ISSN 0002-306X. Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2002. Т. LV, № 1.

УДК 681.5.33.2

АВТОМАТИЗАЦИЯ И
СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

С.Р. ПАПЯН

АНАЛОГ ДИАГРАММЫ ВЫШНЕГРАДСКОГО ДЛЯ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Получены формулы, позволяющие определить качество переходного процесса в импульсной системе, описываемой разностным уравнением 3-го порядка, без нахождения корней характеристического многочлена.

Ключевые слова: диаграмма, переходной процесс, характеристический многочлен.

Одной из важных задач при рассмотрении динамики систем автоматического регулирования является определение качества переходного процесса в устройстве. Для его оценки необходимо разделить область устойчивости на зоны, соответствующие апериодическому, неколебательному и колебательному характеру установления процессов.

Решение данного вопроса для непрерывных систем 3-го порядка было получено Вышнеградским еще в 1876 году и нашло дальнейшее развитие в [1].

Известно [2], что при использовании в характеристическом многочлене импульсной системы

$$a_3e^{3q} + a_2e^{2q} + a_1e^{q} + a_0 = 0 \qquad (1)$$

подстановки типа

$$e^{q} = (v+1)\ /\ (v-1) \qquad (2)$$

ее условия устойчивости могут быть сведены к известным ранее для непрерывных устройств неравенствам Гурвица, поскольку на плоскости V неустойчивому состоянию системы соответствуют корни, расположенные правее оси ординат.

В настоящей работе для построения границ апериодического и колебательного переходных процессов также используется вышеописанный метод. В области апериодического переходного процесса все корни (1) должны быть вещественными. Выражение (2) можно представить в виде

$$v = (e^{q}+1)/(1-e^{q}),$$

откуда видно, что все действительные корни, соответствующие устойчивому состоянию системы, перенесенные из плоскости q в v, располагаются на оси абсцисс от минус единицы до минус бесконечности. В непрерывных системах граница апериодического процесса определяется приравниванием нулю дискриминанта характеристического многочлена передаточной функции. Для распространения этого метода на импульсные системы необходимо сместить область значений на плоскости V вправо на единицу, поскольку в ней действительные корни располагаются, как указывалось выше, начиная от минус единицы, а не нуля. Следовательно, надо применять подстановку типа

$$Z = v + 1$$

или

$$e^{q} = Z/(Z-2)\ . \qquad (3)$$

При этом уравнение (1) примет следующий вид:

$$A_3 Z^3 + A_2 Z^2 + A_1 Z + A_0 = 0. \qquad (4)$$

Разделив все члены (4) на A_0 и введя новую переменную

$$X = Z\sqrt[3]{A_3/A_0} = Z/\Omega, \qquad (5)$$

получим

$$X^3 + AX^2 + BX + 1 = 0, \qquad (6)$$

где

$$A = \frac{A_2}{\sqrt[3]{a_0 A_3^2}} = \frac{3a_0 + a_2 + a_1}{\sqrt[3]{a_0 A_3^2}}, \qquad (7)$$

$$B = \frac{A_1}{\sqrt[3]{A_0^2 A_3}} = \frac{3a_0 + a_1}{\sqrt[3]{a_0^2 A_3}}, \qquad (8)$$

$$\Omega = \sqrt[3]{A_0/A_3} = -2\sqrt[3]{a_0/A_3}.$$

Поскольку уравнение (6) соответствует выражению, полученному Вышнеградским, для построения границы апериодического переходного процесса импульсной системы можно применять диаграммы для непрерывной системы, но при этом значения коэффициентов A и B должны соответствовать (7) и (8).

При определении области колебательности необходимо рассмотреть взаимное расположение вещественного и комплексных корней (1). Если пара комплексных корней лежит ближе к мнимой оси, чем вещественный, то процесс носит колебательный характер, а если наоборот – неколебательный характер. Границей между этими двумя случаями является расположение корней на одинаковом расстоянии от мнимой оси. При построении области колебательного переходного процесса для импульсных систем возникает затруднение, связанное с тем, что в случае перехода из плоскости X в q нарушается равноудаленность корней от мнимой оси. Предположим, что в плоскости X значения корней соответственно равны

$$X_1 = \alpha + \Delta,$$
$$X_2 = \alpha + j\beta,$$
$$X_3 = \alpha - j\beta.$$

Необходимо найти значение Δ, при котором вещественные части корней в плоскости q равны. С учетом (3) и (5) можно записать

$$q_1 = \ln\frac{X_1\Omega}{X_1\Omega - 2}, \tag{9}$$

$$q_2 = \ln\frac{X_2\Omega}{X_2\Omega - 2}. \tag{10}$$

Подставив в (10) значение X_2 и приравняв вещественные части корней, получим

$$\Delta^2 + \left[\frac{(\alpha^2 - \beta^2)\Omega - 2\alpha}{\alpha\Omega - 1}\right]\Delta - \beta^2 = 0. \tag{11}$$

Поскольку значение вещественной части корня при переходе из плоскости X в q не зависит от знака мнимой части, то рассмотрение может быть распространено и на X_3.

Приняв значения корней характеристического многочлена равными соответственно X_1, X_2, X_3, можно записать

$$X^3 + AX^2 + BX + 1 = (X - \alpha - j\beta)(X - \alpha + j\beta)(X - \alpha - \Delta).$$

Раскрыв скобки и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях, с учетом (11) получим уравнение границы колебательного переходного процесса:

$$\begin{aligned} &B^4\Omega^2 + B^3(\Omega^3 + 2A\Omega + 4) + B^2\Omega(18 - 3A\Omega) + \\ &+ B\Omega(27\Omega - 4{,}5A\Omega^2 - 12A^2) + 13{,}5\Omega^3 - 9A^2\Omega^2 - 4A^3 + 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Из (12) видно, что граница колебательного переходного процесса в импульсной системе в области параметров A и B определяется не одной кривой, а их семейством. Применяя методы решения уравнений 4-й степени Декарта-Эйлера или Феррари с использованием ЭВМ, можно легко построить кривые, аналогичные диаграмме Вышнеградского. Результаты такого построения приводятся на рис.

Учитывая, что диаграммы, приведенные в области параметров A и B, позволяют в основном решать только задачи анализа (даны параметры системы и необходимо определить качество переходного процесса), представляет интерес вывод уравнений, описывающих границы апериодического переходного процесса [3]:

$$A^2B^2 - 4(A^3 + B^3) + 18AB - 27 = 0.$$

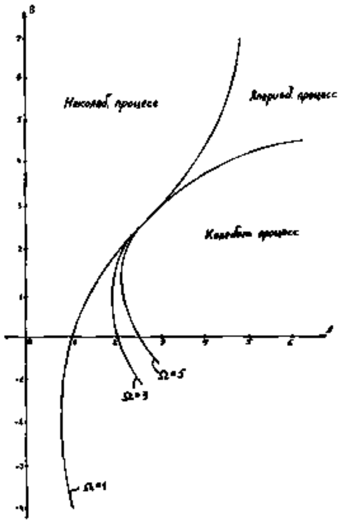

Рис.

При этом вычисления должны проводиться конкретно для каждой системы, что дает возможность выбрать ее параметры, исходя из требуемого качества переходного процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сапожников Р.А., Мокиенко Т.Н.** Исследование диаграммы Вышнеградского // Автоматическое управление. - Л.,1960.- № 12. - С. 23-37.
2. **Цыпкин Я.З**. Основы теории автоматических систем.- М.: Наука, 1977.- 560 с.
3. **Бесекерский В.А., Попов Е.П**. Теория систем автоматического регулирования.- М.: Наука, 1972.- 768 с.

ГАОЗТ “Телевизионная сеть Армении”. Материал поступил в редакцию 12.10.2000.

Ս.Ռ.ՊԱՊՅԱՆ

ՎԻՇՆԵԳՐԱԴՍԿՈՒ ԴԻԱԳՐԱՄԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՐՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԻՄՊՈՒԼՍԱՅԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ստացվել են բանաձևեր, որոնք թույլ են տալիս որոշել անցումային պրոցեսի որակը իմպուլսային համակարգում, որը նկարագրվում է երրորդ կարգի տարբերակման հավասարումով՝ առանց բնութագրական բազմանդամի արմատները գտնելու:

S.R. PAPYAN

VISHNEGRADSKY’S DIAGRAM DETERMINATION FOR PULSE SYSTEMS OF THE THIRD ORDER

Formulas for determination of the transient performance in the pulse system are obtained. The system is described by the difference equation of the third order without finding the characteristic polynomial.