

М.Ю. САРКИСЯНЦ

**АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ
МНОГОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Рассмотрены линейные модели многомерных динамических систем. Представлен алгоритм построения приближенных моделей на основе теории Я. Виллемса.

Ключевые слова: динамическая система, полиномиальная матрица, модель, сложность, несогласованность, алгоритм.

1. Основные положения теории моделирования многомерных динамических систем. В [1] рассмотрены: линейные динамические системы; детерминированный подход к теории систем; подход к проблеме приближенного моделирования систем. Основным объектом исследования являются авторегрессивные (AR)-системы, описываемые системой (AR)-уравнений, имеющих следующий вид:

$$R_1 w(t+1) + R_{1-1} w(t+1-1) + \dots + R_0 w(t) = 0. \quad (1)$$

Соотношение (1) в компактной форме имеет вид

$$R(s) w = 0, \quad w = (w_1, w_2, \dots, w_q),$$

где w – векторные временные ряды (экспериментальные данные); s – оператор левого сдвига, $sw(t) = w(t+1)$.

Полиномиальная матрица порядка q определяется формулой

$$R(s) = R_1 s^1 + R_{1-1} s^{1-1} + \dots + R_0.$$

Полиномиальная матрица R существует только в том случае, когда система (1) линейна, стационарна и полна (конечно-мерна).

Уравнение (1) определяет общую авторегрессивную модель. При построении приближенной модели возникает сложность и несогласованность между наблюдаемым временным рядом и моделью.

Сложность $c_t(w)$, $t=1,2,\dots$, рассматривается как понятие, обратное силе модели, и служит количественной мерой, выражающей, насколько модель сильна. Несогласованность между наблюдаемым временным рядом и моделью $\varepsilon(Z, M)$ показывает, насколько модель M далека от измерений Z .

Нежелательные свойства модели – большая сложность и большая несогласованность [1]. Модель с большой сложностью дает объяснения наблюдениям более широко, а модель, для которой велика несогласованность, – скудные объяснения. Наилучшим вариантом является низкая сложность и высокая точность.

Понятия сложности и несогласованности применяются в нижеизложенном методе приближенного моделирования. При этом фиксируется максимально допустимая сложность, обозначаемая через $c_{\text{доп}}$. Это сводится к заданию числа (AR)-уравнений и их запаздываний и поиску приближенной модели с максимальной допустимой сложностью.

В классе моделей M для измерения Z оптимальная приближенная модель обозначается через M^* , если удовлетворяются следующие условия:

$$c(M^*) \leq c^{\text{доп}}, \quad (2)$$

$$\{M^* \in M, c(M) \leq c^{\text{доп}}\} \Rightarrow \{\varepsilon(Z, M^*) \leq \varepsilon(Z, M)\}, \quad (3)$$

$$\{M^* \in M, c(M) \leq c^{\text{доп}}, \varepsilon(Z, M) = \varepsilon(Z, M^*)\} \Rightarrow \{c(M^*) \leq c(M)\}. \quad (4)$$

Как видно, оптимальная приближенная модель обладает некоторым уровнем сложности (2) и минимальной несогласованностью (3) внутри данного класса моделей. Однако, если имеется много моделей, достигающих указанного минимума, то среди них логично выбрать модель с наименьшей сложностью (4).

На основе этого метода разработан алгоритм построения приближенных моделей. В качестве экспериментальных данных принят q -мерный временной ряд.

До представления алгоритма вводится матрица ковариации $\Pi(w)$ временного ряда w , которая имеет следующий вид:

$$\Pi(w) = \begin{pmatrix} |w\rangle\langle w| & |w\rangle\langle sw| & |w\rangle\langle s^2w| & \dots \\ |sw\rangle\langle w| & |sw\rangle\langle sw| & |sw\rangle\langle s^2w| & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ |s^t w\rangle\langle w| & |s^t w\rangle\langle sw| & |s^t w\rangle\langle s^2w| & \dots \end{pmatrix}$$

Матрица $\Pi(w)$ - вещественная; $q \times q$ - мерная матрица.

В алгоритме использованы ограничения этой матрицы, обозначаемые через $\Pi_t(w)$ и состоящие из всех блочных строк с номерами $0, 1, \dots, t$ и всех блочных столбцов с номерами $0, 1, \dots, t$ матрицы $\Pi(w)$.

Вычисляются сингулярные значения [2] последовательных ограниченных корреляционных матриц $\Pi_t(w)$, $t=0, 1, \dots$, и сингулярные векторы для решения вопроса о том, какое количество и каких (AR)-соотношений с заданным запаздыванием должно выполняться на каждом этапе. Главная часть алгоритма является рекурсивной. Алгоритм работает с любыми исходными данными w .

2. Алгоритм построения моделей. Ввод исходных данных: $w(1), w(2), \dots, w(q)$

и $c^{\text{доп}} = (c_0^{\text{доп}}, c_1^{\text{доп}}, \dots, c_t^{\text{доп}})$ $0 < c_t^{\text{доп}} < 1$,

$d_t^{\text{доп}} := q(t+1) c_t^{\text{доп}}$,

$d_t := \min: (d_t^{\text{доп}}, d_{t-1} + (d_{t-1} - d_{t-2})), d_{-1}=0, d_{-2}=-q$.

С помощью d по формуле:

$$k_t := \max(0, (d_{t-1} - d_{t-2}) - (d_t^{\text{доп}} - d_{t-1})) = d_{t-1} - d_{t-2} - (d_t - d_{t-1}).$$

Получение функции $k: Z_+ \Rightarrow \{0, 1, \dots, q\}$.

Рекурсивная часть - вычисление (AR)-соотношений приближенной модели.

Перечисление переменных:

$\Pi_t(w)$ - ограниченная матрица ковариации исходных данных порядка t ;

$n_0^t, n_1^t, \dots, n_t^t$ - число (AR)-соотношений порядка $0, 1, \dots, t$, учитываемых моделью на этапе с номером t ($n_i^t = k_t, \forall 0 \leq i < t$);

$r_{i,j}^t(s) \in R_i^{l_{qj}}[s]$, $i = 0, 1, \dots, t$, $j \in n_i^t$ - (AR) - соотношения, учитываемые приближенной моделью на этапе с номером t ;

$N_t \in R^{q(t+1)}$ - линейная оболочка указанных (AR)-соотношений и соотношений, полученных в результате сдвига;

m_t - размерность пространства N_t ;

$m_t = \sum (t-i+1) n_i^t, i = 0, 1, \dots, t$;

$f_1, f_2, \dots, f_{mt} \in \mathbf{R}^{q(t+1)}$ - ортогональный базис для пространства N_t .

Шаг 1. Вычисление матрицы $\Pi_0(w) = |w \rangle \langle w|$, ее сингулярных значений: $\sigma_1^0, \sigma_2^0 \geq \dots \geq \sigma_{r_0}^0 > 0$ ($r_0 = q$).

k_0 определяется так: если $q c_0^{\text{доп.}} \geq r_0$, то $k_0 = r_0$. В противном случае k_0 выбирают так, что $\sigma_{k_0}^0 > \sigma_{k_0+1}^0 = \sigma_{q c_0^{\text{доп.}}+1}^0$ ($k_0 = q c_0^{\text{доп.}}$).

Шаг 2. Вычисление левых сингулярных векторов матрицы $\Pi_0(w)$: $u_{k_0+1}, u_{k_0+2}, \dots, u_q \in \mathbf{R}^q$.

$r_{0,j}^0 = u_{k_0+j}, f_j = r_{0,j}^0, f_j \in \mathbf{R}^q, j \in m_0$.

Шаг 3. Последующее пошаговое вычисление.

Вычисление матрицы $\Pi_t(w)$ из предыдущей матрицы;

Определение $p_t = \sum (t+1-i) k_i, i=0, \dots, t-1$.

Шаг 4. Определение сингулярных значений матриц $\Pi_t(w)$:

$\sigma_1^t \geq \sigma_2^t \geq \dots \geq \sigma_{n_t}^t > 0$,

$r_t \leq q(t+1) - p_t$.

Выбор чисел d_t : если $q(t+1) c_t^{\text{доп.}} \geq r_t$, то $d_t = r_t$, в противном случае d_t выбираем так, что $\sigma_{d_t}^t > \sigma_{d_t+1}^t = \sigma_{q(t+1) c_t^{\text{доп.}}+1}^t$, полагаем, что $n_t = q(t+1) - d_t - p_t, n_t = k_t$.

Шаг 5. Вычисление левых сингулярных векторов матриц $\Pi_t(w)$, соответствующих ее наименьшим сингулярным значениям:

$u_{d_t+1}, u_{d_t+2}, \dots, u_{d_t+n_t}, f_1, f_2, \dots, f_{p_t} \in \mathbf{R}^{q(t+1)}$,

$r_{i,j}^t(s) = u_{d_t+j}, r_{i,j}^t \in \mathbf{R}^{k \times q}[s]$,

$m_t = p_t + n_t, f_{p_t+j} = u_{d_t+j}, j \in n_t$.

Алгоритм завершен.

Результатом проведенного вычисления является набор полиномов:

$r_{i,j}^t(s) \in \mathbf{R}^{k \times q}[s], i=0, 1, \dots, t, j \in n_i; M^* = M^*(R^*)$ с t , равным этапу, на котором алгоритм завершился.

Модель M^* будет определена всегда, а матрица R^* - получена за конечное число шагов. M^* является оптимальной приближенной моделью. Конечность алгоритма понимается в том смысле, что рекурсивный шаг вычисления вызывается самое большее q раз, и каждый вызов ведет к увеличению общего числа (AR) - соотношений $p_0^t + p_1^t + \dots + p_t^t$ по крайней мере на единицу. В общем случае алгоритм будет оканчиваться на этапе t , если

$$d_{t+1} - d_t = \lim_{t \rightarrow \infty} (d_{t'+1} - d_{t'}) = \min_{t'} (d_{t'+1} - d_{t'}).$$

Сходимость алгоритма вытекает как специальный случай из общей теории, разработанной в [1], откуда, в частности, следует при заданных w и $c^{\text{доп.}}$ и вычисленной M^* модели:

- $c(M^*) \leq c^{\text{доп.}}$;

в общем случае для $\Pi(w)$:

- $\{M \in L, c(M) \leq c^{\text{доп.}}\} \Rightarrow \{\varepsilon(w, M^*) \leq \varepsilon(w, M)\}$;

- $\{M \in L, c(M) \leq c^{\text{доп.}}, \varepsilon(w, M) = \varepsilon(w, M^*)\} \Rightarrow \{M = M^*\}$;

- $c_t(M^*) = d_t / q(t+1), t \in \mathbf{Z}_+$.

Вышеприведенный алгоритм для общей последовательности исходных данных порождает оптимально приближенную (AR)- модель со сложностью, ограниченной $c^{\text{доп.}}$.

Таким образом, на основании вышеизложенного можно прийти к следующим выводам:

- приведен алгоритм, допускающий практическую реализацию;
- разработана эффективная компьютерная программа, реализующая этот алгоритм;
- на основе алгоритма решены модельные задачи, которые из-за ограничения в объеме не приведены;
- алгоритм позволяет строить конкретные модели как технических, так и социально-экономических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Виллемс Я.К.** От временного ряда к линейной системе // Теория систем, математические методы и моделирование: Сб. ст.- М.: Мир, 1989.- 389 с.
2. **Райс Дж.** Матричные вычисления и математическое обеспечение/ Пер. с англ.- М.: Мир, 1984.- 264 с.
3. **Карслян Э.В.,** Современные методы теории автоматического управления. Частотные методы анализа и синтеза многосвязных САУ: Учебное пособие / ГИУА. - Ереван, 1991.- 121 с.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 3.04.2000.

Մ. ՅՈՒ. ՍԱՐԳՍՅԱՆՑ

ԲԱԶՄԱԶՈՓ ԴԻՆԱՄԻԿ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԳԾԱՅԻՆ ՄՈԴԵԼՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ԱԼԳՈՐԻԹՄ

Դիտարկված են բազմաչափ դինամիկ համակարգերի գծային մոդելները: Ներկայացված է մոտավոր մոդելների կառուցման ալգորիթմը Յան Վիլլեմսի տեսության հիման վրա:

M. YU. SARKISANTS

LINEAR MODEL CONSTRUCTION ALGORITHM OF MULTIDIMENSIONAL DYNAMIC SYSTEMS

Linear models of multidimensional dynamic systems are considered. The approximate model construction algorithm on the basis of J. Willems theory is presented.