ISSN 0002-306X. Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2002. Т. LV, №2.

УДК 621. 52

АВТОМАТИЗАЦИЯ И
СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

М.Ю. САРКИСЯНЦ

АЛГОРИТМ РЕАЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ПРИ ЗАДАННОЙ НЕСОГЛАСОВАННОСТИ

Рассмотрен общий подход к построению приближенных линейных моделей. Представлен алгоритм их реализации на основе экспериментальных данных.

Ключевые слова: динамическая система, матрица, модель, несогла-сованность, алгоритм, пример.

Введение. В [1,2] представлены особенности алгоритмов построения линейных моделей многомерных динамических систем на основе теории, разработанной Я. Виллемсом [3]. В алгоритме исходными данными являются векторные временные ряды в виде системы уравнений с убывающей индексацией переменных. Уравнения определяют общую авторегрессивную модель с заданной максимально допустимой сложностью (порядком модели). На основе алгоритма решены модельные задачи.

В данной работе представлен алгоритм построения моделей многомерных динамических систем при заданном векторном временном ряде, но в отличие от [2] фиксируется максимально приемлемая несогласованность (неточность) между исходными данными и моделью. Необходимость задания максимально допустимой несогласованности возникает в связи с тем, что требуется построить приближенные модели, которые должны быть простыми, но в то же время с допустимой точностью. Неточность между исходными данными (векторным временным рядом) w и моделью M обозначается через $\varepsilon(w, M)$.

Авторегрессивные модели (AR) имеют следующий вид:

$$R_l\, w(t+l)+R_{l-1}\, w(t+l-1)+\ldots +R_0\, w(t)=0 \qquad (1)$$

или $R(\sigma)w=0$, где $w=(w_1,w_2,\ldots,w_q)$ - векторные временные ряды; σ- опе-ратор левого сдвига векторного временного ряда w, т.е. $\sigma w(t)=w(t+1)$, $\sigma^2 w(t)=w(t+2)$, $\sigma^t w(t)=w(t+l)$; $R(\sigma)$ - полиномиальная матрица; t - период времени (t=0,1,2,3,...).

Критерием неточности является

$$\varepsilon(w,M)=\min_{\tilde{w}_i\in M}\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\|w_i-\tilde{w}_i\right\|^2}\,. \qquad (2)$$

Эта мера показывает отклонение данных, воспроизводимых моделью M, от исходных w. В алгоритме использован аппарат сингулярного разложения [4]. Вводится матрица ковариации П(w):

$$\Pi(w) = \begin{pmatrix} ww & w\sigma w & \dots & w\sigma^t w \\ \sigma ww & \sigma w\sigma w & \dots & \sigma w\sigma^t w \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma^t ww & \sigma^t w\sigma w & \dots & \sigma^t w\sigma^t w \end{pmatrix}.$$

Берутся ограничения этой матрицы $\Pi_t(w)$, t=0,1,2,3,..., состоящие из всех блочных строк с номерами 0, 1, 2, ..., t и всех блочных столбцов с номерами 0, 1, 2,..., t матрицы $\Pi(w)$. Несогласованность $\varepsilon_t(w,M)$ между временным рядом w и моделью M выражается в виде

$\varepsilon_t(w,M)=(\sqrt{\sigma_{max}(\Pi_t(w))}, 0,\dots,0)$, где σ_{max} - максимальные сингулярные числа матриц $\Pi_t(w)$, t=0,1, 2,… .

Целью работы является разработка алгоритма построения линейных моделей многомерных динамических систем на основе исходных данных (заданных векторных временных рядов) и несогласо-ванности между исходными данными и моделью.

В статье применен общий детерминированный подход к построению приближенных математических моделей.

Формальная постановка задачи - разработка алгоритма реали-зации авторегрессивных линейных моделей при заданной несогласо-ванности.

Алгоритм вычисляет при заданной максимально допустимой несогласованности ($\varepsilon^{доп.}= \varepsilon_0^{доп},\dots, \varepsilon_t^{доп}$) и временном ряде $w=(w_1,w_2,\dots,w_q)$ приближенную модель, объясняющую исходные данные с точностью до максимально допустимой несогласованности. Алгоритм работает с любыми исходными данными w.

Алгоритм построения моделей. *Исходные данные:* $(w_1,w_2,\dots,w_q)$ и $\varepsilon^{доп}=(\varepsilon_0^{доп}, \varepsilon_t^{доп},\dots, \varepsilon_t^{доп})$, $\varepsilon_t^{доп}\geq 0$.

Шаг 1. Вычисление матрицы ковариации исходных данных порядка 0- $\Pi_0(w)$ и ее сингулярных значений $\sigma_1^0, \sigma_2^0, \sigma_{r0}^0 >0$, $r_0=q$.

Выбор числа k_0: если $\varepsilon_0^{доп} \geq\sigma_1^0$, то алгоритм завершен; в противном случае определяем число k_0 следующим образом: если $\varepsilon_0^{доп}>\sigma_{r0}^0$, то $k_0=r_0$, в противном случае число k_0 выбирается так, что $\sigma_{k0}^0>\varepsilon_0^{доп}\geq\sigma_{k0+1}^0$.

Шаг 2. Вычисление левых сингулярных векторов $u_{k0+1}, u_{k0+2},\dots, u_q \in \mathbf{R}^q$ матрицы $\Pi_0(w)$.

$n_0^0=q-k_0$, n_0^0- число (AR)- соотношений порядка 0.

$r_{0,j}^0=u_{k0+j}$, $r_{0,j}^0\in \mathbf{R}_0^{lxq}[s]$, $j\in n_0^0$.

Шаг 3. Вычисление матриц $\Pi_t(w)$, t=1,2,3,… и их сингулярных значений $\sigma_1^t, \sigma_2^t, \dots, \sigma_{rt}^t >0$, $r_t=q(t+1)-\Sigma(t+1-i)\, n_i^{t-1}$, i=0,..., t-1.

Значения чисел d_t выбираются следующим образом: если $\varepsilon_t^{доп} \geq\sigma_1^t$, то $d_t=1$; если $\varepsilon_t^{доп} <\sigma_{rt}^t$, то $d_t=r_t$; в противном случае d_t выбирается так, что $\sigma_{dt}^t >\varepsilon_t^{доп} \geq\sigma_{dt+1}^t$.

Шаг 4. Вычисление левых сингулярных векторов $u_{dt+1}, u_{dt+2},\dots, u_{dt+nt}$, соответствующих наименьшим сингулярным значениям матриц ковариации Π_t (w) [3].

$n_t=q(t+1)-d_t-p_t$; $n_i^t=n_i^{t-1}$, n_i^t - число (AR)- соотношений порядка t, i=0,1,…,t-1;
$r_{i,j}^t(s)=u_{dt+j}(s)\in \mathbf{R}_t^{lxq}[s]$, $j\in n_i^t$; $r_{i,j}^t$ – (AR)- соотношения порядка t, t=1,2,3,... .

В результате вычисления получаем множество полиномов: $r_{i,j}^t(s)$, i=1,2,..., $j\in n_i^t$ и приближенную модель с ограниченной несогласован-ностью $\varepsilon^{доп.}$. Алгоритм завершается на этапе t.

На основе алгоритма решены модельные задачи, реализованные с помощью пакета прикладных программ MatLAB. Алгоритм является универсальным, работает с любыми исходными данными и позволяет строить конкретные модели многомерных динамических систем.

Пример построения моделей. В качестве исходных данных приведены: $w_1(t)=S'(t)-0{,}996^{t-1}+(-0{,}995)^{t-1}$, S'(1)=1, S'(2)=-0,5, S'(3)=-0,7,...,

$w_2(t+2)=-0{,}81w_2(t)+0{,}5w_1(t)$, $w_2(1)=w_2(2)=0$ (t=1, 2,…,100).

Результаты представлены в следующей таблице, в которой сингулярные числа матриц ковариации обозначены через S0,...,S5, а левые сингулярные векторы – U0,...,U5.

Таблица

Значения сингулярных чисел и левых сингулярных векторов матриц ковариации

Сингулярные числа	Левые сингулярные векторы
Для $\Pi_0(w)$	
S0(1,1)=32,0778	U0(1) = -0,2618
S0(2,2)= 8,0501	U0(2)= 0,9651
Для $_1(w)$	
S1(1,1)=38,6865	U1(1)= 0,1091
S1(2,2)=34,3831	U1(2)= -0,71
S1(3,3)=10,08	U1(3)= 0,259
S1(4,4)= 5,62	U1(4)= -0,639
Для $_2(w)$	
S2(1,1)=57,7783	U2(1)= 0,3622
S2(2,2)=39,1346	U2(2)= -0,5867
S2(3,3)=27,9032	U2(3)= 0
S2(4,4)=11,3432	U2(4)= 0
S2(5,5)= 4,8693	U2(5)= 0
S2(6,6)= 0,0027	U2(6)=- 0,7243
Для $_3(w)$	
S3(1,1)=61,1949	U3(1)= -0,322
S3(2,2)=60,8438	U3(2)= 0,5216
S3(3,3)=34,1576	U3(3)= 0,1658
S3(4,4)=24,0129	U3(4)=-0,2686
S3(5,5)= 8,2352	U3(5)= 0
S3(6,6)= 6,4365	U3(6)= 0,6439
S3(7,7)= 0,0029	U3(7)= 0
S3(8,8)= 0,0001	U3(8)=-0,3317

Продолжение табл.

Для $_4$(w)	
S4(1,1)=79,4838	U4(1)=-0,2642
S4(2,2)=64,2836	U4(2)=0,4289
S4(3,3)=47,8540	U4(3)=0,1971
S4(4,4)=34,7280	U4(4)=-0,3183
S4(5,5)=11,2486	U4(5)=-0,0749
S4(6,6)= 8,1634	U4(6)=0,6508
S4(7,7)= 0,0030	U4(7)=-0,0006
S4(8,8)= 0,0001	U4(8)=-0,3930
S4(9,9)= 0,0001	U4(9)=-0,0006
S4(10,10)=0,0001	U4(10)=0,1498
Для $_5$(w)	
S5(1,1)=85,4032	U5(1)= 0,2081
S5(2,2)=76,0897	U5(2)=-0,3734
S5(3,3)=56,0415	U5(3)=-0,1651
S5(4,4)=55,6684	U5(4)= 0,2647
S5(5,5)=11,8984	U5(5)= 0,1761
S5(6,6)=11,5249	U5(6)=-0,7124
S5(7,7)=0,0038	U5(7)=0,0509
S5(8,8)=0,0002	U5(8)=0,2806
S5(9,9)=0,0002	U5(9)=0,0017
S5(10,10)=0,00014	U5(10)=-0,3105
S5(11,11)= 0,0001	U5(11)=-0,0209
S5(12,12)= 0,0001	U5(12)=-0,0570

Авторегрессивные модели имеют следующий вид:

$0{,}2618\ w_1=0{,}9651\ w_2$ (opt model 0)

$0{,}2593\ \sigma w_1+0{,}1091\ w_1=0{,}6382\sigma w_2+0{,}7161\ w_2$ (opt model 1)

$0{,}3622\ w_1=0{,}5867\ w_2+0{,}7243\ \sigma^2 w_2$ (opt model 2)

$-0{,}322\ w_1+0{,}1658\ \sigma w_1=0{,}3317\sigma^2 w_2 - 0{,}6439\ \sigma^2 w_2+0{,}2682\ \sigma w_2-$
$-0{,}5216\ w_2$ (opt model 3)

$-0{,}0006\sigma^4 w_1 - 0{,}0006\ \sigma^3 w_1 - 0{,}0749\ \sigma^2 w_1+0{,}1971\ \sigma w_1 - 0{,}2642\ w_1=$
$=0{,}1498\sigma^4 w_2+ 0{,}393\sigma^3 w_2 - 0{,}6508\sigma^2 w_2+0{,}3183\sigma w_2 -0{,}4289 w_2$
(opt model 4)

$-0{,}0209\sigma^5 w_1+0{,}0017\sigma^4 w_1+0{,}0509\sigma^3 w_1+0{,}1761\sigma^2 w_1 - 0{,}1651\sigma w_1+$
$+0{,}2081 w_1=0{,}057\sigma^5 w_2+0{,}3105\sigma^4 w_2 - 0{,}2806\sigma^3 w_2+ 0{,}7124\sigma^2 w_2 -$
$-0{,}2647\sigma w_2+0{,}3734\ w_2$ (opt model 5).

Исходя из сингулярных чисел матриц $П_2$, $П_3$, $П_4$, $П_5$, модель второго порядка подгоняет исходные данные с точностью выше, чем 0,27%, модель третьего порядка - с точностью выше, чем 0,29%, модель четвертого порядка - 0,3%, модель пятого порядка - 0,38%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Саркисянц М.Ю.** Особенности алгоритмов линейных моделей многомерных динамических систем. // Сб. мат-ов год. науч. конф. ГИУА.- 2000.- Т.2.- С. 340- 341.
2. **Саркисянц М.Ю.** Алгоритм построения линейных моделей многомерных динамических систем. // Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН.- 2002.- Т. 55, №1.- С. 117 - 120.
3. **Виллемс Я.К.** От временного ряда к линейной системе // Теория систем, математические методы и моделирование: Сб. ст.- М.: Мир, 1989.- 389 с.
4. **Карслян Э.В.** Современные методы теории автоматического управления. Частотные методы анализа и синтеза многосвязных САУ: Учебное пособие. ГИУА. - Ереван, 1991.- 121 с.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 03.04.2000.

Մ.ՅՈՒ. ՍԱՐԳՍՅԱՆՑ

ԳԾԱՅԻՆ ՄՈԴԵԼՆԵՐԻ ԻՐԱԿԱՆԱՑՄԱՆ ԱԼԳՈՐԻԹՄ ՏՐՎԱԾ ԱՆՀԱՄԱՁԱՅՆՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Դիտարկված է մոտավոր գծային մոդելների կառուցման ընդհանուր մոտեցումը։ Ներկայացված է դրանց իրականացման ալգորիթմը՝ փորձնական տվյալների հիման վրա։

M.Yu. SARKISSIANTS

LINEAR MODEL REALIZATION ALGORITHM IN GIVEN DISAGREEMENT

A general approach to construction of the approximate linear models is considered. The algorithm of their realization according to the experimental data is represented.