

М.Г. СТАКЯН, А.Р. ДЕМИРХАНИЯН, А.А. СОГОМОНЯН

ПОСТАНОВКА ОПТИМАЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ НА УСТАЛОСТЬ

Сообщение 2. Номограмма для минимизации объема и продолжительности испытаний

В логарифмической системе координат выявлена прямолинейная корреляционная связь между основными статистиками вариационных рядов, искусственно генерированных из общей совокупности результатов испытаний, и объемами этих рядов. С целью обобщения результатов вычислений и их распространения на другие марки материала данного класса введены относительные коэффициенты для вероятностной оценки указанных статистик от объема испытаний. Получена система линейных корреляционных уравнений коэффициентов, на основе чего построена номограмма, позволяющая с доверительной вероятностью минимизировать объем и продолжительность испытаний.

Ключевые слова: вариационный ряд, испытание на усталость, вероятность, номограмма, минимизация.

3. По завершении первого этапа статистических вычислений и проверок нормальности распределения составляется сводная таблица результатов (табл.1) для всех серий экспериментов $i = \overline{1, m}$ [1] и согласно выражению $\hat{X}_p = \bar{X} + z_p s$

определяются вероятностные значения $\hat{X}_i, \hat{S}_i^2, \hat{V}_i, \lg \sum_{v=1}^{n_i} N_i$ с использованием их

с.к.о. - $S_{\bar{X}_i}, S_{S_i^2}, S_{V_i}, S_{\lg \sum N_i}$. Выбраны уровни вероятностей неразрушения $P(N) = 0,5, 0,9, 0,95, 0,99$ и $0,999$ ($z_p = 0, -1,28, -1,65, -2,33$ и $-3,09$), представляющие интерес для научных исследований и, в частности, для оценки надежности механических систем.

Учитывая значительную частоту повторных выборок для всех серий статистических экспериментов (при $n_i = \text{const}, u_i = 100$), можно утверждать, что полученные значения статистик (табл. 1) фактически являются обобщенными (априорными) параметрами для данного объема выборки n_i .

Предварительный графический анализ результатов показывает, что существует корреляционная связь между рассмотренными значениями статистик и объемом выборки n_i . При этом медианные значения $\hat{X}_i, \hat{S}_i^2, \hat{V}_i$ ($P(N) = 0,5$) остаются практически инвариантными объему выборки n_i , что согласуется с положением о статистической устойчивости выборочных средних. Однако при

$P(N) > 0,5$ значения $\widehat{\bar{x}}_i$, $\widehat{s}_i^2$, $\widehat{v}_i$, $\lg \sum_{v=1}^{n_i} N_i$ переменны (особенно в интервале $n_i = 30 \dots 50$) и вызывают необходимость их количественной оценки и выявления функциональных связей от n_i . Предварительная статистическая обработка показала, что в координатной системе $(\lg n, y)$ их можно аппроксимировать семействами линейных корреляционных уравнений типа

$$Y_x = (\bar{y} + z_p s_{y/x}) + (x - \bar{x}) r s_y / s_x = a + b_{y/x} x, \quad (1)$$

где $y_i = \widehat{\bar{x}}_i$, $\widehat{s}_i$, $\widehat{v}_i$, $\lg \sum_{v=1}^{n_i} N_i$, $x_i = \lg n_i$, $\bar{y} = \sum_{i=1}^m y_i / m$, $\bar{x} = \sum_{i=1}^m x_i / m$,

$$s_y = \sqrt{\sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2 / (m-1)}, \quad s_x = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 / (m-1)}, \quad r = \mu / s_x s_y,$$

$$\mu = \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) / (m-1), \quad s_{y/x} = s_y \sqrt{(1-r^2)(m-1)/(m-2)},$$

$$a = (\bar{y} + z_p s_{y/x}) - b_{y/x} \bar{x}, \quad b_{y/x} = r s_y / s_x = \mu / s_x^2.$$

Таблица 1

Сводная таблица результатов статистического эксперимента

i	n_i	u_i	$\bar{x}_i$	$s_{\bar{x}_i}^2$	$v_{\bar{x}_i}$	s_i^2	$s_{s_i^2}^2$	$v_{s_i^2}$
Общ. сов.	n_0	1	$\bar{x}_0$	$s_{\bar{x}_0}^2$	$v_{\bar{x}_0}$	s_0^2	$s_{s_0^2}^2$	$v_{s_0^2}$
1	n_1	u_1	$\bar{x}_1$	$s_{\bar{x}_1}^2$	$v_{\bar{x}_1}$	s_1^2	$s_{s_1^2}^2$	$v_{s_1^2}$
2	n_2	u_2	$\bar{x}_2$	$s_{\bar{x}_2}^2$	$v_{\bar{x}_2}$	s_2^2	$s_{s_2^2}^2$	$v_{s_2^2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	n_i	u_i	$\bar{x}_i$	$s_{\bar{x}_i}^2$	$v_{\bar{x}_i}$	s_i^2	$s_{s_i^2}^2$	$v_{s_i^2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	n_m	u_m	$\bar{x}_m$	$s_{\bar{x}_m}^2$	$v_{\bar{x}_m}$	s_m^2	$s_{s_m^2}^2$	$v_{s_m^2}$

Продолжение табл. 1

v_i	$s_{v_i}^2$	v_{v_i}	$\lg \sum_{v=1}^{n_i} N_i$	$s_{\lg \sum N_i}^2$	$v_{\lg \sum N_i}$
v_o	$s_{v_o}^2$	v_{v_o}	$\lg \sum_{v=1}^{n_i} N_o$	$s_{\lg \sum N_o}^2$	$v_{\lg \sum N_o}$
v_1	$s_{v_1}^2$	v_{v_1}	$\lg \sum_{v=1}^{n_i} N_1$	$s_{\lg \sum N_1}^2$	$v_{\lg \sum N_1}$
v_2	$s_{v_2}^2$	v_{v_2}	$\lg \sum_{v=1}^{n_i} N_2$	$s_{\lg \sum N_2}^2$	$v_{\lg \sum N_2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
v_i	$s_{v_i}^2$	v_{v_i}	$\lg \sum_{v=1}^{n_i} N_i$	$s_{\lg \sum N_i}^2$	$v_{\lg \sum N_i}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
v_m	$s_{v_m}^2$	v_{v_m}	$\lg \sum_{v=1}^{n_i} N_m$	$s_{\lg \sum N_m}^2$	$v_{\lg \sum N_m}$

Примечания: 1. Значения статистик $s_{\bar{x}_o}^2$, $s_{s_o^2}^2$, $s_{v_o}^2$, $s_{\lg \sum N_o}^2$ и $v_{\bar{x}_i}$, $v_{s_i^2}$, v_{v_i} , $v_{\lg \sum N_o}^2$

для общей совокупности ($n_o = 500$) получаются методом экстраполяции из графического построения функций соответствующих статистик серий экспериментов $i = \overline{1, m}$.

- Для условий настоящего исследования: $m = 17$, $n_o = 500$, $n_i = 450, 400, 350, 300, 250, 200, 175, 150, 125, 100, 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30$.
- Для всех серий испытаний количество повторных выборок одинаково: $u_1 = u_2 = u_3 = \dots = u_i = \dots = u_m = 100$.

Вычисления свидетельствуют о высокой степени корреляционной связи между рассмотренными величинами (табл. 2) и позволяют наряду с установлением гипотезы о нормальности распределения для вероятностной оценки параметров (табл. 1) при вариации объема выборки n_i для данного класса конструкционных материалов из алюминиевых сплавов [1] обоснованно воспользоваться эмпирическими функциями нормального распределения,

каждый раз корректируя медианные значения и дисперсии требуемых параметров.

Таблица 2

Параметры зависимостей (1) при $P(N) = 0,95$

Статистики	a	b _{y/x}	s _{y/x}	r
$\hat{\bar{X}}_i$	4,98434	0,04337	0,00437	0,96814
$\hat{s}_i$	0,03874	0,00141	0,00047	0,76325
$\hat{\bar{v}}_i$	0,02392	0,00602	0,00043	0,98325
$\lg \sum_{v=1}^{n_i} N_i$	5,00693	1,05465	0,00699	0,99985

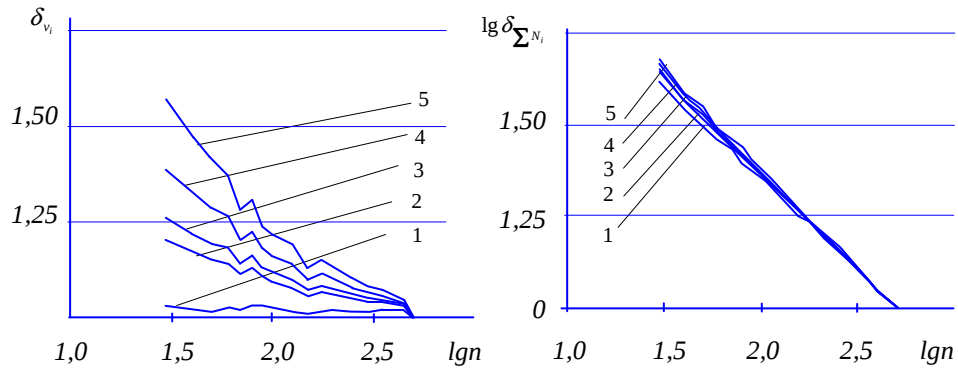
Для обобщения полученных результатов и распространения их на другие марки алюминиевых сплавов данного класса [2] целесообразно вероятностную оценку параметров генерированных выборок в связи с вариацией их объема n_i аналогично [3] провести относительными коэффициентами:

$$\delta_{\bar{x}_i} = \bar{x}_0 / \bar{x}_i, \delta_{s_i} = s_0 / s_i, \delta_{v_i} = v_0 / v_i, \delta_{\sum N_i} = \sum_{i=1}^{n_0} N_i / \sum_{v=1}^{n_i} N_i. \quad (2)$$

Предложенные коэффициенты (2), в свою очередь, являются условными случайными величинами, подлежащими вероятностной оценке. Представим их в общем виде: $\hat{\delta}_{P_i} = \hat{x}_{P_0} / \hat{x}_{P_i}$, где $\hat{x}_{P_{o(i)}} = \hat{\bar{x}}_{P_{o(i)}}$, $\hat{s}_{P_{o(i)}}$, $\hat{v}_{P_{o(i)}}$, $\lg \sum_{i=1}^{n_o(n_i)} N_{P_{o(i)}}$, и составим таблицы $\hat{\delta}_{P_i}$ (табл.3).

Значительная вариация значений $\hat{\delta}_{P_i}$ (рис.1) происходит при $P_i=30...40$, а при $P_i > 60$ - $\hat{\delta}_{P_i} \rightarrow 1$ (за исключением $\hat{\delta}_{\sum N_i}$), т. е. дальнейшее увеличение P_i не приводит к столь заметному и экономически обоснованному повышению точности при определении их значений. Плавный переход графиков $\hat{\delta}_{P_i}$ к единице при $P_i(60)$ подтверждает достоверность обобщенных значений $\bar{\bar{x}}_i$, $\bar{s}_i^2$, $\bar{v}_i$ и возможность их использования в качестве основных характеристик для априорных выборок P_i . Проведенные расчеты согласно (1) показали высокую степень корреляционной связи: $|r|=0,969...0,999$ - для $\hat{\delta}_{\bar{x}_i}$, $\hat{\delta}_{v_i}$, $\hat{\delta}_{\sum N_i}$ и

$|r|=0,811...0,847$ - для $\hat{\delta}_{s_i}$ (табл.4) в интервале $P(N) = 0,99...0,999$, представляющем интерес для уточненных расчетов.



а) б)

Рис.1. Зависимости $\delta_{v_i} = f_i(n)$ и $\delta_{\Sigma N_i} = f_i(n)$.

Линии 1...5 соответствуют $P(N)=0,5, 0,9, 0,95, 0,99$, и $0,999$

Таблица 3

№ серий	n_i	Значения $\hat{\delta}_{p_i}$ при $P(N)=$				
		0,5	0,9	0,95	0,99	0,999
Общ. совокупн.	n_o	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
1	n_1	$\hat{\delta}_{0,5,1}$	$\hat{\delta}_{0,9,1}$	$\hat{\delta}_{0,95,1}$	$\hat{\delta}_{0,99,1}$	$\hat{\delta}_{0,999,1}$
2	n_2	$\hat{\delta}_{0,5,2}$	$\hat{\delta}_{0,9,2}$	$\hat{\delta}_{0,95,2}$	$\hat{\delta}_{0,99,2}$	$\hat{\delta}_{0,999,2}$
3	n_3	$\hat{\delta}_{0,5,3}$	$\hat{\delta}_{0,9,3}$	$\hat{\delta}_{0,95,3}$	$\hat{\delta}_{0,99,3}$	$\hat{\delta}_{0,999,3}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	n_i	$\hat{\delta}_{0,5,i}$	$\hat{\delta}_{0,9,i}$	$\hat{\delta}_{0,95,i}$	$\hat{\delta}_{0,99,i}$	$\hat{\delta}_{0,999,i}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	n_m	$\hat{\delta}_{0,5,m}$	$\hat{\delta}_{0,9,m}$	$\hat{\delta}_{0,95,m}$	$\hat{\delta}_{0,99,m}$	$\hat{\delta}_{0,999,m}$

4. С целью минимизации объема и длительности испытаний используем систему семейств линейных уравнений с параметром Z_p согласно данным табл.4:

$$\begin{cases} \hat{\delta}_{\bar{x}} = a_1 + b_1 \lg n, \\ \hat{\delta}_{s_i} = a_2 + b_2 \lg n, \\ \hat{\delta}_{v_i} = a_3 + b_3 \lg n, \\ \lg \delta_{\Sigma N_i} = a_4 + b_4 \lg n, \end{cases} \quad (3)$$

которая свидетельствует о наличии многомерной формы связи между рассмотренными коэффициентами. В (3) $a_1, \dots, a_4$ и $b_1, \dots, b_4$ соответствуют аналогичным значениям из табл.4 для уровней $P(N) = 0,5 \dots 0,999$ ($z_p = 0, \dots, -3,09$).

Таблица 4

P(N)	Параметры	$\delta_{\bar{x}_i}$	δ_{s_i}	δ_{v_i}	$\lg \delta_{\Sigma N_i}$
0,5	a	1,00022	1,06311	1,04523	2,71232
	$b_{y/x}$	0,00010	-0,01856	-0,01168	-1,00568
	r	0,15111	-0,53566	-0,55891	-0,99993
0,9	a	1,01805	1,09546	1,38897	2,81271
	$b_{y/x}$	-0,00666	-0,03143	-0,14094	-1,04384
	r	-0,96586	-0,72885	-0,97608	-0,99988
0,95	a	1,02316	1,10477	1,50541	2,84113
	$b_{y/x}$	-0,00859	-0,03514	-0,18521	-1,05465
	r	-0,96755	-0,76302	-0,97695	-0,99985
0,99	a	1,03279	1,12241	1,75346	2,89446
	$b_{y/x}$	-0,01225	-0,04217	-0,28022	-1,07492
	r	-0,96872	-0,81100	-0,97445	-0,99979
0,999	a	1,04370	1,14250	2,08978	2,95428
	$b_{y/x}$	-0,01639	-0,05018	-0,41038	-1,09767
	r	-0,96906	-0,84718	-0,96838	-0,99969

Задача оптимального эксперимента при этом сводится к решению системы (3) с учетом ограничений

$$n_i \leq [n], P(N) \leq [P(N)], \delta_{\bar{x}_i} \leq [\delta_{\bar{x}_i}], \delta_{s_i} \leq [\delta_{s_i}], \delta_{v_i} \leq [\delta_{v_i}], \\ \delta_{\Sigma N_i} \leq [\delta_{\Sigma N_i}]. \quad (4)$$

Для облегчения расчетных процедур необходимо некоторое видоизменение системы (3) и представление ее в виде номограммы $\delta_{\bar{x}_i} - \delta_{s_i} - \delta_{v_i} - \lg \delta_{\Sigma N_i} - z_p$, позволяющей производить отбор взаимосвязанных коэффициентов доступным графическим способом с учетом (4). Анализ системы

(3) и учет требований номографии [4] показали, что совместным решением некоторых уравнений систему (3) целесообразно представить в виде

$$\begin{cases} \hat{\delta}_{\bar{x}_i} = a_1 + b_1 \lg n, \\ \hat{\delta}_{\bar{x}_i} = A_1 + B_1 \delta_{s_i}, \\ \hat{\delta}_{\bar{x}_i} = A_2 + B_2 \delta_{v_i}, \\ \lg \delta_{\Sigma N_i} = a_4 + b_4 \lg n, \end{cases} \quad (5)$$

где $A_1 = (a_1 b_2 - a_2 b_1) / b_2$, $A_2 = (a_1 b_3 - a_3 b_1) / b_3$, $B_1 = b_1 / b_2$, $B_2 = b_1 / b_3$.

Графическая интерпретация системы (5) и порядок выполнения графических операций представлены на рис.2. В (5) первые три уравнения фактически являются функциями относительных ошибок, а четвертое - функцией сокращения длительности испытаний.

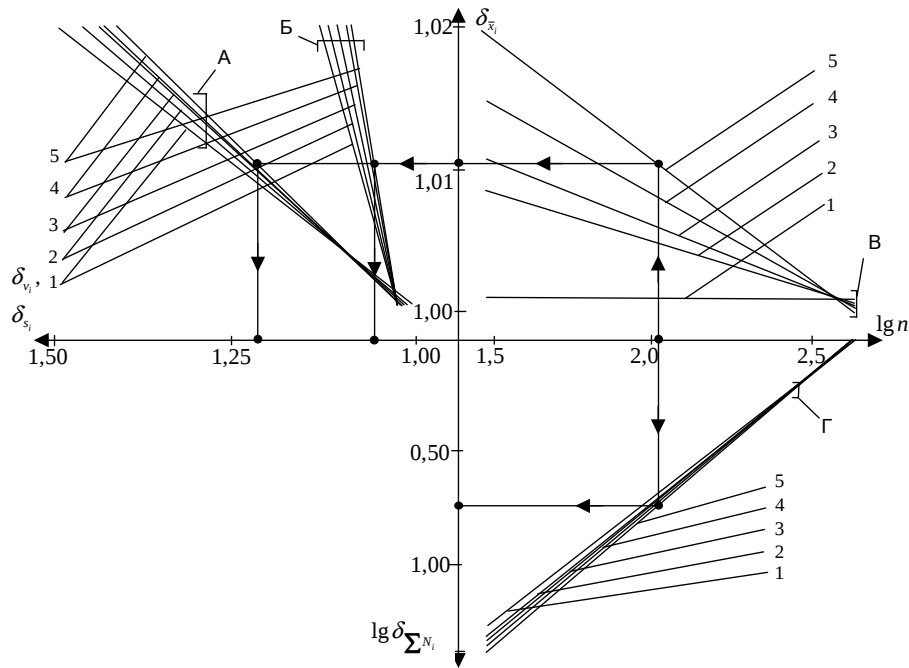


Рис. 2. Номограмма $\delta_{\bar{x}_i} - \delta_{s_i} - \delta_{v_i} - \lg \delta_{\Sigma N_i} - \lg n - z_p$:

А- $\delta_{v_i} = f_1(\delta_{\bar{x}_i})$, Б - $\delta_{s_i} = f_2(\delta_{\bar{x}_i})$ В - $\delta_{\bar{x}_i} = f_3(\lg n)$ и

Г - $\lg \delta_{\Sigma N_i} = f_4(\lg n)$.

Линии 1...5 соответствуют $P(N)=0,5, 0,9, 0,95, 0,99$ и $0,999$

Система (5) и номограмма (рис.2) обладают определенной универсальностью, т.к. обобщают результаты модельных испытаний стандартных образцов из характерного и часто используемого в транспорте и авиации конструкционного материала - алюминиевого сплава марки АВ. По ним можно решать как частные, так и комплексные задачи, а именно:

а) корректировать и дать вероятностную оценку значений $\hat{\delta}_{\bar{x}_i}$, $\hat{\delta}_{s_i}$ и $\hat{\delta}_{v_i}$, полученных для ограниченного объема испытаний n_i , а расчеты на циклическую долговечность вести с точностью, соответствующей $n_0 = 500$;

б) для объема испытаний n_i прогнозировать относительные ошибки $\hat{\delta}_{\bar{x}_i}$, $\hat{\delta}_{s_i}$, $\hat{\delta}_{v_i}$ и коэффициент сокращения длительности испытаний $\hat{\delta}_{\sum N_i}$;

в) при заданных уровнях $\hat{\delta}_{\bar{x}_i}$, $\hat{\delta}_{s_i}$, $\hat{\delta}_{v_i}$ и $P(N)$ определить необходимый объем испытаний n_i и прогнозировать кратность снижения времени испытаний согласно $\hat{\delta}_{\sum N_i}$;

г) минимизировать относительные коэффициенты (2) с учетом ограничений (4);

д) вести совместный или дифференцированный учет требований пп. "а-г".

Для принятых условий эксперимента и уровня $P(N) = 0,99...0,999$ экономически обоснованным является интервал $n_i = 30...35$ (рис.2), для которого $\hat{\delta}_{\bar{x}_i} = 1,014...1,020$, $\hat{\delta}_{s_i} = 1,05...1,06$, $\hat{\delta}_{v_i} = 1,32...1,36$, $\hat{\delta}_{\sum N_i} = 17,2...21,5$. Для интервала $n_i = 15...20$, чаще всего применяемого в практике экспериментов, необходима корректировка характеристик сопротивления усталости согласно номограмме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Стакян М.Г., Демирханян А.Р.** Постановка оптимальных испытаний на усталость. Сообщ.1. Расчетная методика и алгоритм статистического эксперимента // Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН.- 2002.- Т.55, №1.- С.3-10.
2. **Степнов М.Н.** Статистические методы обработки результатов механических испытаний: Справ. - М.: Машиностр., 1985. - 232 с.

3. **Стакян М.Г., Джрбашян Т.Э.** Влияние характера распределения образцов по уровням напряжений на результаты усталостных испытаний //Изв. вузов. Машиностр. - 1994. - №10-12. - С. 42-46.
4. **Хованский Г.С.** Основы номографии. - М.: Наука, 1976. - 352 с.
5. **Стакян М.Г., Демирханян А.Р.** Модифицированный метод проверки нормальности распределения результатов механических испытаний // Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН.- 2000.- Т.53, №3.- С.271-280.
6. **Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.** Машинные методы математических вычислений. - М.: Мир, 1980. - 280 с.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 10.04.2001

Մ.Գ. ՍՏԱԿՅԱՆ, Ա.Ռ. ԴԵՄԻՐԽԱՆՅԱՆ, Ա.Հ. ՍՈԳՈՄՈՆՅԱՆ

ԼԱՎԱՐԿՎԱԾ ՀՈԳՆԱԾԱՅԻՆ ՓՈՐՁԱՐԿՈՒՄՆԵՐԻ ԴՐՎԱԾՔԸ
Հաղորդում 2. Նոմոգրամ՝ փորձարկումների ծավալի եւ տևողության
նվազարկման համար

Լոգարիթմական կոորդինատային համակարգում բացահայտված են ուղղագծային հարաբերակցական կապեր փորձարկումների արդյունքների ընդհանուր համախմբից արհեստականորեն սերված փոփոխականային շարքերի հիմնական վիճակագրերի և այդ շարքերի ծավալների միջև: Հաշվարկային արդյունքներն ընդհանրացնելու և փորձարկված նյութի նույն դասի այլ մակնիշների վրա տարածելու նպատակով ու փորձարկումների ծավալից կախված՝ նշված վիճակագրերի հավանական գնահատման համար առաջարկված են հարաբերական գործակիցներ: Ստացված է գործակիցների գծային հարաբերակցական հավասարումների համակարգ, և այդ հիմքով էլ կառուցված է նոմոգրամ, որը հնարավորություն է ընձեռում վստահական հավանականությամբ նվազարկել փորձարկումների ծավալը և տևողությունը:

M. G. STAKYAN, A.R. DEMIRKHANYAN, A.H. SOGHOMONYAN

REALIZATION OF OPTIMAL TEST FOR FATIGUE
Report 2. Nomogram for minimization of test
volume and duration

A rectilinear correlation connection between basic statistic variation sequences artificially generated from the totality of test results and the volumes of these sequences in the logarithm coordinate system is revealed. To summarize the calculation results and to spread them on other types of the given class material, relative coefficients for stochastic evaluation of the mentioned statistics depending on the test volume are suggested. Simultaneous correlation equations of the coefficients are obtained, and on this basis a nomogram enabling to minimize with confiding probability the test volume and duration is constructed.