

Н. Л. КАЗАРЯН, В. В. ГЕВОРГЯН

КОНСТРУИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ОСНОВЕ НЕЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА ОПИ.КП

Описываются алгоритмы конструирования циклических поверхностей преобразованием плоскости инверсией относительно конической поверхности вращения (ОПИ.КП) [1]. Выведены основные характеристики и параметры управления формой конструируемых поверхностей. Разработан пакет прикладных программ, работающий в среде Windows 98 и реализующий алгоритм преобразования.

Ключевые слова: нелинейное кубическое преобразование, плоская инверсия, поверхности третьего порядка.

Одним из универсальных способов конструирования поверхностей является получение их как образов плоскостей или простых поверхностей в нелинейных преобразованиях пространства. Этот способ имеет три несомненных преимущества. Во-первых, есть возможность исследования свойств конструируемой поверхности в целом (за счет взаимно однозначного соответствия между точками поверхности и их прообразами). Линия семейства линий прообраза однозначно отображается в соответствующую линию семейства линий конструируемой поверхности. Таким образом, имея аппарат преобразования и зная свойства прообраза, можно установить основные свойства конструируемого образа.

Во-вторых, есть возможность упрощения вычисления коэффициентов уравнения конструируемой поверхности, заданной рядом условий, поскольку некоторые из них участвуют в задании аппарата преобразования (а оставшаяся часть - в задании прообраза).

В-третьих, есть возможность управления формой (поскольку свойства конструируемой поверхности обусловлены свойствами прообраза, аппарата преобразования и положения прообраза в аппарате преобразования, параметры которых доступны для управления).

Для конструирования циклических поверхностей предлагается нелинейное преобразование пространства на основе однопараметрических множеств плоских инверсий относительно конической поверхности - ОПИ.КП, а в качестве прообраза поверхности, задаваемой каркасом, - плоскость, несущая ∞^1 прямых.

Свойства преобразования ОПИ.КП (а также образов прямых изложены в [1]. Преобразование ОПИ.КП является кубическим, произвольная точка $A(x, y, z)$ 3D пространства преобразуется в точку $A(x', y', z')$, а аналитическое выражение преобразования получается в виде

$$x' = \frac{xz^2}{x^2 + y^2} \operatorname{tg}^2 \alpha; \quad y' = \frac{yz^2}{x^2 + y^2} \operatorname{tg}^2 \alpha; \quad z' = z, \quad (1)$$

где α – угол между осью J и образующей конической поверхности (КП), относительно которой производится преобразование.

Доказано также, что прямая, перпендикулярная, но не пересекающая, оси J , преобразуется в окружность, пересекающую ось J .

В общем случае в произвольной плоскости пучок прямых, перпендикулярных оси J КП, в преобразовании ОПИ.КП образует циклический каркас циклической поверхности третьего порядка, геометрическая форма и положение которой зависят от взаимного расположения прообраза и оси J КП.

Плоскости, подлежащие преобразованию, классифицируем следующим образом:

1. плоскость произвольно расположена относительно оси J ;
2. плоскость параллельна оси J ;
3. плоскость перпендикулярна оси J .

1. В плоскости O общего положения пучок параллельных прямых h_i перпендикулярных оси J , в ОПИ.КП образует циклический каркас поверхности Ω' . Элементы циклического каркаса – окружности h_i , пересекают ось J в точках O_i оси J . Прямая h_o , пересекающая ось J в точке O_i , преобразуется в совпадающую с ней прямую h_o' [1].

Таким образом, пучок прямых h_i плоскости Ω преобразуется в ∞^1 окружностей h_i' , образующих циклический каркас некоторой поверхности Ω' третьего порядка.

Действительно, пусть плоскость Ω определена уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (2)$$

Подставляя формулы преобразования (1) в (2), получим уравнение

$$z'^2 = - \frac{(x'^2 + y'^2)(z'C + D)}{\operatorname{tg}^2 \alpha (Ax' + By')}, \quad (3)$$

определяющее поверхность Ω' третьего порядка.

На рис.1, полученном с помощью разработанного пакета прикладных программ, изображены комплексные чертежи плоскости Ω (f, h) и каркаса образа Ω' , а также аксонометрическая модель каркаса поверхности Ω' .

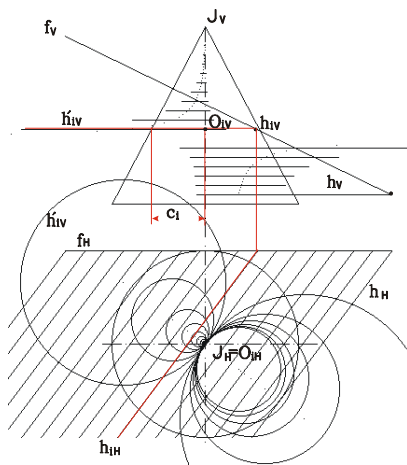
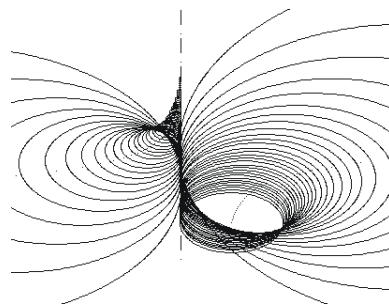


Рис. 1



В частном случае, если плоскость $\Omega(f, h)$, определяемая уравнением

$$Ax + By + Cz = 0, \quad (4)$$

пересекает ось J в вершине $O(0,0,0)$ конической поверхности преобразования, то образом Ω' является циклическая поверхность второго порядка (рис. 2), определяемая уравнением

$$z' = -\frac{C(x'^2 + y'^2)}{\operatorname{tg}^2 \alpha (Ax' + By')} . \quad (5)$$

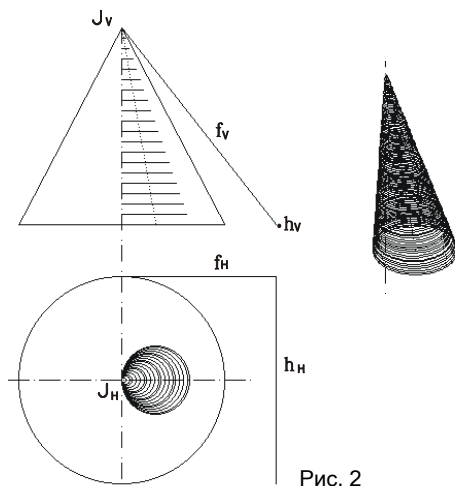


Рис. 2

2. Пусть плоскость Ω ,

параллельная оси J , определена уравнением

$$Ax + By + D = 0 . \quad (6)$$

Подставляя формулы преобразования (1) в (6), получим аналитическое выражение образа Ω' :

$$z'^2 = -\frac{D(x'^2 + y'^2)}{\operatorname{tg}^2 \alpha (Ax' + By')} , \quad (7)$$

которое представляет собой циклическую поверхность третьего порядка (рис. 3).

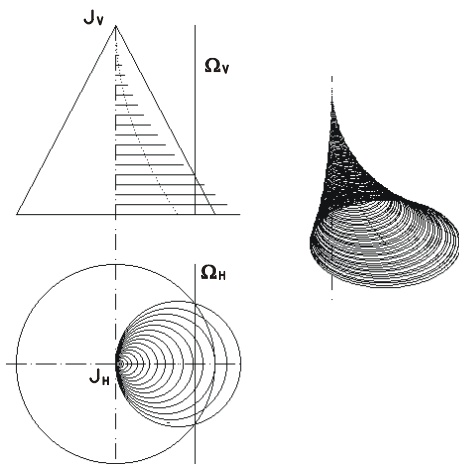


Рис. 3

из которых пересекает ось J в точке O_i , т.е. как пучок прямых с собственной точкой O_i ($O_i \in J$). Каждая прямая l_i этого множества преобразуется в себя l_i' , т.е. является неподвижной (но не точно неподвижной) [1]. Следовательно, плоскость Ω , определяемая уравнением

$$z = E, \quad (10)$$

преобразуется в плоскость Ω' , которая совпадает с прообразом Ω и определяется уравнением

$$z' = E. \quad (11)$$

На основе описанного выше метода ОПИ.КП разработан пакет прикладных программ, работающий в среде Windows 98 и реализующий автоматизированное преобразование плоскости. Результаты работы пакета использованы при получении чертежей, представленных в настоящей статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Казарян Н.Л., Геворкян В.В.** Однопараметрическое множество плоских инверсий относительно сечений конической поверхности вращения // Изв. НАН РА и ГИУА. Сер.ТН.-2002.-Т.55, № 1.-С.111-116.
2. **Казарян Н.Л.** Моделирование циклических поверхностей на основе нелинейного преобразования пространства ОПИ.ЦП // Ежеквартальный реферативный сборник.-2000. - № 1. - Деп. в АрмНИИТИ, № 13 - Ар00.
3. **Казарян Н.Л.** Нелинейное преобразование пространства ОПИ.ЦП применительно к моделированию геометрических форм // Информационные технологии и управление // ИА Армении - 1999. - № 2. - С. 102-113.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 12.04.2001.

Ն. Լ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Վ. Վ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

**ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐԻ ԿՈՆՍՏՐՈՒԿՏԱՎՈՐՈՒՄԸ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՈՉ
ԳԾԱՅԻՆ ՄՀԻ.ԿՄ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ՄԻՋՈՑՈՎ**

Նկարագրված են կոնական մակերևույթի նկատմամբ հարթ ինվերսիայի (ՄՀԻ. ԿՄ) միջոցով հարթությունից առաջացող երրորդ կարգի մակերևույթների ցիկլիկ կարկասների ստացման ալգորիթմերը: Ուսումնասիրված և ներկայացված են կոնստրուկտավորվող մակերևույթների հիմնական հատկանիշները, նրանց ձևը և դիրքը բնորոշող պարամետրերը: Մշակված են Windows 98 միջավայրում աշխատող, ձևափոխություններն իրականացող և կոնստրուկտավորվող մակերևույթների կարկասների գրաֆիկական մոդելները կառուցող կիրառական ծրագրերի փաթեթները:

N. L. GHAZARYAN, V. V. GEVORGYAN

**SURFACE CONSTRUCTION BASED ON NONLINEAR SPACE
TRANSFORMING OF OFI.CS**

Designing algorithms of cyclic surfaces by transforming the plane by inversion relative to conical rotation surface are described. Basic characteristics and control parameters by constructed surface form are maneuvered. An applied program package operating in Windows 98 and realizing algorithm of transformation are deduced.