack{\sum K_i=K\\ K_i\subset\overline{0,K},i=\overline{1,n}}}^{M_{K,n}} det\left[d_1\left(\lambda(K_1)\right),...,d_n\left(\lambda(K_n)\right)\right]=0,\quad K=\overline{0,\infty}.} \qquad (5)$$

Раскрытие соотношения (5) при различных **K** приводит к выражениям:

а) $\mathbf{det(0)=P(\lambda(0))=P(\lambda(t_\upsilon))=0}$, если **K=0**; (6)

б) $\mathbf{det(K)=U(\lambda(0))\cdot\ \lambda(K)+V(\lambda(0),\lambda(1),...,\lambda(K\text{-}1),H,H^2,...,H^k)=0}$, если $\mathbf{K=\overline{1,\infty}}$, (7)

где **U(-)** и **V(-)** - некоторые соотношения, причем

$$\mathbf{U(\lambda(0))=\frac{d(det(D(t))}{d\lambda(0)}}_{|t=t_v}\mathbf{=\frac{d(det(0))}{d\lambda(0)}=\frac{dP(\lambda(0))}{d\lambda(0)}=\frac{dP(\lambda(t_v))}{d\lambda(0)}}. \qquad (8)$$

Таким образом, каким-то способом определив из (6) начальные дискреты $\mathbf{\lambda_1(0),\lambda_2(0),...,\lambda_n(0)}$, в соответствии с (7) рекуррентно и однозначно можно определить дискреты $\mathbf{\lambda_1(K),\lambda_2(K),...,\lambda_n(K)}$, $\forall\mathbf{K=\overline{1,\infty}}$, тем самым одновременно разрешив и проблему ветвления.

Далее оригиналы-собственные значения матрицы **A(t)** восстанавливаются в соответствии с разложениями

$$\mathbf{\lambda_i(t)=\sum_{K=0}^{\infty}\lambda_i(K)\left(\frac{t-t_\upsilon}{H}\right)^k,\qquad \forall i=\overline{1,n}}. \qquad (9)$$

<u>Явная схема.</u> Характеристическое уравнение матрицы **A(t)** в явном виде записывается так:

$\mathbf{P(\lambda(t))=\lambda^n(t)+p_1(t)\,\lambda^{n-1}(t)+p_2(t)\,\lambda^{n-2}(t)+...+p_{n-1}(t)\,\lambda(t)+p_n(t)=0,}$ (10)

где $\mathbf{p_i(t),\ \ i=\overline{1,n}}$ - некоторые переменные коэффициенты.

Перевод (10) из области оригиналов в область изображений приводит к:

а) соотношению (6), если **K=0**;

б) $\mathbf{\frac{H^k}{K!}\frac{\partial^k P(\lambda(t))}{\partial t^k}\Big|_{t=t_\upsilon} = 0,}$ если $\mathbf{K = \overline{1,\infty}}$, (11)

откуда также рекуррентно и однозначно определяются дискреты $\boldsymbol{\lambda_1(K),\lambda_2(K),\ldots,\lambda_n(K)}$, $\forall\mathbf{K = \overline{1,\infty}}$, используя при этом начальные дискреты $\boldsymbol{\lambda_1(0),\lambda_2(0),\ldots,\lambda_n(0)}$.

Заметим, что соотношения (11) полностью совпадают с соотношениями (7).

Примеры.

Пример 1 (матрица с отличными друг от друга собственными значениями при действительных начальных дискретах). Рассмотрим матрицу

$$\mathbf{A(t)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1+t} & \mathbf{1-t} \\ \mathbf{-t} & \mathbf{t^2} \end{bmatrix},$$

для которой $\mathbf{detD(t)=\boldsymbol{\lambda}^2(t)-(1+t+t^{-2})\boldsymbol{\lambda}(t)+t(1+t^2)=0.}$ Очевидно, $\boldsymbol{\lambda_1(t)=1+t^2}$, $\boldsymbol{\lambda_2(t)=t}$ и, следовательно, $\boldsymbol{\lambda_1(0)=1\neq\lambda_2(0)=0}$.

Неявная схема. При ДМ-преобразованиях имеем

$$\mathbf{A(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{A(1)=H}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{A(2)} = \frac{\mathbf{H^2}}{\mathbf{2}}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ \mathbf{A(K)} = \frac{\mathbf{H^k}}{\mathbf{K!}}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \forall\mathbf{K\geq 3}$$

$$\mathbf{D(0)} = \left[\begin{array}{c:c} 1-\lambda(0) & 1 \\ 0 & -\lambda(0) \end{array}\right] = [\mathbf{d_1(0)} \,\vdots\, \mathbf{d_2(0)}],\ \mathbf{D(1)} = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{H}-\lambda(1) & -\mathbf{H} \\ -\mathbf{H} & -\lambda(1) \end{array}\right] = [\mathbf{d_1(1)} \,\vdots\, \mathbf{d_2(1)}];$$

$$\mathbf{D(2)} = \left[\begin{array}{c:c} -\lambda(2) & 0 \\ 0 & \mathbf{H^2}-\lambda(2) \end{array}\right] = [\mathbf{d_1(2)} \,\vdots\, \mathbf{d_2(2)}],\ \mathbf{D(K)} = \left[\begin{array}{c:c} -\lambda(K) & 0 \\ 0 & -\lambda(K) \end{array}\right] = [\mathbf{d_1(K)} \,\vdots\, \mathbf{d_2(K)}],\ \forall\mathbf{K\geq 3};$$

$$\mathbf{det\,(0)=detD(0)=(1-\boldsymbol{\lambda}(0))\cdot\boldsymbol{\lambda}(0)=0,}$$

откуда $\boldsymbol{\lambda_1(0)=1}$, $\boldsymbol{\lambda_2(0)=0}$;

$$\mathbf{det(1)=det[d_1(0)\,\vdots\,d_2(1)]+det[d_1(1)\,\vdots\,d_2(0)]=}$$
$$\mathbf{=(2\cdot\lambda(0)-1)\cdot\lambda(1)-\lambda(1)\cdot H+H=0,}$$

откуда $\boldsymbol{\lambda_1(1)=0}$, $\boldsymbol{\lambda_2(1)=H}$;

$$\mathbf{det(2)=det[d_1(0)\,\vdots\,d_2(2)]+det[d_1(1)\,\vdots\,d_2(1)]+det[d_1(2)\,\vdots\,d_2(0)]=}$$
$$\mathbf{=(2\lambda(0)-1)\lambda(2)-\lambda(0)H^2-\lambda(1)H+\lambda^2(1)=0,}$$

откуда $\boldsymbol{\lambda_1(2)=H^2}$, $\boldsymbol{\lambda_2(2)=0}$;

$$\mathbf{det(3)=det[d_1(0)\,\vdots\,d_2(3)]+det[d_1(1)\,\vdots\,d_2(2)]+det[d_1(2)\,\vdots\,d_2(1)]+det[d_1(3)\,\vdots\,d_2(0)]=}$$
$$\mathbf{=(2\lambda(0)-1)\lambda(3)+2\lambda(1)\lambda(2)-\lambda(2)H-\lambda(1)H^2+H^3=0,}$$

откуда $\boldsymbol{\lambda_1(3)=0}$, $\boldsymbol{\lambda_2(3)=0}$.

Нетрудно убедиться также, что $\boldsymbol{\lambda_1(K)=\lambda_2(K)=0;\ \forall K\geq 4}$. Следовательно, собственными значениями матрицы будут функции

$$\boldsymbol{\lambda_1(t)=1+0\cdot t+1\cdot t^2=1+t^2,\qquad \lambda_2(t)=0+1\cdot t+0\cdot t^2=t,}$$

что и должно быть.

Явная схема. Имеем:

$$\mathbf{det\,D(t)\big|_{t_\upsilon=0}=\lambda^2(0)-\lambda(0)=0,}$$

$$H\frac{dP(\lambda(t))}{dt}_{|t_\upsilon=0}=H\left[2\lambda(t)\frac{d\lambda(t)}{dt}-(1+2t)\lambda(t)-(1+t+t^2)\frac{d\lambda(t)}{dt}+\left(1+3t^2\right)\right]_{|t_\upsilon=0}=$$

$$=2\lambda(0)\lambda(1)-\lambda(0)H-\lambda(1)+H=0,$$

$$\frac{H^2}{2}\frac{d^2\left(P(\lambda(t))\right)}{dt^2}_{|t_\upsilon=0}=\frac{H^2}{2}\left[2\lambda(t)\frac{d^2\lambda(t)}{dt^2}+2\left(\frac{d\lambda(t)}{dt}\right)^2-2\lambda(t)-2(1+2t)\frac{d\lambda(t)}{dt}-\right.$$

$$\left.-(1+t+t^2)\frac{d^2\lambda(t)}{dt^2}+6t\right]_{|t_\upsilon=0}=$$

$$=2\lambda(0)\lambda(2)+\lambda^2(1)-\lambda(0)H^2-\lambda(1)H-\lambda(2)=0,$$

$$\frac{H^3}{6}\frac{d^3\left(P(\lambda(t))\right)}{dt^3}_{|t_\upsilon=0}=\frac{H^3}{6}\left[6\frac{d\lambda(t)}{dt}\frac{d^2\lambda(t)}{dt^2}+2\lambda(t)\frac{d^3\lambda(t)}{dt^3}-6\frac{d\lambda(t)}{dt}-\right.$$

$$\left.-3(1+2t)\frac{d^2\lambda(t)}{dt^2}-(1+t+t^2)\frac{d^3\lambda(t)}{dt^3}+6\right]_{|t_\upsilon=0}=$$

$$=2\lambda(1)\lambda(2)+2\lambda(0)\lambda(3)-\lambda(1)H^2-\lambda(2)H-\lambda(3)+H^3=0$$

и т.д. Очевидно полное совпадение приведенных здесь соотношений с выражениями, полученными при неявной схеме.

Пример 2 (матрица с отличными друг от друга собственными значениями при комплексно-сопряженных начальных дискретах).

Рассмотрим матрицу

$$A(t)=\begin{bmatrix}1+t & 1-t\\ -1 & t\end{bmatrix},$$

для которой

$$\det(D(t))=\lambda^2(t)-(1+2t)\lambda(t)+(1+t^2)=0,$$

$$\lambda_{1,2}(t)=\frac{(1+2t)\pm\sqrt{4t-3}}{2},\qquad \lambda_{1,2}(0)=\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\det(0)=\det\left(D(t)\right)_{|t_\upsilon=0}=\lambda^2(0)-\lambda(0)+1=0,$$

откуда $\lambda_1(0)=\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \lambda_2(0)=\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2};$

$$\det(1)=H\frac{d\left(\det(D(t))\right)}{dt}_{|t_\upsilon=0}=2\lambda(0)\lambda\lambda1)-\lambda(1)-2\lambda(0)H=0,$$

откуда $\lambda_1(1)=\left(1-j\frac{\sqrt{3}}{3}\right)H,\qquad \lambda_2(0)=\left(1+j\frac{\sqrt{3}}{3}\right)H;$

$$\det(2)=\frac{H^2}{2}\frac{d^2\left(\det(D(t))\right)}{dt^2}_{|t_\upsilon=0}=2\lambda(0)\lambda\lambda2)-\lambda(2)-2\lambda(1)H+\lambda^2(1)+H^2=0,$$

откуда $\lambda_1(2)=-j\frac{\sqrt{3}}{9}H^2,\qquad \lambda_2(2)=j\frac{\sqrt{3}}{9}H^2;$

$$\det(3)=\frac{H^3}{6}\frac{d^3(\det(D(t)))}{dt^3}\Big|_{t_\nu=0}=2\lambda(0)\lambda(3)-\lambda(3)-2H\lambda\lambda 2)+2\lambda(1)\lambda(2)=0,$$

откуда $\lambda_1(3)=-j\frac{2\sqrt{3}}{27}H^3, \quad \lambda_2(3)=j\frac{2\sqrt{3}}{27}H^3$ и т.д.

Следовательно, комплексно-сопряженные собственные значения имеют вид

$$\lambda_{1,2}(t)=\left(\frac{1}{2}+t\right)\pm j\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}t-\frac{\sqrt{3}}{9}t^2-\frac{2\sqrt{3}}{27}t^3-...\right)$$

и состоят из действительной части с конечным числом слагаемых (два) и мнимой части - с бесконечным числом слагаемых.

Нетрудно показать, что при разложении в ряд Маклорена радикала $\sqrt{3-4t}$ имеем $\sqrt{3-4t}=\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}t-\frac{2\sqrt{3}}{9}t^2-\frac{4\sqrt{3}}{27}t^3-\cdots,$ при котором обеспечивается полное совпадение полученных здесь приближений $\lambda_{1,2}(t)$ с приведенными выше точными аналитическими решениями - собственными значениями.

Пример 3 (случай кратных собственных значений с различными, в общем случае, начальными дискретами). Пусть

$$A(t)=\begin{bmatrix}1-t & 0 & 0\\ t & 1-t & t^2\\ t^3 & 0 & 2+t^2\end{bmatrix},$$

для которой

$$\det(D(t))=[1-t-\lambda(t)]^2[2+t^2-\lambda(t)]=-\lambda^3(t)+(4-2t+t^2)\lambda^2(t)+$$

$$+(-5+6t-3t^2+2t^3)\lambda\lambda(t+(2-4t+3t^2-2t^3+t^4),$$

$$\lambda_1(t)=\lambda_2(t)=1-t, \lambda_3(t)=2+t^2.$$

Следовательно, при $t_\nu=0$ имеем $\lambda_1(0)=\lambda_2(0)=1, \lambda_3(0)=2.$ Далее

$$A(0)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}; \quad A(1)=H\begin{bmatrix}-1&0&0\\1&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}; \quad A(2)=\frac{H^2}{2}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&2\\0&0&2\end{bmatrix};$$

$$A(3)=\frac{H^3}{6}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\6&0&0\end{bmatrix}; \quad A(K)=\frac{H^K}{K!}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \forall K\geq 4;$$

$$\mathbf{D(0)} = \begin{bmatrix} 1-\lambda(0) & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda(0) & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda(0) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D(1)} = \begin{bmatrix} -H-\lambda(1) & 0 & 0 \\ H & -H-\lambda(1) & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda(1) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{D(2)} = \begin{bmatrix} -\lambda(2) & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda(2) & H^2 \\ 0 & 0 & H^2-\lambda(2) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D(3)} = \begin{bmatrix} -\lambda(3) & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda(3) & 0 \\ H^3 & 0 & -\lambda(3) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{D(K)} = \begin{bmatrix} -\lambda(K) & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda(K) & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda(K) \end{bmatrix}, \forall K \geq 4;$$

$$\det(0) = \det D(0) = (1-\lambda(0))^2 \cdot (2-\lambda(0)) = 0,$$

откуда $\lambda_1(0) = \lambda_2(0) = 1, \lambda_3(0) = 2;$

$$\det(1) = (1-\lambda(0))(-4H + 2\lambda(0)H - 5\lambda(1) + 3\lambda(0)\lambda(1)) = 0,$$

откуда $\lambda_1(1) = \lambda_2(1) = -H, \lambda_3(1) = 0;$

$$\det(2) = (1-\lambda(0))(H^2 - \lambda(0)H^2 - 5\lambda(2) + 3\lambda(0)\lambda(2)) +$$

$$+(-H-\lambda(1))(-2H + \lambda(0)H - 4\lambda(1) + 3\lambda(0)\lambda(1)) = 0,$$

откуда $\lambda_1(2) = \lambda_2(2) = 0, \lambda_3(2) = H^2;$

$$\det(3) = (1-\lambda(0))(3\cdot\lambda(0) - 5)\lambda(3) +$$

$$+2(-H^3 + \lambda(0)H^3 - \lambda(1)H^2 + 3\lambda(2)H + \lambda(0)\lambda(1)H^2 - 2\lambda(0)\lambda(2)H +$$

$$+4\lambda(1)\lambda(2) - 3\lambda(0)\lambda(1)\lambda(2)) = 0,$$

откуда $\lambda_1(3) = \lambda_2(3) = 0,\ \lambda_3(3) = 0$.

Легко убедиться, что $\lambda_i(K) = 0,\ \forall i = \overline{1,3},\quad \forall i \geq 4$.

Таким образом, действительно, собственными значениями матрицы будут функции

$$\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = 1-t,\quad \lambda_3(t) = 2+t^2.$$

Здесь отметим следующее важное обстоятельство: ни кратность собственных значений ($\rho_{\lambda(t)} = 2 < n = 3$) и ни кратность начальных дискрет собственных значений ($\rho_{\lambda(0)} = 3 = n = 3$) никак не повлияли на общий ход вычислительных процедур.

Пример 4 (случай кратных собственных значений с одинаковыми начальными дискретами). Пусть

$$\mathbf{A(t)} = \begin{bmatrix} 1-2t & 0 & 0 \\ t^3 & 1-2t & t \\ t^2 & 0 & 1+t^2 \end{bmatrix},$$

для которой

$$\det(D(t)) = [1-2t-\lambda(t)]^2[1+t^2-\lambda(t)] = -\lambda^3(t)+(3-4t+t^2)\lambda^2(t)+$$
$$+(-3+8t-6t^2+4t^3)\lambda(t)+(1-4t+5t^2-4t^3+4t^4)=0,$$
$$\lambda_1(t)=\lambda_2(t)=1-2t, \lambda_3(t)=1+t^2$$

и, очевидно,

$$\rho_{\lambda(t)} = 2 < n = 3,\ \rho_{\lambda(0)} = 3 = n = 3.$$

При этом для $t_v = 0$ имеем

$$\lambda_i(0) = 1, \forall i = \overline{1,3}; \lambda_i(1) = -\tfrac{4}{3}\cdot H, \forall i = \overline{1,3};$$
$$\lambda_i(2) = \tfrac{H^2}{3}, \forall i = \overline{1,3}; \lambda_i(K) = 0, \forall i = \overline{1,3}, \forall K \geq 3.$$

Следовательно,

$$\lambda_1(t)_{\text{пр.}} = \lambda_2(t)_{\text{пр.}} = \lambda_3(t)_{\text{пр.}} = 1 - \frac{4t}{3} + \frac{t^2}{3},$$

что, естественно, не является решением задачи. Оно, в лучшем случае, может служить некоторым приближением. К тому же, интересно заметить, что $\lambda_i(t)_{\text{пр.}}, \forall i = \overline{1,3},$ являются среднеарифметической величиной приведенных выше точных собственных значений, т.е.

$$\lambda_i(t)_{\text{пр.}} = \lambda(t)_{\text{ср.}} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(t), \forall i = \overline{1,3}.$$

Таким образом, при максимально неблагоприятных случаях, т.е. когда $\rho_{\lambda(0)} = \max = n$, изложенные подходы работают лишь в "усредненном" смысле и непригодны для получения точных решений. Однако, к счастью, оказывается, что это затруднение преодолевается легко - достаточно лишь сместить центр аппроксимации t_v в некую другую точку, при которой $\rho_{\lambda(0)} < \max = n$. В частности, для рассмотренного примера при $t_v = 1$ имеем

$$A(0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}; A(1) = H\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}; A(2) = \frac{H^2}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$
$$A(K) = \frac{H^K}{K!}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \forall K \geq 3;$$

$$\mathbf{D(0)} = \begin{bmatrix} -1-\lambda(0) & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda(0) & 0 \quad 1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda(0) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D(1)} = \begin{bmatrix} -2H-\lambda(1) & 0 & 0 \\ 3H & -2H-\lambda(1) & H \\ 2H & 0 & 2H-\lambda(1) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{D(2)} = \begin{bmatrix} -\lambda(2) & 0 & 0 \\ 3H^2 & -\lambda(2) & 0 \\ H^2 & 0 & H^2-\lambda(2) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D(K)} = \begin{bmatrix} -\lambda(K) & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda(K) & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda(K) \end{bmatrix}, \forall K \geq 3;$$

$$\mathbf{det(0) = det\, D(0) = (-1-\lambda(0))^2(2-\lambda(0)) = 0,}$$

откуда $\mathbf{\lambda_1(0) = \lambda_2(0) = -1, \lambda_3(0) = 2;}$

$$\mathbf{det(1) = (-1-\lambda(0))(-10H + 2\lambda(0)H - 3\lambda(1) + 3\lambda(0)\lambda(1)) = 0,}$$

откуда $\mathbf{\lambda_1(1) = \lambda_2(1) = -2H, \lambda_3(1) = 2H;}$

$$\mathbf{det(2) = (-1-\lambda(0))(-H^2 - \lambda(0)H^2 - 3\lambda(2) + 3\lambda(0)\lambda(2)) +}$$

$$\mathbf{+ (-2H - \lambda(1))(-8H - 2\lambda(0)H + 3\lambda(0)\lambda(1)) = 0,}$$

откуда $\mathbf{\lambda_1(2) = \lambda_2(2) = 0, \lambda_3(2) = H^2}$.

Можно убедиться, что $\mathbf{\lambda_i(K) = 0, \forall i = \overline{1,3}, \forall K \geq 3.}$ Таким образом, действительно,

$$\mathbf{\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = -1 - 2(t-1) + 0(t-1)^2 = 1 - 2t,}$$

$$\mathbf{\lambda_3(t) = 2 + 2(t-1) + 1(t-1)^2 = 1 + t^2,}$$

что и должно быть.

Очевидно, и здесь ни кратность собственных значений ($\mathbf{\rho_{\lambda(t)} = 2 < n = 3}$) и ни кратность начальных дискрет ($\mathbf{\rho_{\lambda(0)} = 2 < n = 3}$) никак не повлияли на общий ход вычислительных процедур, и в результате было получено точное решение задачи.

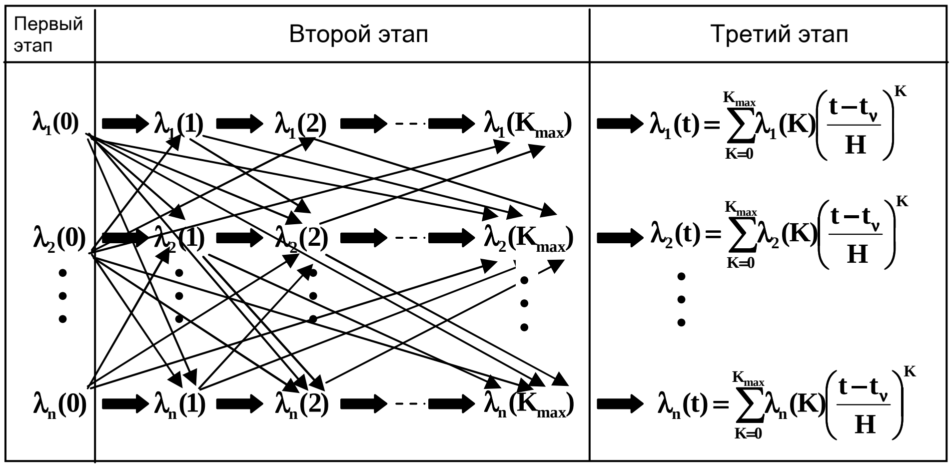
Вычислительная схема. Таким образом, для решения полной проблемы собственных значений неавтономных матриц необходимо реализовать следующие три этапа вычислительных операций в соответствии с нижеприведенной схемой:

Здесь $\mathbf{K_{max}}$ - некоторое, выбираемое из практических соображений (точность, объем вычислений и пр.), целое, обуславливающее степень аппроксимирующих многочленов - собственных значений матрицы $\mathbf{A(t)}$.

<u>Первый этап.</u> Решить полную проблему собственных значений автономных матриц, т.е. найти все собственные числа $\mathbf{\lambda_1(t_v) \equiv \lambda_1(0)}$, $\mathbf{\lambda_2(t_v) \equiv \lambda_2(0), \ldots, \lambda_n(t_v) \equiv \lambda_n(0)}$ матрицы $\mathbf{A(t)_{|t=t_v}}$ с использованием какого-либо известного численного метода.

<u>Второй этап.</u> Организовать регулярные рекуррентные процедуры в соответствии с неявной или явной схемами с целью определения последовательностей векторов дискрет $\mathbf{(\lambda_1(1), \lambda_2(1), ..., \lambda_n(1))}$, $\mathbf{(\lambda_1(2), \lambda_2(2), ..., \lambda_n(2)),\ ..., (\lambda_1(K_{max}), \lambda_2(K_{max}), ..., \lambda_n(K_{max}))}$.

<u>Третий этап.</u> Найти собственные значения матрицы $A(t)$ в соответствии с обратным переходом из области дифференциальных изображений в область оригиналов, при этом автоматически обходя сложную операцию по решению проблемы ветвления.



Резюме. Таким образом, обобщив полученные результаты, можно констатировать следующий важнейший факт - на основе использования дифференциальных преобразований решена полная проблема собственных значений неавтономных матриц, имеющая многочисленные приложения как в теории, так и в практике исследования различных динамических систем и пр.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.** Вычислительные методы высшей математики. - Минск: Вышэйшая школа, 1972. - Т. 1.- 584 с.
2. **Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.** Математическая теория конструирования систем управления. - М.: Высшая школа, 1998. –574 с.
3. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений. - Киев: Наукова думка, 1984. –420 с.
4. **Симонян С.О., Аветисян А.Г.** Вычисление определителей неавтономных матриц на основе ДТ-формализма // Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 1999. – Т. 52, №1. - С. 88-94.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 30.11.2001.

Ս.Հ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ, Ա.Գ. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

ՈՉ ԱՎՏՈՆՈՄ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ԼՐԻՎ ՀԻՄՆԱԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Առաջարկված է ոչ ավտոնոմ մատրիցների սեփական արժեքների լրիվ հիմնախնդրի լուծման կանոնավոր թվային մեթոդ:

S.H. SIMONYAN, A.G. AVETISSYAN

COMPLETE PROBLEM SOLVING OF ON-LINE EIGENVALUE MATRIX

Regular numerical method of complete problem solving for on-line eigenvalue matrix is proposed.